36. ročník matematické olympiády na středních školách

28. ročník mezinárodní matematické olympiády

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Pavel Töpfer (editor): 36. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1986/87. 28. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. pp. 137–155.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404841

28. ročník mezinárodní matematické olympiády

Dvacátá osmá mezinárodní matematická olympiáda (MMO) se konala ve dnech 5.—16. července 1987 v hlavním městě Kuby - Havaně. Účast na ní byla rekordní - v soutěži byly zastoupeny 42 země: Alžírsko, Austrálie, Belgie, Brazílie, Bulharsko, Československo, ČLR, Finsko, Francie, Írán, Island, Itálie, Jugoslávie, Kanada, Kolumbie, Kuba, Kuvajt, Kypr, Lucembursko, Maďarsko, Maroko, Mexiko, Mongolsko, NDR, Nikaragua, Nizozemí, Norsko, NSR, Panama, Peru, Polsko, Rakousko, Rumunsko, Řecko, SSSR, Španělsko, Švédsko, Turecko, Uruguay, USA, Velká Británie a Vietnam. Kromě toho byli na 28. MMO přítomni dva pozorovatelé, a to z Irska a z Nového Zélandu.

Průběh 28. MMO odpovídal obvyklému standardu. Mezinárodní porota MMO složená z vedoucích jednotlivých delegací a předsedy, jímž byl prof. Miguel Jiménez Pozo z havanské univerzity, pracovala nejprve v přísné izolaci od soutěžících v Santa Maria del Mar, kde z návrhů zaslaných zúčastněnými zeměmi vybírala úlohy pro soutěž.

Porota se snažila především sestavit tematicky vyvážený soubor úloh, který by dostatečně prověřil znalosti a schopnosti soutěžících. I když se jí to vcelku podařilo, ukázaly konečné výsledky, že poněkud přecenila obtížnost soutěžních úloh.

Pro soutěž bylo vybráno těchto šest úloh z návrhů, jež zaslaly NSR (1 a 3), SSSR (2 a 6), Vietnam (4) a NDR (5).

1. Označme $p_n(k)$, $n \geqq 1$, $k \geqq 0$, počet permutací f množiny $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ takových, že rovnost $f(j) = j$ platí pro právě k hodnot $j \in S_n$. Dokažte, že

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k) = n!.$$

Poznámka. Permutací množiny S_n rozumíme vzájemě jednoznačné zobrazení množiny S_n na S_n.

2. Osa úhlu BAC ostroúhlého trojúhelníku ABC protíná stranu BC v bodě L a kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě N, $N \neq A$. Označme K, M paty kolmic spuštěných z bodu L na strany AB, resp. AC. Dokažte, že čtyřúhelník $AKNM$ a trojúhelník ABC mají týž obsah.

3. Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou reálná čísla taková, že

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Dokažte, že pro každé celé číslo $k > 1$ lze nalézt celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ taková, že

(i) $a_j \neq 0$ pro alespoň jedno j, $1 \leqq j \leqq n$,
(ii) $|a_j| \leqq k - 1$ pro všechna j, $1 \leqq j \leqq n$,
(iii) $|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n| \leqq \dfrac{k-1}{k^n - 1}\sqrt{n}$.

4. Dokažte, že neexistuje funkce f zobrazující množinu $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ všech nezáporných celých čísel do N_0 taková, že

$$f(f(n)) = n + 1\,987$$

pro každé $n \in N_0$.

5. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geqq 3$ lze v rovině nalézt n bodů tak, aby platilo:

(i) vzdálenost kterýchkoli dvou z nich je iracionální číslo;

(ii) kterékoli tři z nich určují trojúhelník, jehož obsah je kladné racionální číslo.

6. Nechť n je celé číslo, $n \geqq 2$. Dokažte: Jestliže $k^2 + k + n$ je prvočíslo pro každé k, $0 \leqq k \leqq \sqrt{n/3}$, potom je $k^2 + k + n$ prvočíslo pro každé k, $0 \leqq k \leqq n - 2$.

I když obtížnost úloh byla různá, bylo rozhodnuto, jak je v posledních letech na MMO zvykem, ocenit správné řešení každé úlohy sedmi body. Každý soutěžící mohl tedy získat maximálně 42 body; jak se pak ukázalo, 22 žákům se to skutečně podařilo.

Práce v mezinárodní porotě spojené s výběrem, formulací a překlady soutěžních úloh probíhaly bez větších problémů a byly v náležitém termínu ukončeny. Mezitím se již v Havaně shromáždili soutěžící. Ti byli po celou dobu MMO ubytováni v internátě Leninova institutu (Instituto Preuniversitario Vocacional en Ciencias Exactas V. I. Lenin) na okraji Havany. Zde také ve dnech 10. a 11. července proběhla vlastní soutěž včetně slavnostního zahájení (10. července dopoledne), jehož se zúčastnil mj. též kubánský ministr školství J. R. Fernández.

Mezinárodní porota, která 10. července odpoledne přesídlila do Havany, sem pak dojížděla k práci na opravě a koordinaci hodnocení žákovských řešení. Koordinace byla dobře připravena a proběhla poměrně rychle; uplatňovaná kritéria nebyla příliš přísná. Na závěrečném zasedání dne 13. července mohla tak porota již schválit definitivní výsledky soutěže a rozhodnout o rozdělení cen: na 28. MMO bylo uděleno 22 prvních cen (pouze za maximální bodový zisk - 42 bodů), 42 druhých cen (za výkony ohodnocené 32—41 body) a 56 třetích cen (za 18—31 bodů). Z celkového počtu 237 soutěžících tak bylo oceněno 120, tj. přibližně polovina (50,63 %). Speciální ceny nebyly tentokráte uděleny žádné. Celkové výsledky jednotlivých delegací jsou patrny z připojené tabulky 1.

Slavnostní zakončení 28. MMO se konalo dopoledne 15. července v sále budovy kubánských ozbrojených sil, opět za účasti kubánského ministra školství. Vystoupil zde také zástupce Austrálie prof. P. J. O'Halloran, který pozval všechny přítomné delegace na 29. MMO, která se má konat v červenci 1988 v Canbeře. Slavnost byla doplněna vystoupením skupiny populární hudby.

Vedle odborného programu měli soutěžící žáci dostatek příležitostí využít volných chvil jak k rekreaci a sportu (přímo v areálu institutu), tak i k seznámení se s pamětihodnostmi Havany. Dne 14. července se pak mohli zúčastnit hromadného autobusového výletu na Playa Girón.

Všichni účastníci 28. MMO se sešli dne 13. července na recepci, kterou pro ně uspořádal kubánský ministr školství J. R. Fernández.

Při stále rostoucím počtu účastníků je úkol organizovat MMO velmi náročný. Je třeba konstatovat, že se ho kubánští pořadatelé zhostili úspěšně a že se 28. MMO bezesporu řadí mezi zdařilé mezinárodní akce.

Československá účast na 28. MMO

Na 28. MMO vyslalo Československo delegaci ve složení:

vedoucí delegace:	*RNDr. František Zítek, CSc.*, MÚ ČSAV, Praha, předseda ÚV MO
zástupce vedoucího:	*RNDr. Tomáš Hecht*, CSc., MFF UK, Bratislava, člen PÚV MO
soutěžící žáci:	*Robert Babilon*, 4 M, GMK, Bílovec *Petr Čížek*, 2 M, GWP, Praha *Pavol Gvozdjak*, 2 M, GAM, Bratislava *Vladan Majerech*, 4 MF, G, Pardubice *Marcel Polakovič*, 4 M, GAM, Bratislava *Roman Soták*, 4 M, G, Košice

Dále byla na 28. MMO přítomna také RNDr. Júlia Lukátšová z ministerstva školství SSR jako pozorovatelka.

Účast delegace silně poznamenaly nepříjemné problémy s dopravou na Kubu. Namísto původně plánovaného společného odletu v sobotu 4. července cestovala naše delegace ve třech skupinách 4., 6. a 9. července. Tak se také stalo, že dva naši soutěžící, M. Polakovič a R. Soták, dorazili do Havany teprve v časných ranních hodinách v pátek 10. července, tedy v první soutěžní den. Je jenom přirozené, že se tato skutečnost nepříznivě projevila na jejich výkonu v soutěži.

Výsledky našich žáků na 28. MMO jsou shrnuty v tabulce 2. Jak je z ní vidět, měli největší potíže se šestou úlohou, kterou nikdo z nich správně nevyřešil. Šestá úloha byla také skutečně nejtěžší úlohou 28. MMO a úspěch při jejím řešení rozhodoval o umístění na předních pozicích.

I přes zmíněné dopravní komplikace a neúspěch u šesté úlohy je celkový výsledek československé reprezentace na 28. MMO pozitivní. Všichni naši žáci získali ceny a v neoficiálním pořadí družstev podle součtu bodů jsme zaujali deváté místo.

Tabulka 5

Celkové výsledky 28. MMO

Země	Počet				
	žáků	bodů	I. cen	II. cen	III. cen
Alžírsko	6	29	0	0	0
Austrálie	6	143	0	3	0
Belgie	6	74	0	0	1
Brazílie	6	116	1	0	2
Bulharsko	6	210	1	3	2
Československo	6	192	0	4	2
ČLR	6	200	2	2	2
Finsko	6	69	0	0	2
Francie	6	154	0	3	2

Tabulka 5 - pokračování

Země	Počet žáků	Počet bodů	I. cen	II. cen	III. cen
Írán	6	70	0	0	1
Island	4	45	0	0	0
Itálie	4	35	0	0	1
Jugoslávie	6	132	0	1	3
Kanada	6	139	1	1	1
Kolumbie	6	68	0	0	1
Kuba	6	83	0	0	2
Kuvajt	6	28	0	0	0
Kypr	6	42	0	0	0
Lucembursko	1	27	0	0	1
Maďarsko	6	218	0	5	1
Maroko	6	88	0	0	3
Mexiko	5	17	0	0	0
Mongolsko	6	67	0	0	0
NDR	6	231	2	3	1
Nikaragua	6	13	0	0	0
Nizozemí	6	146	0	1	4
Norsko	6	69	0	0	0
NSR	6	248	4	2	0
Panama	6	7	0	0	0
Peru	6	41	0	0	0
Polsko	3	55	0	0	2
Rakousko	6	150	0	2	3
Rumunsko	6	250	5	1	0
Řecko	6	111	0	0	4
SSSR	6	235	3	3	0
Španělsko	6	91	0	0	3
Švédsko	6	134	0	2	2
Turecko	6	94	0	0	2
Uruguay	4	27	0	0	0
USA	6	220	2	3	1
Velká Británie	6	182	1	2	2
Vietnam	6	172	0	1	5
(42)	237		22	42	56 (120)

Tabulka 6

Výsledky čs. žáků na 28. MMO

Jméno	Počet bodů							Cena
	za úlohu						celkem	
	1	2	3	4	5	6		
Babilon	7	3	7	7	7	1	32	II.
Čížek	7	7	7	7	7	0	35	II.
Gvozdjak	7	7	7	7	7	3	38	II.
Majerech	7	7	7	7	7	2	37	II.
Polakovič	7	0	0	7	7	0	21	III.
Soták	7	3	0	7	7	5	29	III.
Celkem	42	27	28	42	42	11	192	

Řešení úloh 28. MMO

1. Všech permutací f množiny S_n je $n!$, v každé z nich je určitý počet k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) prvků j, pro něž platí

$$f(j) = j, \tag{1}$$

odtud plyne rovnost

$$\sum_{k=0}^{n} p_n(k) = n!. \tag{2}$$

Z n-prvkové množiny S_n lze k prvků vybrat právě $\binom{n}{k}$ způsoby; platí-li pro těchto k vybraných prvků (1) a pro ostatní $n - k$ pak $f(j) \neq j$, dostaneme permutaci f započtenou v $p_n(k)$. Máme tak rovnost

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p_{n-k}(0) \tag{3}$$

platnou pro všechna $n \geqq 1$, $k \geqq 0$.

Jestliže je $k > 0$, pak

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1},$$

takže vidíme, že v důsledku (3) a (2) je

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = \sum_{k=1}^{n} kp_n(k) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p_{n-k}(0) =$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p_{n-k}(0) = n \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1}(k) = n(n-1)! = n!,$$

což jsme měli dokázat.

Poznámka. Rovnost

$$kp_n(k) = np_{n-1}(k-1) \tag{4}$$

se dá odvodit i bez použití (3) přímou kombinatorickou úvahou:

Vybereme si některou z $p_n(k)$ permutací f s právě k prvky j splňujícími (1) a potom si z těchto k prvků zvlášť vyznačíme jeden (což lze učinit k způsoby); celkem máme $k.p_n(k)$ možností volby. Ke stejnému výsledku však dospějeme, jestliže nejprve vybereme jeden prvek j_0 z množiny S_n (tento výběr lze provést n způsoby) a potom určíme permutaci f tak, že položíme $f(j_0) = j_0$, kdežto pro ostatních $n - 1$ prvků $j \in S_n$ definujeme f tak, aby právě $k - 1$ z nich splňovalo (1). Takovýchto permutací množiny $S_n / \{j_0\}$ je ovšem $p_{n-1}(k-1)$, celkem tedy máme $np_{n-1}(k-1)$ možností. Tím je rovnost (4) dokázána.

Jiné řešení úlohy 1 využívá známého vzorce

$$p_n(0) = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Máme pak podle (3)

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}(n-k)! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} =$$

$$= n! \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{k+i-1}{i} \frac{1}{(k+i-1)!} =$$

$$= n! \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!} \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \binom{l}{i} = n!.$$

2. Poněvadž trojúhelník ABC je ostroúhlý, leží střed S kružnice jemu opsané uvnitř něho. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $|AB| \geqq |AC|$, takže také $|\sphericalangle BAS| \leqq |\sphericalangle CAS|$, a tedy

$$|\sphericalangle BAS| = |\sphericalangle BAL| - |\sphericalangle SAL|$$

a

$$|\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle BAL| + |\sphericalangle SAL|.$$

Poněvadž $KL \perp AB$ a $KM \perp AL$ a $|KL| = |LM|$, je $|\sphericalangle MKL| = |\sphericalangle BAL|$ a obsah trojúhelníku ABC se dá vyjádřit ve tvaru

$$|KL| \frac{|AB| + |AC|}{2}.$$

Poněvadž $KM \perp AN$, je obsah čtyřúhelníku $AKNM$ roven $\frac{1}{2} |AN| . |KM|$. Platí

$$|KL| \left(\frac{1}{2} |AB| + \frac{1}{2} |AC|\right) =$$

$$= |KL| . |AS| (\cos |\sphericalangle BAS| + \cos |\sphericalangle CAS|) =$$

$$= |AS| . |KL| \, 2 \cos |\sphericalangle BAL| . \cos |\sphericalangle SAL| =$$

$$= |AN| . |KL| \cos |\sphericalangle MKL| = \frac{1}{2} |AN| . |KM|;$$

trojúhelník ABC a čtyřúhelník $AKNM$ mají tedy skutečně týž obsah.

Jiné řešení druhé úlohy využívá Ptolemaiovy věty, podle níž v *tětivovém* čtyřúhelníku $ABNC$ platí

$$(1) \qquad |AB| . |CN| + |AC| . |BN| = |AN| . |BC| .$$

Z rovnosti $|\sphericalangle BAN| = |\sphericalangle CAN|$ plyne $|BN| = |CN|$, ale také $|\sphericalangle CBN| = |\sphericalangle BAN|$. V rovnoramenném trojúhelníku BCN tedy platí

$$|BC| = 2 . |BN| . \cos |\sphericalangle BAN| .$$

Dosazením do (1) dostáváme

$$|AB| + |AC| = 2 \, |AN| \cos |\sphericalangle BAN|$$

a odtud pro obsah S_1 trojúhelníku ABC

$$S_1 = \frac{1}{2}(|AB| + |AC|).|AL| \sin |\sphericalangle BAN| =$$

$$= |AL|.|AN| \sin |\sphericalangle BAN|.\cos |\sphericalangle BAN|.$$

Obdobně pro obsah S_2 čtyřúhelníku $AKNM$ je

$$S_2 = \frac{1}{2}(|AK| + |AM|)|AN| \sin |\sphericalangle BAN| =$$

$$= |AL| \cos |\sphericalangle BAN|.|AN| \sin |\sphericalangle BAN|;$$

oba obsahy jsou si tedy rovny.

3. Je zřejmé, že úlohu stačí vyřešit pro případ nezáporných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, neboť při záporném x_j platí

$$\sum_{m=1}^{n} a_m x_m = \sum_{m=1}^{j-1} a_m x_m + (-a_j)|x_j| + \sum_{m=j+1}^{n} a_m x_m.$$

V dalším tedy předpokládáme $x_m \geqq 0$ pro všechna $m = 1, 2, \ldots, n$.

Pro každou n-tici *nezáporných* celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vyhovující podmínkám (i) a (ii) platí

$$0 \leqq \sum_{m=1}^{n} a_m x_m \leqq (k-1)\sum_{m=1}^{n} x_m.$$

Počet všech takovýchto n-tic je $k^n - 1$, proto nutně existují dvě z nich - označme je $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ a $a''_1, a''_2, \ldots, a''_n$ - tak, že

$$0 < \left| \sum_{m=1}^{n} a'_m x_m - \sum_{m=1}^{n} a''_m x_m \right| \leqq \frac{k-1}{k^n - 1} \sum_{m=1}^{n} x_m .$$

Položíme-li pak $a^*_m = a'_m - a''_m$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$, bude n-tice celých čísel $a^*_1, a^*_2, \ldots, a^*_n$ vyhovovat podmínkám (i), (ii) i (iii), neboť podle Cauchyovy nerovnosti je

$$\sum_{m=1}^{n} x_m \leqq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{m=1}^{n} x_m^2} = \sqrt{n}.$$

4. Předpokládejme, že taková funkce f existuje; z tohoto předpokladu odvodíme spor.

Pro funkci f zřejmě platí

$$(1) \qquad f(x + 1\,987) = f(f(f(x))) = f(x) + 1\,987,$$

odtud dále indukcí snadno dokážeme platnost rovnosti

$$(2) \qquad f(x + k . 1\,987) = f(x) + k . 1\,987$$

pro všechna $x \in \mathsf{N}_0$, $k \in \mathsf{N}_0$. Funkce f je tedy jednoznačně určena svými hodnotami na množině $\mathsf{M} = \{0, 1, 2, \ldots, 1\,986\}$.

Na množině M definujeme novou funkci g takto: pro $x \in \mathsf{M}$ vyjádříme $f(x)$ ve tvaru

$$(3) \qquad f(x) = y + p . 1\,987,$$

kde $y \in \mathsf{M}$, $p \in \mathsf{N}_0$, a pak položíme $g(x) = y$.

Poněvadž podle (2) je

$$x + 1\,987 = f(f(x)) = f(y + p \,.\, 1\,987) = f(y) + p \,.\, 1\,987,$$

je nutně

$$f(y) = x + (1 - p) \,.\, 1\,987 \in \mathsf{N}_0, \tag{4}$$

tzn. že v (3) je vždy $0 \leqq p \leqq 1$. Ze (4) pak vyplývá $g(y) = x$; je tedy g involuce na M:

$$g(g(x)) = x$$

pro každé $x \in \mathsf{M}$.

Poněvadž počet prvků množiny M je lichý, totiž 1 987, musí existovat $x_0 \in \mathsf{M}$, pro které je $g(x_0) = x_0$. To však podle definice funkce g znamená, že je buď $f(x_0) = x_0$, anebo $f(x_0) = x_0 + 1\,987$. V prvém případě je pak

$$x_0 + 1\,987 = f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0,$$

ve druhém případě je

$$x_0 + 1\,987 = f(f(x_0)) = f(x_0 + 1\,987) = x_0 + 3\,974.$$

V obou případech jsme dospěli ke sporu - funkce f požadovaných vlastností tedy nemůže existovat.

5. V rovině zavedeme kartézskou soustavu souřadnic a pro dané přirozené číslo $n \geqq 3$ v ní vezmeme body $B_1, B_2, \ldots, B_n$ o souřadnicích

$$B_j = [j, j^2],\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Potom je vzdálenost dvou bodů B_j, B_k $(1 \leqq j < k \leqq n)$ rovna

$$\sqrt{(k-j)^2 + (k^2 - j^2)^2} = (k-j)\sqrt{(k+j)^2 + 1}.$$

Poněvadž $k + j \geqq 3$, je $(k + j + 1)^2 > (k + j)^2 + 1 > (k + j)^2$, takže číslo $\sqrt{(k+j)^2 + 1}$ je nutně iracionální (odmocnina z přirozeného čísla je buď celé číslo, anebo iracionální).

Obsah S trojúhelníku s vrcholy B_j, B_k, B_m $(1 \leqq j < k < m \leqq n)$ lze vyjádřit známým vzorcem

$$S = \frac{1}{2}\,|\triangle|,$$

kde

$$\triangle = \begin{vmatrix} j & j^2 & 1 \\ k & k^2 & 1 \\ m & m^2 & 1 \end{vmatrix},$$

což je jistě racionální číslo.

Množina bodů B_1, B_2, ..., B_n tedy vyhovuje podmínkám úlohy.

Poznámka. Racionalita obsahu trojúhelníku s vrcholy v bodech s celočíselnými souřadnicemi vyplývá rovněž ze známé Pickovy formule.

6. Nechť n je libovolné avšak pevně dané přirozené číslo; pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ pak položme

(1) $$f(k) = k^2 + k + n.$$

Označme m nejmenší nezáporné celé číslo takové, že $f(m)$ není prvočíslo. Poněvadž $f(0) = n$, je $m = 0$, není-li n samo prvočíslo. Poněvadž $f(n - 1) = n^2$, což není nikdy prvočíslo, je zřejmě $m \leqq n - 1$. Máme nyní dokázat, že není možné, aby platilo

$$\sqrt{\frac{n}{3}} \leqq m \leqq n - 2. \tag{2}$$

Pro $n = 1$ je toto tvrzení zřejmé, neboť pak

$$n - 2 = -1 < 0 = m.$$

Při $n \geqq 2$ je $f(m)$ nutně číslo složené; označíme p nejmenší prvočinitel čísla $f(m)$, takže $f(m) = pq$, kde q je celé číslo, $q \geqq p$.

Z definice (1) vyplývá, že

$$f(k) \equiv f(k + rp) \pmod{p} \tag{3}$$

pro každé celé nezáporné r, k.

Dokážeme si nejprve, že nemůže být $p \leqq m$. Měli bychom totiž

$$0 \leqq m - p \leqq m - 2 < m$$

a podle definice čísla m by $f(m - p)$ bylo prvočíslo. Podle (3) však zároveň

$$f(m - p) \equiv f(m) \equiv 0 \pmod{p},$$

což je možné jen tehdy, jestliže $f(m - p) = p$. Avšak potom by bylo

$$m \geqq p = f(m - p) = (m - p)^2 + (m - p) + n \geqq n,$$

což není možné.

Předpokládejme tedy, že platí $m < p \leqq 2m$. Potom je $0 \leqq p - m - 1 \leqq m - 1$ a podle definice čísla m je $f(p - m - 1)$ prvočíslo. Zároveň je

$$pq = f(m) = f(p - m - 1) + (2m - p + 1)p,$$

takže prvočíslo $f(p - m - 1)$ je dělitelné prvočíslem p, což znamená, že $f(p - m - 1) = p$. Je tedy

$$p = (p - m - 1)^2 + p - m - 1 + n,$$

takže

$$m = (n - 1) + (p - m - 1)^2 \geqq n - 1$$

a (2) neplatí. Je dokonce $m = n - 1$ a $p = n$.

Zbývá ještě vyšetřit případ, kdy $2m < p$. Zde však máme

$$m^2 + m + n = f(m) = pq \geqq p^2 \geqq (2m - 1)^2 =$$

$$= 4m^2 + 4m + 1,$$

a tedy

$$n \geqq 3m^2 + 3m + 1 > 3m^2,$$

takže (2) opět neplatí.

Ukázali jsme tedy, že (2) neplatí v žádném případě, a to pro kterékoli přirozené n.

Poznámka. Z elementární číselné teorie je znám mnohočlen

$$x^2 + x + 41,$$

který pro $x = 0, 1, \ldots, 39$ nabývá vesměs prvočíselných hodnot. Podobných mnohočlenů existuje zřejmě více; naše úloha naznačuje, že při vhodně zvoleném p (např. $p = 17, 41, 107, \ldots$) nabývá mnohočlen $x^2 + x + p$ prvočíselné hodnoty až pro $p - 1$ po sobě jdoucích celých hodnot x ($x = 0, 1, \ldots, p - 2$).