36. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie B

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Pavel Töpfer (editor): 36. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1986/87. 28. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. pp. 50–64.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404838

Kategorie B

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

B - I - 1

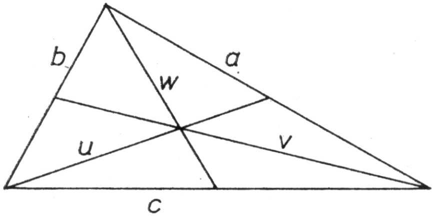
Najděte všechny dvojice (p, k), kde p je prvočíslo a k přirozené číslo, pro něž má rovnice $x^2 - 2(p^k + 2)x + p^{2k} = 0$ řešení v oboru celých čísel.

Řešení. Rovnici upravíme na tvar $(x - p^k - 2)^2 = 4(p^k + 1)$. Vidíme, že rovnice má právě tehdy řešení v oboru celých čísel, když je číslo $\sqrt{p^k + 1}$ celé, tedy $p^k = m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$, pro některé celé číslo m. Pak musí existovat celá nezáporná čísla a, b tak, že $p^a = m - 1$, $p^b = m + 1$, $k = a + b$. Odečtením prvních dvou rovností dostaneme $p^a(p^{b-a} - 1) = 2$, a tedy

$$\begin{aligned} p^a &= 2 \\ p^{b-a} - 1 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{aligned} p^a &= 1 \\ p^{b-a} - 1 &= 2. \end{aligned}$$

V prvním případě je $p = 2$, $k = 3$, v druhém případě je $p = 3$, $k = 1$. Jsou to jediná dvě řešení úlohy.

V každém pravoúhlém trojúhelníku o přeponě c a odvěsnách a, b platí $2(au^2 + bv^2) \leqq 5cw^2\sqrt{2}$, kde u, v, w jsou po řadě délky těžnic k stranám a, b, c. Dokažte.



Obr. 8

Řešení. Vyjádříme si nejdříve u, v, w pomocí a, b, přičemž víme, že $c^2 = a^2 + b^2$. Je (obr. 8) $u = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$, $v = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2}$, $w = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. Máme tedy dokázat nerovnost

$$2\left(ab^2 + \frac{a^3}{4} + a^2b + \frac{b^3}{4}\right) \leqq 5\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4}\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^3,$$

kterou upravíme na ekvivalentní tvar

$$2(a + b)(a^2 + 3ab + b^2) \leqq 5\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}\,.(a^2 + b^2).$$

Je $a + b \leqq \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}$, neboť $a^2 + 2ab + b^2 \leqq 2(a^2 + b^2)$.

Dále je $2(a^2 + 3ab + b^2) \leqq 5(a^2 + b^2)$, neboť $0 \leqq 3(a^2 - 2ab + b^2)$. Vynásobením těchto dvou nerovností dostaneme nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

B - I - 3

Jestliže pro kladná čísla a, b, c, p, q, r platí $ac \geqq b^2, pr \geqq q^2$, tak platí také $(a + p)(c + r) \geqq (b + q)^2$. Dokažte. Ukažte dále, kdy platí v posledním vztahu rovnost.

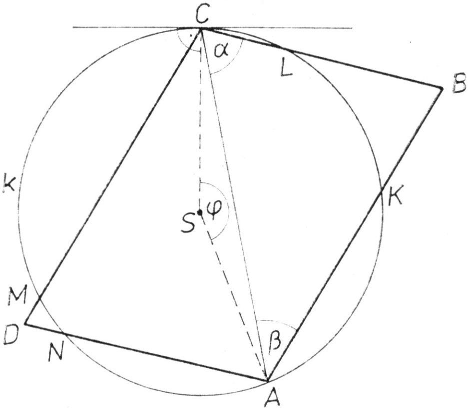
Řešení. Sečtením obou nerovností z předpokladu dostaneme $ac + pr \geqq b^2 + q^2$, jejich vynásobením a odmocněním dostaneme nerovnost $\sqrt{acpr} \geqq bq$. Pro nezáporná čísla u, v platí $u + v \geqq 2\sqrt{uv}$. Položíme-li $u = ar$, $v = cp$, máme $ar + cp \geqq 2\sqrt{arcp} \geqq 2bq$. Sečtením s první odvozenou nerovností dostaneme dokazovanou nerovnost. Rovnost bude platit právě tehdy, když bude platit $ac = b^2$, $pr = q^2$ a $ar = cp$. Z těchto rovností plyne $acpr = b^2q^2$, dosadíme-li za ar výraz cp, dostaneme $cp = bq = ar$, takže $a : b : c = p : q : r$ a $ac = b^2$. Platí-li obráceně tyto vztahy, platí rovnost

$$(a + p)(c + r) = (b + q)^2.$$

B - I - 4

Je dána kružnice k se středem S a na ní dva body A, C ($A \neq C$). Jaká je nutná a postačující podmínka pro velikost úhlu ASC, aby existoval rovnoběžník $ABCD$, jehož obvod má s kružnicí k šest společných bodů?

Řešení. Předpokládejme, že existuje rovnoběžník $ABCD$ splňující podmínku úlohy. Označme φ velikost konvexního



Obr. 9

úhlu ASC (obr. 9). Označení bodů B, D můžeme zvolit tak, aby body D a S ležely v téže polorovině s hraniční přímkou AC. Označme K, L, M, N ty vnitřní body stran AB, BC, CD, DA rovnoběžníku $ABCD$, které leží na kružnici k, dále označme $\alpha = |\sphericalangle NAC| = |\sphericalangle LCA|$, $\beta = |\sphericalangle KAC| = |\sphericalangle MCA|$. Přímka AC svírá s tečnou kružnice k v bodě C úhel $\frac{\varphi}{2}$, proto je $\alpha < \frac{\varphi}{2}$, $\beta < \frac{\varphi}{2}$. Také úhel ADC je menší než $\frac{\varphi}{2}$, protože bod D leží ve vnější oblasti kružnice k. Přitom je $|\sphericalangle ADC| = 180° - \alpha - \beta < \frac{\varphi}{2}$. Sečtením posledních tří nerovností dostaneme $120° < \varphi$. Je-li obráceně tato nerovnost splněna, můžeme zvolit α tak, aby $90° - \frac{\varphi}{4} < \alpha < \frac{\varphi}{2}$. Rovnoběžník $ABCD$, pro který je pak $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$, splňuje podmínky úlohy. Je pak totiž $|\sphericalangle ADC| = 180° - 2\alpha < \frac{\varphi}{2}$, takže jsou body D, B body vnější oblasti kružnice k.

B - I - 5

Najděte všechny uspořádané dvojice (p, q) prvočísel p, q, pro které platí $3p^2 + 6p = 2q^2 + 7q$.

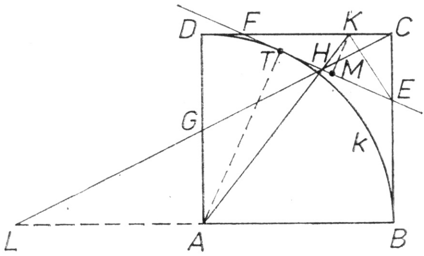
Řešení. Rovnici upravíme na tvar

$$3p(p + 2) = q(2q + 7).$$

Je vidět, že prvočíslo q dělí součin $3p(p + 2)$, takže musí dělit jedno z čísel 3, p, $p + 2$. Jestliže q dělí číslo 3, je nutně $q = 3$, jestliže dělí číslo p, rovná se číslu p. Snadno zjistíme, že $q = 3$ ani $q = p$ nevyhovuje. Musí tedy být $p + 2$ násobkem čísla q, položme $p + 2 = kq$, k přirozené číslo. Dosadíme-li do dané rovnice $p = kq - 2$, dostaneme $q(3k^2 - 2) = 6k + 7$. Jelikož je $q > 1$, je nutně $3k^2 - 2 < 6k + 7$, po úpravě $(k - 1)^2 < 4$. Přicházejí tedy v úvahu pouze hodnoty $k = 1, 2$. Vyhovuje však pouze $k = 1$, pro které je $q = 13$, $p = 11$. Dvojice (11, 13) je jediné řešení úlohy.

K danému čtverci $ABCD$ sestrojíme kružnici k se středem A a poloměrem $|AB|$. Na straně BC zvolíme bod E, na straně CD bod F tak, aby přímka EF byla tečnou kružnice k. Označme G střed úsečky AD, H průsečík přímek CG, EF a K průsečík přímek AH, CD. Dokažte, že přímka EK je osou úhlu CEF.

Řešení. Označme L průsečík přímek CG a AB (obr. 10), T bod dotyku přímky EF a kružnice k a M patu kolmice vedené bodem K k přímce EF. Protože bod G je středem



Obr. 10

úsečky AD, je $|AL| = |AB| = |AT|$. Trojúhelníky ALH a KCH jsou stejnolehlé, středem stejnolehlosti je bod H. V téže stejnolehlosti si odpovídají trojúhelníky ATH a KMH. Jelikož je $|AL| = |AT|$, je také $|KC| = |KM|$. Pak jsou ovšem trojúhelníky ECK a EMK shodné, neboť jsou pravoúhlé, mají společnou přeponu EK a stejně dlouhé odvěsny KH, KC. Shodují se proto i v úhlech proti těmto odvěsnám, tj. $|\sphericalangle KEM| = |\sphericalangle KEC|$, což jsme měli dokázat.

B - S - 1

Najděte všechna celá kladná čísla n, pro která je číslo $2^n - 1$ druhou mocninou celého kladného čísla.

Řešení. Je-li pro přirozená čísla n, m splněna rovnost $2^n - 1 = m^2$, musí být číslo m^2 a tudíž i číslo m liché. Položme $m = 2k - 1$, k přirozené. Pak je $2^n = 4k^2 - 4k + 2$. Pravá strana je dělitelná dvěma, není však dělitelná čtyřmi. Proto je nutně $n = 1$, je to jediné řešení úlohy.

B - S - 2

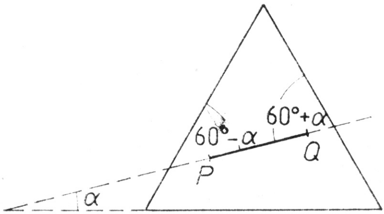
Je dáno n reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takových, že $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = 1$. Dokažte, že $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^7 = 1$.

Řešení. Jelikož se součet druhých mocnin daných čísel rovná jedné, rovná se každé z nich v absolutní hodnotě nejvýše jedné, tj. $|x_i| \leqq 1$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Pak je ovšem $x_i^3 \leqq |x_i^3| \leqq x_i^2$, přičemž $x_i^3 = x_i^2$ pouze tehdy, je-li $x_i = 0$ nebo $x_i = 1$. Podle předpokladu se součet třetích mocnin daných čísel rovná součtu jejich druhých mocnin, proto se každé z nich rovná nule nebo jedné. Jelikož se každý z těchto součtů rovná jedné, rovná se jedné právě jedno z daných čísel, ostatní se rovnají nule. Pak je ovšem roven jedné i součet jejich sedmých mocnin.

B - S - 3a

Uvnitř rovnostranného trojúhelníku leží úsečka PQ délky 10. Úsečku PQ promítneme kolmo na všechny tři strany trojúhelníku. Při jaké poloze úsečky PQ je součet délek všech tří průmětů největší?

Řešení. Svírá-li přímka PQ s některou stranou trojúhelníku úhel $\alpha \leqq 30°$, svírá s jednou další stranou úhel $60° - \alpha$ a s třetí stranou úhel $60° + \alpha$ (obr. 11). Součet délek všech



Obr. 11

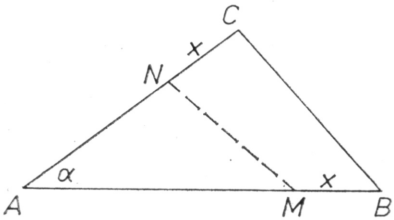
tří průmětů je $10[\cos \alpha + \cos(60° + \alpha) + \cos(60° - \alpha)] = 20 \cos \alpha$. Tento součet je největší při $\alpha = 0°$. Svírá-li přímka PQ s některou stranou trojúhelníku úhel větší než 30°, svírá s některou jinou stranou úhel menší než 30° a můžeme tento případ převést na předcházející. Je tedy součet délek všech tří průmětů největší, právě když je úsečka PQ rovnoběžná s některou stranou trojúhelníku.

B - S - 3b

Na stranách AB, AC trojúhelníku ABC jsou po řadě zvoleny body M, N tak, že $|MB| = |NC|$ a obsah trojúhelníku

AMN se rovná jedné polovině obsahu trojúhelníku ABC. Vyjádřete velikosti úseček AM, AN pomocí $b = |AC|$, $c = |AB|$. Zjistěte, kdy mají trojúhelníky AMC, BMC stejný obvod.

Řešení. Označme $|MB| = |NC| = x$, obr. 12. Obsah trojúhelníku ABC je $\frac{1}{2}\, bc \sin \alpha$, obsah trojúhelníku AMN



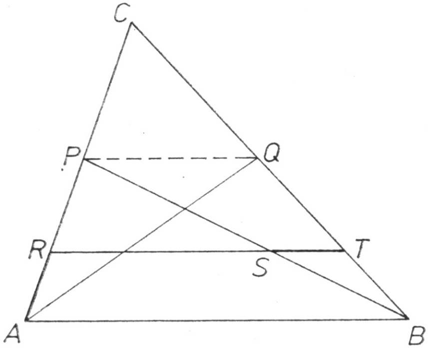
Obr. 12

je $\frac{1}{2}(b - x)(c - x) \sin \alpha$. Z podmínek úlohy plyne pro x rovnice $2(b - x)(c - x) = bc$. Protože musí být $x < b$, $x < c$, dostaneme $x = \frac{1}{2}(b + c - \sqrt{b^2 + c^2})$. Je pak $|AN| =$
$= \frac{1}{2}(b - c + \sqrt{b^2 + c^2})$, $|AM| = \frac{1}{2}(c - b + \sqrt{b^2 + c^2})$.
Obvody trojúhelníků AMC, BMC jsou právě tehdy stejné, když je $|AC| + |AM| = |BC| + |BM|$, tj. $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, tedy když je trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A.

B - II - 1

V trojúhelníku ABC určete na straně AC bod P tak, aby platilo: Jestliže přímka rovnoběžná se stranou AB protne úsečky AP, PB, BC po řadě v bodech R, S, T, je $|AR| = |ST|$.

Řešení. Nechť P splňuje podmínku úlohy a nechť R, S, T jsou průsečíky úseček AP, BP, BC s přímkou rovnoběžnou s přímkou AB. Označme Q průsečík úsečky BC a přímky vedené bodem P rovnoběžně s AB (obr. 13). Z podobnosti



Obr. 13

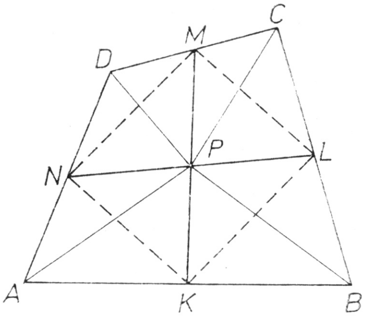
trojúhelníků ABP, RSP a z podobnosti trojúhelníků PBQ, SBT plyne $|AR| : |AP| = |BS| : |BP| = |ST| : |PQ|$. Z rovnosti $|AR| = |ST|$ plyne $|AP| = |PQ|$ a obráceně. Přitom je $|AP| = |PQ|$ právě tehdy, když je trojúhelník APQ rovnoramenný se základnou AQ. To nastane zase právě tehdy, když je $|\sphericalangle PAQ| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CAB|$. Bod P tedy určíme takto:

Osa úhlu CAB protne stranu BC v bodě Q, bodem Q vedeme rovnoběžku s přímkou AB, její průsečík se stranou AC je bod P, který splňuje podmínku úlohy.

B - II - 2

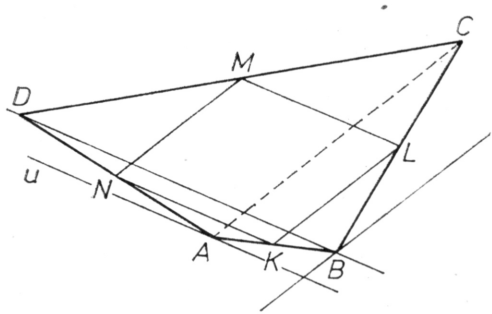
Spojnice středů protilehlých stran konvexního čtyřúhelníku rozdělí čtyřúhelník na čtyři čtyřúhelníky. Obsahy tří z nich jsou 8, 16, 20. Určete obsah čtvrtého.

Řešení. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník (obr. 14), K, L, M, N nechť jsou po řadě středy úseček AB, BC, CD, DA



Obr. 14

a P průsečík úhlopříček KM, LN rovnoběžníku $KLMN$. Trojúhelníky AKP a BKP mají stejný obsah, neboť K je střed úsečky AB. Totéž platí pro dvojice trojúhelníků BLP a CLP, CMP a DMP, DNP a ANP. Z toho plyne, že součet obsahů čtyřúhelníků $AKPN$, $CLPM$ se rovná součtu obsahů zbývajících dvou čtyřúhelníků $BKPL$ a $DMPN$. Každý z těchto dvou součtů se rovná $\frac{S}{2}$, kde S značí obsah celého čtyřúhelníku $ABCD$. Kromě toho je KL střední příčka trojúhelníku ABC, proto se obsah trojúhelníku KLB rovná jedné čtvrtině obsahu trojúhelníku ACB. Obdobně to platí pro trojúhelníky DMN a DCA a rovněž pro dvojice trojúhelníků AKN, ABD a CML, CDB. Jelikož se součet obsahů trojúhelníků KLB a DMN rovná $\frac{S}{4}$ a součet obsahů čtyřúhelníků $PKBL$ a $PMDN$ je roven $\frac{S}{2}$, rovná se obsah každého z trojúhelníků PKL a PMN a také trojúhelníků PNK a PLM hodnotě $\frac{S}{8}$. Na začátku řešení úlohy jsme si odvodili, že součet obsahů dvou protějších čtyřúhelníků se rovná součtu obsahů zbývajících dvou protějších čtyřúhelníků a každý z těchto součtů se rovná $\frac{S}{2}$. Jestliže obsahy tří z čtyřúhelníků jsou 8, 16 a 20, musí se obsah čtvrtého nutně rovnat 4 nebo 12 nebo 28, obsah S se pak v uvedených případech rovná 48 nebo 56 nebo 72. Kdyby se obsah třeba čtyřúhelníku $PKBL$ rovnal 4, byl by jeho obsah menší než obsah trojúhelníku PKL, který by se rovnal $\frac{S}{8} = 6$, což není možné. Stejně tak nevyhovuje hodnota 28, protože jeden z čtyřúhelníků by měl obsah 8 a $\frac{S}{8}$ by bylo 9. Má tedy daný čtyřúhelník obsah $S = 56$ a obsah čtvrtého čtyřúhelníku je 12. Ukážeme si ještě konstrukci takového čtyřúhelníku. Zvolíme k tomu libovolný rovnoběžník $KLMN$ o obsahu $\frac{S}{2} = 28$. V polorovině opačné k polorovině KNM vedeme s KN rovnoběžku u tak, aby pro každý její bod A (obr. 15) se obsah trojúhelníku AKN rovnal $8 - \frac{S}{8} = 1$.



Obr. 15

Stejně tak musí bod B ležet na rovnoběžce s přímkou KL tak, aby se obsah trojúhelníku BKL rovnal $12 - \frac{S}{8} = 5$. Protože K musí být středem úsečky AB, leží bod B také na přímce souměrně sdružené k přímce u podle bodu K. K bodům B, A již pak sestrojíme body C, D. Čtyřúhelník $ABCD$ má požadované vlastnosti.

B - II - 3a

Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ v radiánech měřené velikosti vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku a $n \geqq 4$, pak platí

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \geqq \frac{1}{2}(n-2)\pi^2.$$

Dokažte a určete, kdy platí znaménko rovnosti.

Řešení. Sečtením nerovností $(\alpha_i - \alpha_j)^2 \geqq 0$ pro $i > j$ dostaneme

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \geqq 2\sum_{i>j}^{n} \alpha_i\alpha_j,$$

tedy $n\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2$. Poslední nerovnost plyne též přímo z tzv. Cauchyovy nerovnosti. Pro součet vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku platí

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\pi,$$

tedy

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \geqq \frac{1}{n}(n-2)^2\pi^2.$$

Podle předpokladu je $n \geqq 4$, takže $\frac{1}{n}(n-2)^2 \geqq \frac{1}{2}(n-2)$, čímž je nerovnost úlohy dokázána. Rovnost nastane, právě když je $n = 4$ a všechny vnitřní úhly čtyřúhelníku jsou si rovny, tedy když je mnohoúhelník obdélník nebo čtverec.

B - II - 3b

Najděte všechna řešení rovnice $xyz = 3(x + y + z)$ v oboru celých kladných čísel. Řešení, která se liší jen pořadím, nepovažujeme za různá.

Řešení. Je-li trojice x, y, z řešením dané rovnice v oboru přirozených čísel, je aspoň jedno z čísel x, y, z dělitelné třemi; nechť je to například x, $x = 3k$, k přirozené číslo. Pro čísla k, y, z pak platí $kyz = 3k + y + z$, takže $k(yz - 3) = y + z$. Musí tedy být nutně $yz - 3 \leqq y + z$, tj. $(y - 1)(z - 1) \leqq 4$. Bez újmy obecnosti můžeme ještě předpokládat $y \leqq z$. Pro $y = 1$ je $k = 1 + \dfrac{4}{z - 3}$, takže jsou možnosti $z = 4$, $k = 5$, $x = 15$ nebo $z = 5$, $k = 3$, $x = 9$ nebo $z = 7$, $k = 2$, $x = 6$. Je-li $y = 2$, je $z \leqq 5$, $k = \dfrac{z + 2}{2z - 3}$, takže $z = 2$, $k = 4$, $x = 12$ nebo $z = 5$, $k = 1$, $x = 3$. Pro $y = 3$ je $z \leqq 3$, $k = \dfrac{z + 3}{3z - 3}$, tedy $z = 3$, $k = 1$, $x = 3$. Pro $y \geqq 4$ je $z \leqq 2$, což už nemusíme uvažovat.

Úloha má 6 řešení: (1, 4, 15), (1, 5, 9), (1, 6, 7), (2, 2, 12), (2, 3, 5) a (3, 3, 3).