35. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategorie Z7

In: Milan Koman (editor); Leo Boček (editor); Vladimír Repáš (editor): 35. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1985/86. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988. pp. 63–78.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404827

Kategorie Z7

ÚLOHY I. KOLA

Z7 - I - 1

Námořník vzpomínal, že při poslední plavbě kolem Evropy vyplouval se svou lodí z Leningradu za krásného slunečného rána první pondělí v měsíci. První pondělí po první neděli v témže měsíci se koupal již v Kodani. Poslední sobotu před poslední nedělí v dalším měsíci si prohlížel Atény. Do Oděsy připlul poslední sobotu téhož měsíce. Určete den, měsíc a rok začátku a konce cesty. Příhoda není starší sedmi let. (Úloha byla zadána ve školním roce 1985/86.)

Řešení. První pondělí v měsíci (vyplutí z Leningradu) musí být 1. den tohoto měsíce. V opačném případě by následující pondělí (koupání v Kodani) nebylo prvním, ale druhým pondělím po první neděli v měsíci, viz tabulku A (str. 64). Podobně poslední sobota v následujícím měsíci (připlutí do Oděsy) musí být posledním dnem měsíce. V opačném případě by předcházející sobota (prohlídka Atén) nebyla poslední, ale předposlední sobotou před poslední nedělí. (Sestavte si sami tabulku obdobnou tab. A.)

Tabulka A

Ú	St	Č	Pá	So	Ne	Po	Ú	St	Č	Pá	So	Ne	Po
						1	2	3	4	5	6	7	8
					1	2	3	4	5	6	7	8	9
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Plavba trvala celé dva po sobě jdoucí měsíce. Počet dní těchto měsíců může být:

a) $28 + 31 = 59$ b) $29 + 31 = 60$

c) $30 + 31 = 61$ d) $31 + 31 = 62$

Je-li 1. den plavby pondělí, pak 59. den je středa, 60. den je čtvrtek, 61. den je pátek a konečně 62. den sobota. Protože plavba skončila v sobotu, trvala 62 dny a musela se uskutečnit buď v červenci a srpnu, nebo v prosinci a lednu.
V tabulce B je výpis z kalendářů z posledních 8 let.

Tabulka B

ROK	85	84	83	82	81	80	79	78
1. 12.	Ne	So	Č	St	Ú	Po	So	Pá
1. 7.	Po	Ne	Pá	Č	St	Ú	Ne	So

Z tabulky je vidět, že jsou dvě možnosti:
Začátek cesty 1. 7. 1985 nebo 1. 12. 1980 a konec cesty

31. 8. 1985 nebo 31. 1. 1981. (Protože se námořník během plavby koupal v Kodani, lze pokládat 1. možnost za pravděpodobnější.)

Z7 - I - 2

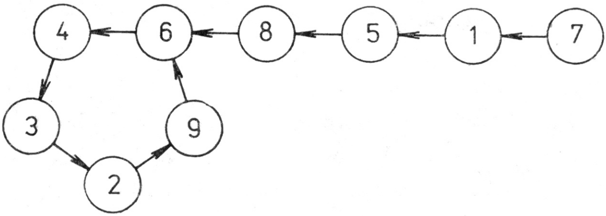
Pás je složen z 1 985 čtverců (obr. 15). V každém čtverci je jedna číslice. Dvojice sousedních číslic tvoří dvojciferné číslo, které je násobkem čísla 17 nebo 23. Určete první číslici, jestliže poslední číslo je 7.

Obr. 15

Řešení. Napíšeme si dvojciferné násobky čísel 17 a 23:

$$17, 34, 51, 68, 85; \qquad 23, 46, 69, 92 \qquad (1)$$

Nejdříve si sestavíme pomocný šipkový diagram (obr. 16), který ukazuje, jakého souseda má nalevo každá číslice.

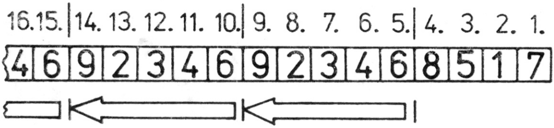


Obr. 16

Mezi násobky čísel 17 a 23 je jediné dvojciferné číslo končící číslicí 7 a to číslo 17. Číslice 7 má tedy levého souseda číslo 1. Mezi násobky (1) je opět jediné číslo, které končí číslicí 1, je to číslo 51. Číslici 1 musí tedy předcházet číslice 5. Tímto způsobem dostaneme diagram znázorněný na obrázku 16. Překontrolujte jej sami.

Z diagramu je vidět, že pás končí skupinou číslic 8 5 1 7 a před ní se opakují stále skupiny číslic 9 2 3 4 6.

Pole pásu očíslujeme od konce (obr. 17). Vidíme, že do každého pole, jehož pořadové číslo je násobek čísla 5, je vepsána číslice 6. Tedy i poslední pole odprava, tj. pole číslo 1 985, musí obsahovat číslici 6.

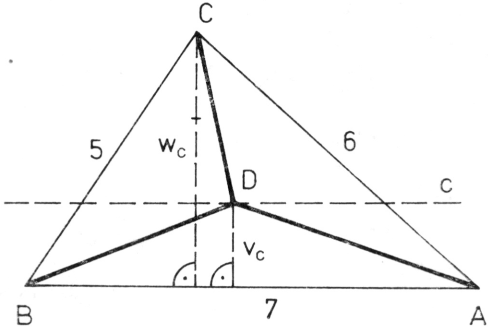


Obr. 17

Z7 - I - 3

Narýsujte trojúhelník ABC o stranách délek $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm. Sestrojte uvnitř trojúhelníku ABC bod D tak, aby trojúhelníky ABD, BCD a ACD měly stejný obsah.

Řešení. Načrtněte si obrázek 18. Trojúhelník ABC je rozložen na tři trojúhelníky ABD, BDC a CDA, které mají stejný obsah. Ten se tedy rovná jedné třetině obsahu S celého trojúhelníku ABC. Například obsah trojúhelníku ABD můžeme vypočítat dvěma způsoby:



Obr. 18

$$S_{ABD} = \frac{1}{3} S = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot w_c$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot v_c$$

Porovnáním pravých stran dostaneme

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot w_c = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot v_c,$$

odkud vyjde

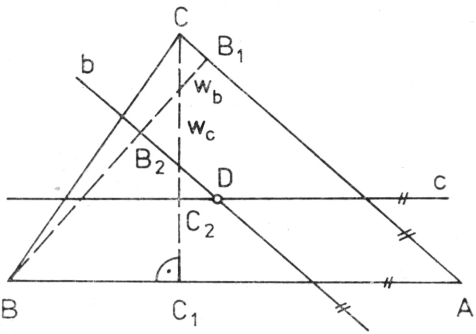
$$v_c = \frac{1}{3} w_c.$$

Bod D tedy leží na přímce c, která je rovnoběžná se stranou AB ve vzdálenosti rovné jedné třetině výšky w_c daného trojúhelníku ABC.

Podobnou úvahu můžeme opakovat pro zbývající dva trojúhelníky BDC a ADC.

Konstrukce (obr. 19)

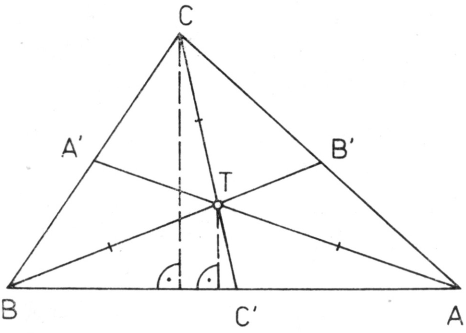
1. $\triangle$ ABC: $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm
2. $w_c = CC_1$: výška ke straně AB
3. $C_2 : C_2 \in CC_1$, $CC_2 = \dfrac{2}{3} w_c$
4. c: $C_2 \in c$, $c \parallel AB$
5. Opakujeme kroky 2 až 4 pro jinou výšku např. $w_b = BB_1$
6. D: $D \in c \cap b$
7. $\triangle$ ABD, $\triangle$ BCD, $\triangle$ ACD (na obrázku nejsou vyznačeny)



Obr. 19

Zkouška. Sestrojené trojúhelníky dělí trojúhelník ABC na tři části téhož obsahu, neboť vždy mají některou stranu společnou s daným trojúhelníkem a příslušnou výšku rovnou jedné třetině odpovídající výšky trojúhelníku ABC.

Poznámka. Konstrukci lze provést jednodušeji. Bod D je totiž těžištěm trojúhelníku ABC, obr. 20. To plyne z toho,



Obr. 20

že těžiště T libovolného trojúhelníku ABC dělí každou těžnici na dvě části, jejichž délky jsou v poměru 2 : 1, počínaje od vrcholu trojúhelníku. Proto má těžiště T od každé strany trojúhelníku ABC vzdálenost rovnou jedné třetině příslušné výšky.

Z7 - I - 4

Zvolíme libovolně osm po sobě následujících přirozených čísel. Zjistěte, kolik mezi nimi může být a) nejvýše, b) nejméně prvočísel. Uveďte příklady.

Řešení. a) Mezi osmi po sobě jdoucími čísly jsou vždy čtyři čísla lichá a čtyři čísla sudá. Kromě čísla 2 jsou všechna prvočísla lichá. Není-li tedy mezi danými čísly dvojka, mohou být z nich nejvýše čtyři prvočísla. Zkusíme proto ještě případ, kdy mezi danými osmi čísly je dvojka. Jsou dvě možnosti.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

nebo

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Ale i v těchto případech jsou mezi nimi jen čtyři prvočísla, a to 2, 3, 5, 7.

b) Nyní ukážeme, že mezi danými čísly nemusí být žádné prvočíslo. Stačí uvést příklad. Nejdříve najdeme nejmenší společný násobek čísel 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. To je číslo 2 520. K němu přičteme čísla 2, 3, 4, ..., 9. Dostaneme osm čísel

$$2\,522, 2\,523, 2\,524, 2\,525, 2\,526, 2\,527, 2\,528, 2\,529.$$

Z nich první číslo je dělitelné číslem 2, druhé číslem 3, třetí číslem 4, atd. Žádné z těchto čísel není tedy prvočíslo.

Mezi osmi po sobě jdoucími celými čísly nemusí být žádné prvočíslo, nejvýše však jsou mezi nimi čtyři prvočísla.

Poznámka. Ověřte, že místo čísla 2 520 lze použít nejmenší společný násobek čísel 2, 3, 5, 7, tj. 210.

Z7 - I - 5

Věžní hodiny odbíjejí malým zvonem každou čtvrthodinu: první čtvrť jeden úder, druhá čtvrť dva údery, třetí čtvrť tři údery, čtvrtá čtvrť čtyři údery. Dále odbíjejí velkým zvonem na konci každé hodiny příslušný počet úderů (1, 2, 3, ..., 12 úderů). Zjistěte nejkratší dobu, za kterou můžeme slyšet 1 000 úderů. (Dobu mezi údery při odbíjení téže čtvrthodiny nebo téže hodiny nepočítejte.)

Řešení. Údery se opakují ve dvanáctihodinovém cyklu. Zjistíme počet úderů během jednoho cyklu.

$$\begin{array}{rl} 1.\ \text{hodina:} & 1 + 2 + 3 + 4 + 1 \\ 2.\ \text{hodina:} & 1 + 2 + 3 + 4 + 2 \\ 3.\ \text{hodina:} & 1 + 2 + 3 + 4 + 3 \\ & \quad \dots\dots \\ 12.\ \text{hodina:} & 1 + 2 + 3 + 4 + 12 \end{array}$$

Počet všech úderů je

$$12.(1 + 2 + 3 + 4) + (1 + 2 + 3 + \ldots + 12) = 198.$$

Během pěti dvanáctihodinových cyklů odbijí hodiny $5.198 = 990$ úderů.

Začneme-li poslouchat při odbíjení dvanácté hodiny, a pak posloucháme 5 celých dvanáctihodinových cyklů, uslyšíme dokonce

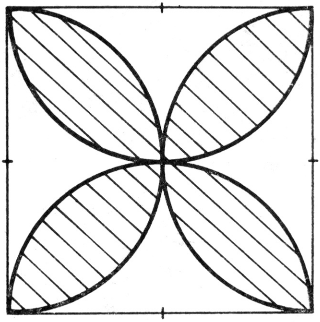
$$1 + 2 + 3 + 4 + 12 + 990 = 1\,012$$

úderů. Nejkratší doba je tedy 60 hodin.

Z7 - I - 6

Narýsujte čtyřlístek a vypočtěte jeho obsah; délka strany čtverce je $a = 6$ cm (obr. 21, str. 72).

Řešení. Narýsujeme čtverec o straně $a = 6$ cm. Čtyřlístek ohraničují čtyři půlkružnice o poloměrech 3 cm opsané ze středů stran narýsovaného čtverce.



Obr. 21

Čtyřlístek je složen ze čtyř částí, z nichž každá je průnikem dvou půlkruhů o poloměru $r = \frac{1}{2}a = 3$ cm. Součet obsahů čtyř půlkruhů se rovná součtu dvojnásobného obsahu čtyřlístku a obsahu nevyšrafované části čtverce. Tedy součet obsahů čtyř půlkruhů o poloměru $r = 3$ cm se rovná součtu obsahu čtverce o straně $a = 6$ cm a hledaného obsahu S čtyřlístku.

$$4S_{\frown} = a^2 + S$$

neboli

$$S = 4S_{\frown} - a^2.$$

Po dosazení vypočteme:

$$S = 4.\frac{1}{2}\pi.3^2 - 6^2 = 18\pi - 36 = 18(\pi - 2)$$

$$S = 20{,}52 \doteq 20{,}5.$$

Obsah čtyřlístku je přibližně 20,5 cm^2.

Poznámka. Jsou další možné výpočty. Např. polovina každého ze 4 lístků má obsah rovný rozdílu obsahu čtvrtkruhu o poloměru $r = 3$ cm a poloviny obsahu čtverce o straně délky 3 cm.

ÚLOHY II. KOLA

Z7 - II - 1

V krabici je 666 hracích kostek. Jirka je postupně bere z krabice a pokládá na stůl. První kostku položí s jedním okem nahoru, pak dvě kostky se dvěma oky nahoru, dále tři kostky se třemi oky nahoru atd., až šest kostek s šesti oky nahoru. Potom vše začne opakovat, tj. opět položí jednu kostku jedním okem nahoru atd. dokud se krabice nevyprázdní. Vypočtěte součet všech ok na horních stěnách kostek. (4 body)

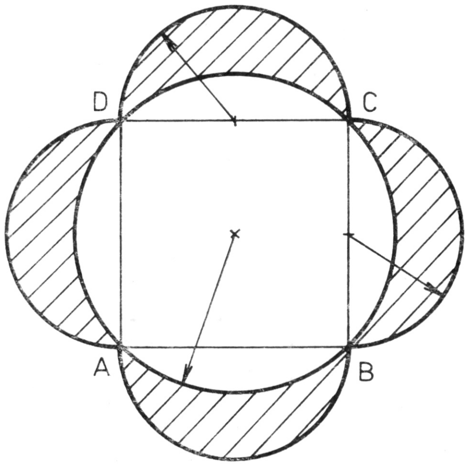
Řešení. Situace se opakuje vždy po položení 21 kostek. Na jejich horních stěnách je celkem

$$1 + 2.2 + 3.3 + 4.4 + 5.5 + 6.6 = 91 \text{ ok.}$$

Ze 666 kostek vznikne 31 úplných skupin, které se skládají z 21 kostek a zbude neúplná skupina s 15 kostkami ($666 : 21 = 31$, zbytek 15). Na 31 úplných skupinách po 21 kostkách je na horních stěnách celkem $31.91 = 2821$ ok. Na posledních 15 kostkách je na horních stěnách $1.1 + 2.2 + 3.3 + 4.4 + 5.5 = 55$ ok. Celkový počet ok, která vidíme na horních stěnách, je roven součtu čísel $2821 + 55$, což je 2 876.

Z7 - II - 2

Vypočtěte součet obsahů čtyř měsíčků, které jsou sestrojeny nad stranami čtverce $ABCD$ (obr. 22); $|AB| = 6$ cm. Porovnejte výsledek s obsahem čtverce $ABCD$. (5 bodů)



Obr. 22

Řešení. V celém řešení jsou délky vyjádřeny v centimetrech a obsahy v centimetrech čtverečných. Průměr d a poloměr r kruhu opsaného čtverci $ABCD$ jsou

$$d = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6.\sqrt{2}, \quad r = 3.\sqrt{2}.$$

Obsah kruhu opsaného čtverci $ABCD$ je

$$S_1 = \pi.(3.\sqrt{2})^2 = 18.\pi.$$

Čtyři půlkruhy opsané nad stranami čtverce $ABCD$ mají dohromady obsah

$$S_2 = 2.\pi.3^2 = 18.\pi.$$

Obsah čtverce $ABCD$ je

$$S_3 = 6^2 = 36.$$

Součet obsahů všech čtyř měsíčků je

$$S = S_3 + S_2 - S_1 = 36 + 18.\pi - 18.\pi = 36.$$

Součet obsahů všech čtyř měsíčků je stejný jako obsah čtverce $ABCD$ a rovná se 36 cm^2.

Poznámka. Všimněte si, že za číslo π jsme v celém řešení nemuseli dosazovat. Tím se výpočet značně zjednodušil.

Z7 - II - 3

Určete prvních 9 a posledních 9 číslic podílu

$$\underbrace{3\,000 \ldots\ldots 000}_{99 \text{ nul}}7 : 37.$$

Udejte také zbytek. (6 bodů)

Řešení. Postupným dělením se zjistí, že dokud sepisujeme k dílčím zbytkům nuly, opakuje se v podílu trojice číslic 810:

$$\begin{array}{l}
3|000|000|000| \ldots : 37 = 810\,810 \ldots \\
\;\;40 \\
\;\;\;\;3|00 \\
\;\;\;\;\;\;40 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;3|00 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;40 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;3
\end{array}$$

Částečný zbytek 3 vyjde vždy pod každou třetí nulou, tedy i pod 99. nulou. Takže konec dělení má tvar

$$\begin{array}{r}
\ldots\ 000|000|7 : 37 = \ldots\ 811\ . \\
3|00 \quad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \\
40 \quad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \\
3|7 \quad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \\
0 \quad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad
\end{array}$$

Podíl je proto roven číslu

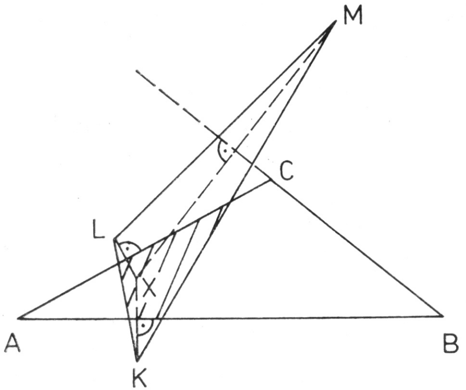
$$\underbrace{810\,810\,810\ \ldots\ 810\,810}_{\text{32krát trojice 810}}\,811.$$

Zbytek je nula.

Z7 - II - 4

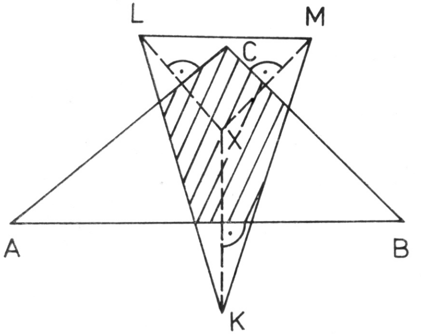
Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a zvolte jeho bod X neležící na žádné straně. Sestrojte k bodu X body souměrně sdružené podle přímek AB, AC, BC a označte je postupně K, L, M. Vyznačte průnik trojúhelníků ABC a KLM. Měňte tvar trojúhelníku ABC i polohu bodu X a zjistěte, zda průnikem může být čtyřúhelník, pětiúhelník, šestiúhelník. Výsledky narýsujte. (5 bodů)

Řešení. Průnikem může být čtyřúhelník, pětiúhelník i šestiúhelník. Čtyřúhelník jen v případě, že trojúhelník ABC je tupoúhlý a bod X zvolíme dostatečně blízko vrcholu jednoho nebo druhého ostrého vnitřního úhlu trojúhelníku ABC

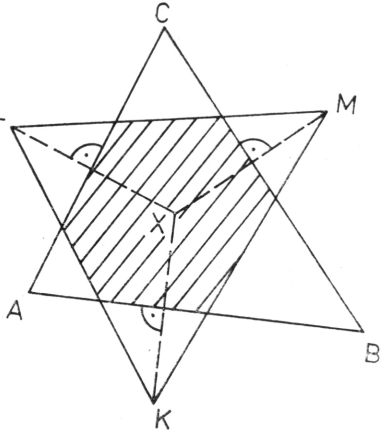


Obr. 23a

(obr. 23a). Pětiúhelník může vzniknout pro pravoúhlý nebo tupoúhlý trojúhelník *ABC* (obr. 23b). Šestiúhelník může vzniknout jen pro ostroúhlý trojúhelník *ABC* (obr. 23c).



Obr. 23b



Obr. 23c