35. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategorie Z6

In: Milan Koman (editor); Leo Boček (editor); Vladimír Repáš (editor): 35. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1985/86. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988. pp. 79–92.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404828

Kategorie Z6

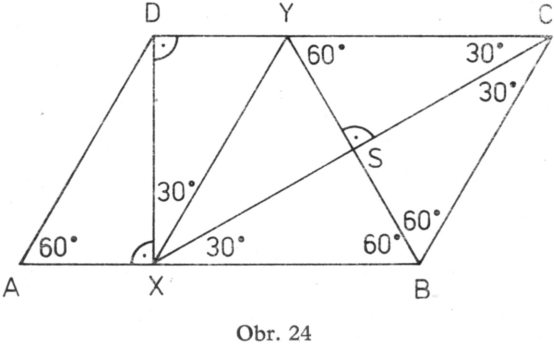
ÚLOHY I. KOLA

Z6 - I - 1

Daný je rovnobežník $ABCD$: $|AB| = 9$ cm, $|BC| = 6$ cm, $v(\sphericalangle DAB) = 60°$. Rozdeľte daný rovnobežník na 6 zhodných trojuholníkov. Zhodnosť trojuholníkov dokážte.

Riešenie (obr. 24)

1. Priamka CX je osou uhla BCD. Potom platí:
   $v(\sphericalangle XCB) = v(\sphericalangle XCY) = 30°$
   $v(\sphericalangle YCX) = v(\sphericalangle CXB) = 30°$ ... striedavé uhly
   Z toho vyplýva, že trojuholník XBC je rovnoramenný.



Obr. 24

Priamka BY je osou uhla XBC, z toho

$$\triangle XBS \cong \triangle BCS \text{ (usu)}.$$

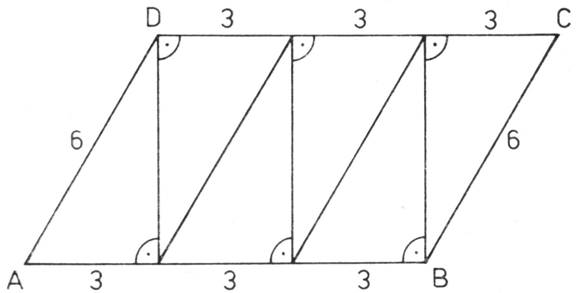
2. Trojuholník BCY je rovnostranný; z toho vyplýva $v(\sphericalangle YBC) = v(\sphericalangle BCY) = v(\sphericalangle BYC) = 60°$, uhol BYC a uhol XBS sú striedavé, z toho vyplýva:

$$\triangle BCS \cong \triangle CYS$$

3. $\triangle XSY \cong \triangle CSY$ (sus)
4. $\triangle XYD \cong \triangle XYS$ (usu)
5. $\triangle XYD \cong \triangle DAX$ (usu)

Teda: $\triangle AXD \cong \triangle YDX \cong \triangle YSX \cong \triangle BSX \cong$
$\cong \triangle BSC \cong \triangle YSC$

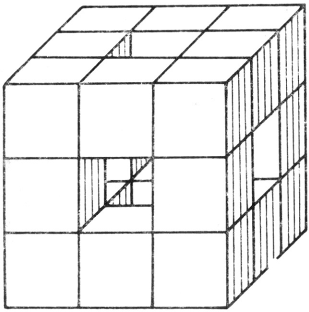
Poznámka. Iné riešenie je na obr. 25.



Obr. 25

Z6 - I - 2

Samko mal 100 kusov samolepiek tvaru štvorca so stranou 3 cm. Koľko samolepiek mu ostalo, ak nimi oblepil steny telesa »deravej kocky« (aj znútra) znázornenej na obrázku 26? Teleso je postavené z 20-tich zhodných kociek s hranou 3 cm.

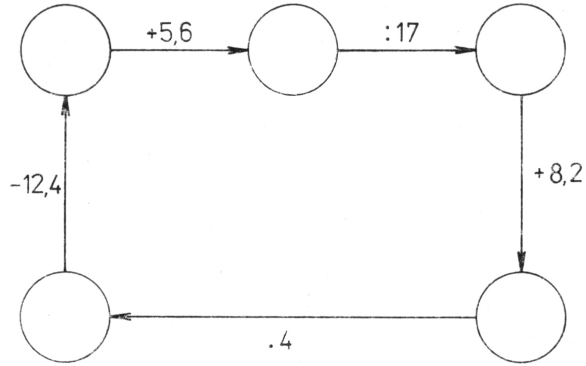


Obr. 26

Riešenie. Na každú stenu potrebujeme 8 ks, tj. $6.8 = 48$ ks, na každú »dieru« potrebujeme 4 ks, tj. $6.4 = 24$ ks. $100 - (48 + 24) = 28$. Samkovi ostalo 28 samolepiek.

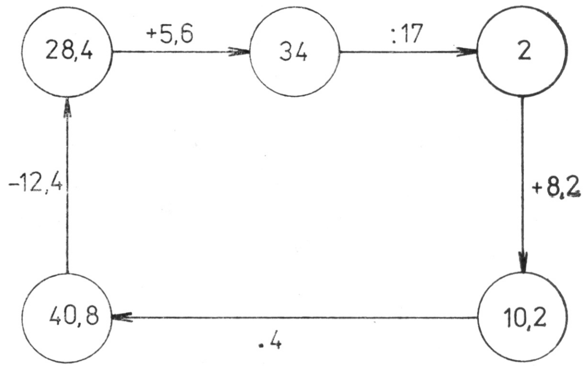
Z6 - I - 3

Do krúžkov vpíšte čísla tak, aby zodpovedali uvedeným počtovým výkonom. (Pozri obrázok 27.) (Ak nerozumiete zadaniu, pozrite úlohu Z5-I-5.)



Obr. 27

Riešenie (obr. 28)



Obr. 28

Príklad možno riešiť experimentálne, alebo rovnicou.

$$[(x + 5{,}6) : 17 + 8{,}2].4 - 12{,}4 = x$$

$$x = 28{,}4$$

Z6 - I - 4

Názov mesta sa píše piatimi písmenami. Keď každé písmeno nahradíme poradovým číslom abecedy (A = 1, B = 2, C = 3, D = 4, . . .; nezabudnite na CH), dostaneme čísla, ktoré majú tieto vlastnosti: Súčet všetkých piatich čísel sa rovná $\frac{1}{4}$ z 256. Tretie číslo je väčšie ako všetky ostatné, a to od druhého o 10, od prvého o 5, od štvrtého o 2 a od piateho o 19. Aký je názov mesta?

Riešenie. Označme 3. číslo x, potom

1. číslo je $x - 5$,
2. číslo je $x - 10$,
4. číslo je $x - 2$,
5. číslo je $x - 19$.

Ich súčet je

$$x + (x - 5) + (x - 10) + (x - 2) + (x - 19) = 5x - 36.$$

Pritom súčet všetkých piatich čísel má byť $\frac{1}{4}$ z 256, čo je 64. Teda

$$5x - 36 = 64$$
$$5x = 100$$
$$x = 20.$$

Tieto čísla sú v poradí: 15, 10, 20, 18, 1. Priradíme im písmená N I T R A.

Z6 - I - 5

Karol má telefónne číslo *abcd*, Marián má telefónne číslo *mnopq*. Tieto čísla sú zaujímavé tým, že spolu obsahujú všetky číslice od 1 až po 9, každú číslicu práve jeden raz. Pritom súčin týchto dvoch čísel je najväčší možný. Zistite, aké telefónne čísla majú Karol a Marián.

1. riešenie. Hľadáme také dve čísla A, B (štvorciferné a päťciferné), aby obsahovali každú cifru 1 až 9 práve raz a pritom ich súčin bol čo najväčší. Aby to platilo, musia mať čísla A, B na prvom mieste cifru 9 a 8 a na druhom mieste cifru 7 a 6. Sú dve možnosti: $A = 97\_$, $B = 86\_$, alebo $A = 96\_$, $B = 87\_$. Súčin $97\_ . 86\_ = 8342\_$ je väčší ako súčin $96\_ . 87\_ = 8352\_$. Nám vyhovujú teda čísla $96\_$, $87\_$. Ako ďalšie cifry použijeme najväčšie zo zvyšných, teda 5 a 4. Porovnáme súčiny $965\_ . 874\_ = 843410\_$, $964\_ . 875\_ = 843500\_$. Výhodnejší je druhý z nich. Najväčšie zo zvyšných čísel sú 2 a 3. Cifry 2, 3 zapíšeme na štvrté miesto v číslach A, B. Porovnáme súčiny $9643\_ . 8752\_ = 84395536\_$, $9642\_ . 8753\_ = 84396426\_$. Výhodnejší je druhý. Poslednú cifru 1 môžme pridať jednému, alebo druhému číslu. Porovnáme súčiny $96421 . 8753 = 843973013$ a $9642 . 87531 = 843973902$. Karol má telefónne číslo 9642 a Marián 87531. (Ak ste úlohu riešili len úsudkom, mohli ste dôjsť k výsledku 97531 . 8642. V čom bol váš úsudok chybný?)

Poznámka. Všimnite si ešte raz, ako sme našli hľadané telefónne čísla. Povedali sme, že musia začínať číslicami 9 a 8 a že na druhých miestach stoja číslice 7 a 6. Na treťom mieste zľava sú číslice 5, 4 a tak ďalej. Tieto vlastnosti sme brali z názoru. Hĺbavejší čitateľ by si však mal položiť otázku, či to tak naozaj musí byť. Uvedieme preto ešte jedno riešenie, kde na túto otázku odpovieme. Riešenie je určené hlavne starším žiakom.

2. riešenie. Aby sme nemuseli rozlišovať, ktoré číslo je päťciferné a ktoré štvorciferné, úlohu trochu pozmeníme. Budeme hľadať dve pätciferné čísla, v ktorých sa každá z číslic 0, 1, 2, ..., 9 použije práve raz a ktorých súčin je čo najväčší. Číslica 0 musí byť na konci jedného z týchto čísel. Po prečiarknutí tejto nuly zrejme dostaneme z nádejných pätciferných čísel hľadané telefónne čísla.

Ukážeme, že jedno z pätciferných čísel začína 9 a druhé 8. Ak by totiž obidve číslice 9, 8 patrili tomu istému číslu, dostali by sme menší súčin. Odhadneme súčin $98\_ . 7\_$.

$$98\_ . 7\_ \leqq 99\,000 . 80\,000 = 7\,920\,000\,000 \tag{1}$$

Podobne odhadneme súčin $9\_ . 8\_$. Pritom sú dve možnosti, podľa toho či je 7 v 1. čísle, alebo v druhom čísle. Číslo, ktoré neobsahuje 7, musí mať na 2. mieste aspoň číslicu 3.

$$9\_ . 8\_ \geqq 97\,000 . 83\,000 = 8\,051\,000\,000$$

$$9\_ . 8\_ \geqq 93\,000 . 87\,000 = 8\,091\,000\,000$$

Porovnaním s nerovnosťou (1) vidíme, že skutočne je

$$9\_\,.8\_ > 98\_\,.7\_\,.$$

Hľadané čísla majú teda na prvých miestach číslice 9, 8. Podobne by sme mohli ukázať, že na druhých miestach majú číslice 7, 6, na tretích miestach číslice 5, 4 atď. Ostáva dokázať, že súčin 96 420.87 531 je zo všetkých súčinov najväčší. Všimnite si, že všetky dvojice čísel s uvedeným rozmiestnením číslic (napr. dvojica 96 420, 87 531, alebo 97 531, 86 420 apod.) majú rovnaký súčet, ktorý je rovný

$$S = (90\,000 + 80\,000) + (7\,000 + 6\,000) + (500 + 400) + \\ + (30 + 20) + (1 + 0).$$

Teraz použijeme túto matematickú vetu: Zo všetkých dvojíc A, B $(A \geqq B)$, pre ktoré platí $A + B = S$, má najväčší súčin tá dvojica, pre ktorú je rozdiel $A - B$ najmenší.

Takouto dvojicou je zrejme dvojica čísel $A = 96\,420$ a $B = 87\,531$. Uvedenú vetu ľahko dokážeme. Čísla A, B, pre ktoré platí $A + B = S$, môžeme napísať v tvare

$$A = \frac{1}{2} S + x = n + x$$

$$B = \frac{1}{2} S - x = n - x,$$

kde $n = \dfrac{1}{2} S$.

Vypočítame ich súčin

$$A.B = (n + x).(n - x) = n^2 - x^2.$$

Tento súčin je najväčší, keď je x čo najmenšie.

Z6 - I - 6

Určte zloženie, poradie a bodové hodnotenie prvých troch dvojčlenných hliadok v branných pretekoch podľa týchto údajov: Jožo získal o 10 bodov viac ako Dušan, Dušan o 20 viac ako Peter. Rudo získal o 5 bodov menej ako druhý člen jeho hliadky. Emil stratil na každom stanovišti o 5 bodov viac ako druhý člen jeho hliadky. Karol stratil na dvoch stanovištiach po 5 bodov a na ostatných piatich stanovištiach po 10 bodov, zatiaľ čo jeho partner získal na všetkých stanovištiach plný počet bodov. Úspešnejší pretekári z týchto troch hliadok získali dovedna 380 bodov. Hliadka, ktorá sa umiestnila na druhom mieste, získala 220 bodov.

Riešenie. Označíme počty bodov, ktoré získali chlapci, začiatočnými písmenami ich mien. Čiarkou označíme počet bodov získaných druhým členom hliadky. Potom zo zadania:

$$J = D + 10$$
$$D = P + 20$$
$$R = R' - 5$$
$$E = E' - 7.5 = E' - 35$$
$$K = K' - 2.5 - 5.10 = K' - 60$$

Ďalej vieme, že $R' + E' + K' = P + D + J = 380$ (lepší z dvojice).

$$P + D + J = P + P + 20 + P + 30 = 3P + 50 = 380$$
$$P = 110$$

Teda Peter získal 110 bodov, Dušan 130, Jožo 140. Najlepší bol Jožo, a teda bol v hliadke s Karolom, potom Karol získal $140 - 60 = 80$ bodov.

Dalej môžeme uvažovať:

a) Emilov partner je Dušan, potom Emil získal $130 - 35 = 95$ bodov a Rudov partner je Peter, Rudo získal $110 - 5 = 105$ bodov, alebo

b) Emilov partner je Peter, Emil získal $110 - 35 = 75$ bodov, Rudov partner je Dušan, Rudo získal $130 - 5 = 125$ bodov.

Úloha má dve riešenia:

a) I. miesto Dušan, Emil získali $130 + 95 = 225$ bodov.
II. miesto Jožo, Karol získali $140 + 80 = 220$ bodov.
III. miesto Peter, Rudo získali $110 + 105 = 215$ bodov.

b) I. miesto Dušan, Rudo získali $130 + 125 = 255$ bodov.
II. miesto Jožo, Karol získali $140 + 80 = 220$ bodov.
III. miesto Peter, Emil získali $110 + 75 = 185$ bodov.

ÚLOHY II. KOLA

Z6 - II - 1

Názov mesta sa píše štyrmi písmenami. Ak sa každé písmeno nahradí poradovým číslom abecedy A B C D E F G H

CH I J K L M N O P R S T U V X Y Z (je CH, nie je Q), získané 4 čísla budú mať tieto vlastnosti:

1. Prvé číslo sa rovná jednej osmine štvrtého čísla.
2. Tretie číslo je o 13 väčšie ako prvé, o 3 menšie ako druhé a o 1 menšie ako štvrté.

Aký je názov mesta? (4 body)

Riešenie. Tretie číslo označíme x, prvé číslo je potom $x - 13$, druhé číslo $x + 3$, štvrté číslo $x + 1$ a súčasne prvé číslo je osmina štvrtého čísla. Teda

$$x - 13 = \frac{1}{8}(x + 1)$$

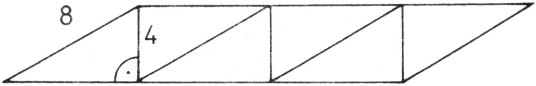
$$x = 15.$$

Čísla v poradí sú 2, 18, 15, 16 a mesto im prislúchajúce BRNO.

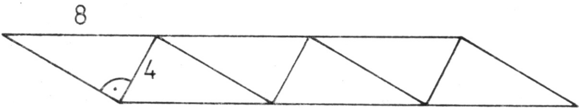
Z6 - II - 2

Daný je pravouhlý trojuholník s preponou dĺžky 8 cm a odvesnou dĺžky 4 cm. Zistite, či sa zo šiestich takýchto neprekrývajúcich sa trojuholníkov dá zložiť rovnobežník, ktorého jeden vnútorný uhol je 30°. Nájdite všetky možnosti. (5 bodov)

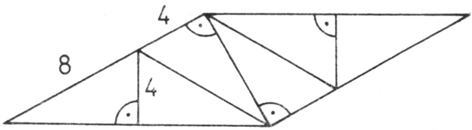
Riešenie. Sú tri možnosti rovnobežníkov s danou vlastnosťou (obr. 29a, b, c). Rovnobežník môžme síce dostať aj iným priložením trojuholníkov medzi »dvomi krajnými«, ale vždy vytvoria ten istý rovnobežník - teda ich nebudeme považovať za rôzne riešenia.



Obr. 29a



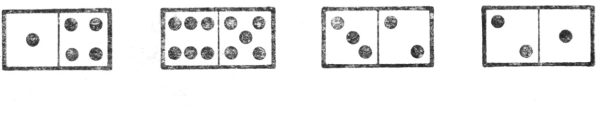
Obr. 29b



Obr. 29c

Z6 - II - 3

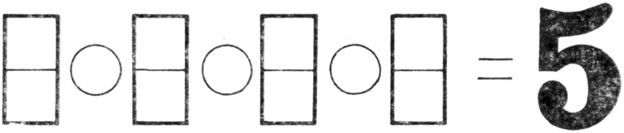
Dominové kocky môžeme chápať ako zápisy zlomkov. Pritom jedna kocka môže vyjadrovať dva zlomky, napr. prvá z kociek na obrázku 30 vyjadruje, podľa toho, ako ju po-



Obr. 30

stavíme, zlomky $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{1}$. Do krúžkov v obrázku 31 vpíšte znamienka »plus« alebo »mínus« a na miesta prázdnych domín umiestnite dominá z obrázku 30 tak, aby výsledok bol rovný 5.

(4 body)



Obr. 31

Riešenie. Jediné riešenie, až na poradie sčítancov, je

$$\frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{4}{1} - \frac{1}{2} = 5.$$

Z6 - II - 4

Myslím si štvorciferné číslo. Viem o ňom povedať:

1. Jeho ciferný súčet je stotina z čísla, ktoré dostanem zaokrúhlením mysleného čísla na stovky.
2. Jeho posledná číslica je o 1 väčšia ako predposledná číslica a súčet jeho posledných dvoch číslic sa rovná jeho druhej číslici.

Aké je to číslo? (5 bodov)

Riešenie. Myslené číslo môžeme písať ako $1\,000a + 100b + 10c + d$, kde a, b, c, d sú celé nezáporné čísla menšie ako 10, $a \neq 0$. Potom z podmienky 1 vyplýva

$$a + b + c + d = 10a + b, \qquad \text{ak } c < 5 \tag{1}$$

alebo

$$a + b + c + d = 10a + b + 1, \qquad \text{ak } c \geqq 5. \tag{2}$$

Z (1) určíme: $9a = c + d$, potom $a = 1$, pretože ak $a = 2$, potom $c + d = 18$, z toho $c = d = 9$ ... odporuje podmienkam úlohy, ak $a > 2$ ... podobne.

Teda $a = 1$, potom $c + d = 9$ a z podmienok úlohy $c = 4$, $d = 5$. Druhá číslica b je súčtom posledných dvoch, teda $b = 9$. Hľadané číslo je 1 945.

Z (2) nenájdeme také c, d, aby vyhovovali podmienkam úlohy.