36. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategorie Z8

In: Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 36. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1986/87. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. pp. 32–65.

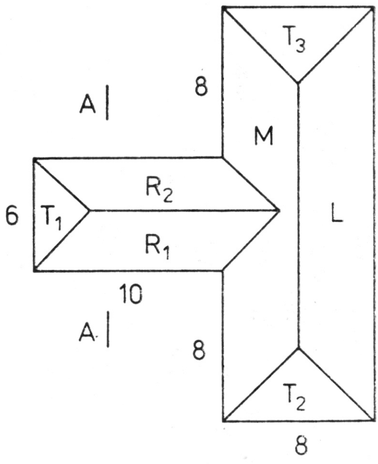
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404853

Kategorie Z8

ÚLOHY I. KOLA

Z8 - I - 1

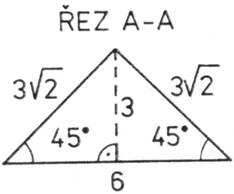
Na obrázku 1 je zobrazen půdorys střechy, rozměry jsou uvedeny v metrech. Všechny střešní plochy mají týž spád,



Obr. 1

přičemž nižší hřeben je 3 metry vysoko nad rovinou okapů. Vypočítejte celkový povrch střechy.

1. řešení. Sestrojíme řez nižší části střechy rovinou kolmou k hřebenu, obr. 2. Dostaneme rovnoramenný trojúhelník se základnou dlouhou 6 m a výškou 3 m. Proto mají všechny střechy sklon 45°. Odtud snadno zjistíme, že trojúhelník T_1 a rovnoběžníky R_1 a R_2 (obr. 1) mají ve skutečnosti výšky $v = 3 . \sqrt{2}$. Podobně zjistíme, že trojúhelníky T_2, T_3 a lichoběžník L mají ve skutečnosti výšky $w = 4 . \sqrt{2}$.



Obr. 2

Rovnoběžníky R_1 a R_2 mají stejné obsahy S_1:

$$S_1 = 10 . 3 . \sqrt{2} = 30 . \sqrt{2}$$

Součet obsahů trojúhelníku T_1 a mnohoúhelníku M se rovná obsahu S_2 lichoběžníku L. Lichoběžník L má delší základnu dlouhou 22 m (2 . 8 m + 6 m), kratší základnu - - hřeben - dlouhou 14 m (22 m − 2 . 4 m) a výšku $w = 4 . \sqrt{2}$.

Proto je

$$S_2 = \frac{22 + 14}{2} . 4 . \sqrt{2} = 72 \sqrt{2}.$$

Konečně trojúhelníky T_2, T_3 mají také stejné obsahy

$$S_3 = \frac{8}{2} . 4 . \sqrt{2} = 16 . \sqrt{2}.$$

Obsah celé střechy je roven

$$S = 2 . S_1 + 2 . S_2 + 2 . S_3$$

$$\underline{S = 60 . \sqrt{2} + 144 . \sqrt{2} + 32 . \sqrt{2} = 236 . \sqrt{2} \doteq 333}$$

$$S = 333 \text{ m}^2.$$

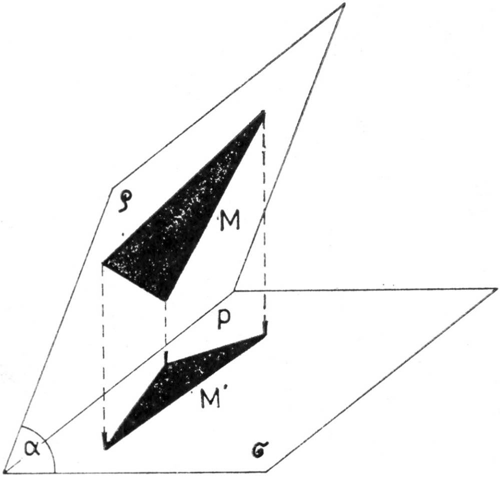
Obsah střechy je roven 333 m^2.

2. řešení. Stejně jako v 1. řešení se ukáže, že sklon všech střech je roven 45°. Nyní použijeme větu:

Nechť obrazec M leží v rovině ϱ a M' je jeho pravoúhlý průmět do roviny σ, která svírá s rovinou ϱ úhel α. (Obr. 3, kde obrazec M je trojúhelník.) Potom obsah S' obrazce M' můžeme vypočítat z obsahu S obrazce M podle vzorce

$$S' = S . \cos \alpha.$$

Tuto větu snadno sami dokážete nejdříve pro trojúhelníky,



Obr. 3

které mají jednu stranu rovnoběžnou s průsečnicí p rovin ϱ a σ. Odtud pak snadno plyne důkaz pro libovolný mnohoúhelník.

Podle této věty platí pro obsah střechy S a obsah jejího půdorysu S' vzorec

$$S' = S \,.\, \cos 45^\circ$$

neboli

$$S = \frac{S'}{\cos 45^\circ} = S' \,.\, \sqrt{2}.$$

Obsah půdorysu S' je roven

$$S' = 6.10 + 8.22 = 236,$$

takže

$$S = 236 . \sqrt{2} \doteq 333.$$

Dostáváme stejný výsledek jako při 1. řešení.

Z8 - I - 2

Dokažte nerovnost

$$\frac{1}{201} + \frac{1}{202} + \ldots + \frac{1}{300} > \frac{1}{3}.$$

Řešení. Na levé straně nerovnosti je 100 zlomků. Každý, kromě posledního, je větší než $\frac{1}{300}$. (Odůvodněte sami.) Proto je

$$\frac{1}{201} + \frac{1}{202} + \ldots + \frac{1}{300} > \underbrace{\frac{1}{300} + \frac{1}{300} + \ldots + \frac{1}{300}}_{100\text{krát}} =$$

$$= \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$$

Poznámka k úloze Z - I - 2. Na levé straně nerovnosti je část tzv. harmonické řady, tj. řady

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} +$$

$$+ \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots$$

Je překvapující, že tato řada má nekonečný součet, i když přičítáme stále menší a menší číslo. K důkazu se použije podobný postup jako při řešení úlohy Z8 - I - 2.

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}}_{> 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \dots$$

Tedy součet této řady je větší než součet

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

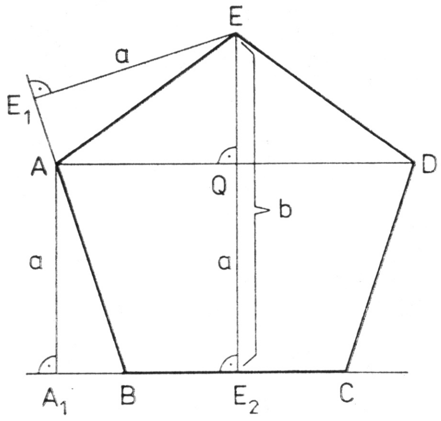
Sčítanců je nekonečně mnoho a tedy i jejich součet je nekonečný.

Z8 - I - 3

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Označme a, b vzdálenosti vrcholu E od přímek AB a BC. Určete vzdálenost bodu E od úhlopříčky AD pomocí a, b.

Řešení. Všimneme si obrázku 4. Protože jde o pravidelný pětiúhelník, je úhlopříčka AD kolmá k přímce EE_2. Ze stejných důvodů je vzdálenost bodu E od přímky AB stejná jako vzdálenost bodu A od přímky BC, tedy $|AA_1| = a$. Protože AA_1E_2Q je obdélník, je $|QE_2| = a$. Odtud dostáváme:

$$v(E, AD) = |EQ| = b - a$$



Obr. 4

Z8 - I - 4

Určete nejmenší a největší čtyřciferné číslo s těmito vlastnostmi:

a) číslo je dělitelné jedenácti,

b) rozdíl tohoto čísla a jeho ciferného součtu je dělitelný číslem 17.

Řešení. Nejdříve najdeme nejmenší a největší čtyřciferné číslo, které je dělitelné jedenácti.

$$1\,000 = 11.90 + 10$$
$$1\,001 = 11.91 \qquad \text{(nejmenší)}$$
$$9\,999 = 11.909 \qquad \text{(největší)}$$

Sestavíme tabulku násobků čísla 11 a budeme počítat požadované rozdíly a dělit je číslem 17.

Číslo (násobek 11)	Ciferný součet	Rozdíl
1 001	2	999 = 17. 58 + 13
1 012	4	1 008 = 17. 59 + 5
1 023	6	1 017 = 17. 59 + 14
1 034	8	1 026 = 17. 60 + 6
1 045	10	1 035 = 17. 60 + 15
1 056	12	1 044 = 17. 61 + 7
1 067	14	1 053 = 17. 61 + 16
1 078	16	1 062 = 17. 62 + 8
$\boxed{1\,089}$	18	1 071 = 17. 63
9 999	36	9 963 = 17. 586 + 1
9 988	34	9 963 = 17. 585 + 9
$\boxed{9\,977}$	32	9 945 = 17. 585

Hledaná čísla jsou 1 089 a 9 977.

Z8 - I - 5

V rovnici

$$\frac{x+b}{a+b} + \frac{x-b}{a-b} = \frac{x+b}{a^2+2ab+b^2} - \frac{x-b}{a^2-b^2} + \frac{2x}{a}$$

s neznámou x a reálnými čísly a, b

a) udejte podmínky řešitelnosti,
b) najděte reálný kořen,
c) proveďte zkoušku.

Řešení. a) Aby měla rovnice smysl, musejí být všechny jmenovatele různé od nuly.

(1) $$a + b \neq 0$$

(2) $$a - b \neq 0$$

(3) $$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \neq 0$$

(4) $$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \neq 0$$

(5) $$a \neq 0$$

Tedy $a \neq 0$. Z podmínek (1) a (2) plyne $b \neq \pm a$. Za těchto podmínek jsou splněny i nerovnosti (3) a (4).

b) Nyní budeme rovnici řešit. Abychom z rovnice odstranili zlomky, násobíme celou rovnici součinem výrazů $(a + b)^2 . (a - b)a$ (tj. společným jmenovatelem). Po vykrácení zlomků dostaneme:

$$(x + b)(a + b)(a - b).a + (x - b)(a + b)^2.a =$$

$$= (x + b)(a - b).a - (x - b)(a + b).a +$$

$$+ 2x(a + b)^2(a - b)$$

Nejdříve upravíme levou stranu:

$$L = x(a^3 - ab^2) + (a^3b - b^3) + x(a^3 + 2a^2b + ab^2) -$$

$$- (a^3b + 2a^2b^2 + ab^3) =$$

$$= x(2a^3 + 2a^2b) - (b^3 + 2a^2b^2 + ab^3)$$

Pak upravíme pravou stranu:

$$P = x(a^2 - ab) + (a^2b - ab^2) - x(a^2b - ab^2) +$$

$$+ 2x(a^3 + 2a^2b + ab^2 - a^2b - 2ab^2 - b^3) =$$

$$= x(2a^3 + a^2b - ab^2 - 2b^3 + a^2 - ab) + (a^2b - ab^2)$$

Dostaneme rovnici

$$x(2a^3 + 3a^2b) - (b^3 + 2a^2b^2 + ab^2) =$$

$$= x(2a^3 + a^2b - ab^2 - 2b^3 + a^2 - ab) + (a^2b - ab^2).$$

Nyní členy s neznámou x převedeme na levou stranu a ostatní členy na pravou stranu rovnice. Po zjednodušení dostaneme

$$(6) \qquad 2xb(a + ab + b^2) = 2ab(a + ab + b^2);$$

pokud je

$$(7) \qquad b \neq 0,$$

$$(8) \qquad a + ab + b^2 \neq 0,$$

můžeme celou rovnici dělit součinem

$$2b(a + ab + b^2)$$

a dostaneme kořen

$$x = a.$$

Nyní si všimneme vyloučených případů (7) a (8).

Je-li $b = 0$ nebo $a + ab + b^2 = 0$, dostaneme po dosazení do rovnice (6)

$$x \,.\, 0 = 0.$$

Kořen této rovnice je libovolné reálné číslo.

Můžeme tedy shrnout:

a) Podmínkou řešitelnosti je splnění nerovností

$$a \neq 0 \quad \text{a} \quad b \neq \pm a.$$

b) Je-li $b \neq 0$ a $a + ab + b^2 \neq 0$, má rovnice jediný reálný kořen

$$x = a.$$

Je-li $b = 0$ nebo $a + ab + b^2 = 0$, je kořenem rovnice každé reálné číslo.

c) Provedeme zkoušku. Nejdříve pro případ $b \neq 0$ a $a +$

$+ ab + b^2 \neq 0$. Kořen $x = a$ dosadíme do levé a pravé strany rovnice:

$$L = \frac{a+b}{a+b} + \frac{a-b}{a-b} = 1 + 1 = 2$$

$$P = \frac{a+b}{a^2 + 2ab + b^2} - \frac{a-b}{a^2 - b^2} + \frac{2a}{a} =$$

$$= \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+b} + 2 = 2$$

Tedy skutečně $L = P$.

Zkouška pro případ $b = 0$. (Od žáků se v tomto případě zkouška nepožadovala.) Dosadíme do levé i pravé rovnice; x je libovolné číslo.

$$L = \frac{x}{a} + \frac{x}{a} = \frac{2x}{a}$$

$$P = \frac{x}{a^2} - \frac{x}{a^2} + \frac{2x}{a} = \frac{2x}{a}$$

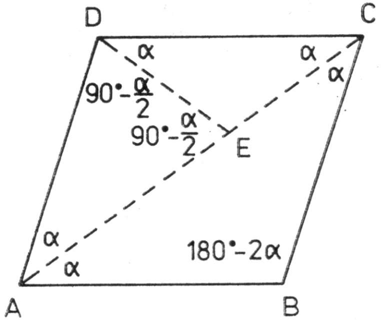
Tedy $L = P$.

Zkoušku pro případ $a + ab + b^2 = 0$ provádět nebudeme. Také v tomto případě se zkouška od soutěžících nepožadovala. Zkoušku je možné provést, ale výpočet je složitý. Z rovnosti $a + ab + b^2 = 0$ se vypočítá $a = \frac{-b^2}{1+b}$. Za toto a se dosadí do původní rovnice. Vzniknou dosti složité složené zlomky. Jejich úpravou se dá zjistit, že levá strana rovnice se pro všechna x rovná pravé straně rovnice.

Z8 - I - 6

Existuje rovnoběžník, který se dá složit ze tří nepřekrývajících se rovnoramenných trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné? Pokud ano, ukažte jeden takový.

Řešení. Budeme předpokládat, že takový rovnoběžník *ABCD* existuje. Zkusíme, zda se dá složit z trojúhelníků *ABC*, *AED* a *DEC* (obr. 5).



Obr. 5

V trojúhelníku *ABC* označíme velikosti úhlů při základně *AC* písmenem α. Vypočítáme velikost úhlu při vrcholu *B*.

$$|\sphericalangle ABC| = 180° - 2\alpha$$

Úhly BCA a CAD jsou střídavé úhly, proto je

$$|\sphericalangle\, CAD| = \alpha.$$

Podobně i úhly BAC a ACD jsou střídavé, takže také

$$|\sphericalangle\, ACD| = \alpha.$$

V trojúhelníku AED známe velikost úhlu při hlavním vrcholu A. Můžeme vypočítat velikosti vnitřních úhlů při základně DE.

$$|\sphericalangle\, AED| = |\sphericalangle\, EDA| = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

V trojúhelníku DEC známe velikost úhlu při vrcholu C. Je to úhel při základně, proto i druhý úhel při základně je roven

$$|\sphericalangle\, CDE| = \alpha.$$

V rovnoběžníku je vždy součet velikostí dvou sousedních úhlů roven 180°, proto je např.

$$|\sphericalangle\, BAD| + |\sphericalangle\, ADC| = 180°.$$

Podle obr. 5 je však také

$$|\sphericalangle\, BAD| + |\sphericalangle\, ADC| = 2\alpha + \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) + \alpha = \frac{5}{2}\alpha + 90°.$$

Porovnáním dostaneme rovnici

$$180^\circ = \frac{5}{2}\alpha + 90^\circ.$$

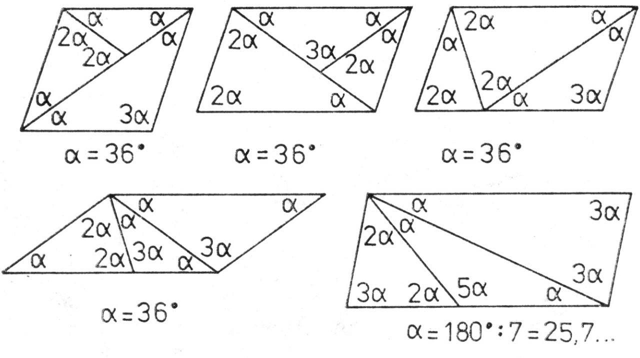
Jejím kořenem je

$$\alpha = 36^\circ.$$

Tím jsme aspoň jeden takový rovnoběžník sestrojili. Je to kosočtverec s jedním vnitřním úhlem velikosti $2\alpha = 72^\circ$.

Úloha však má i další řešení, viz obr. 6a – e; z nich obrázek

a) b) c)



d) e)

Obr. 6a — e

6a udává právě nalezené řešení. Z uvedených pěti řešení je nejzajímavější řešení z obr. 6e. Ukazuje, že existuje rovnoběžník, který lze složit ze tří nepřekrývajících se rovnoramenných trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné, ale dokonce ani podobné.

Zobecnění úlohy Z8 - I - 6. Řešení úlohy z obr. 6d, e naznačují, že úlohu je možno zobecnit takto:

Nechť n je libovolné přirozené číslo větší než 2. Ukažte, že existují rovnoběžníky, které lze složit z n rovnoramenných nepřekrývajících se trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné (podobné).

ÚLOHY II. KOLA

Z8 - II - 1

Najděte aspoň jedno přirozené číslo n, pro které platí:

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{301} + \frac{1}{302} + \ldots + \frac{1}{n} > \frac{2}{5} \tag{1}$$

(5 bodů)

Řešení. Pro zjednodušení označíme $n = 300 + m$. Potom nerovnosti (1) můžeme přepsat takto:

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{301} + \frac{1}{302} + \ldots + \frac{1}{300 + m} > \frac{2}{5}$$

Výraz

$$V = \frac{1}{301} + \frac{1}{302} + \ldots + \frac{1}{300 + m}$$

je součtem m sčítanců, z nichž každý, s výjimkou posledního, je větší než $\dfrac{1}{300 + m}$. Zároveň je každý z těchto sčítanců (bez výjimky) menší než $\dfrac{1}{300}$. Tedy

$$\frac{m}{300} > V > \frac{m}{300 + m}.$$

Nyní najdeme přirozené číslo m tak, aby

$$\frac{2}{3} \geqq \frac{m}{300} \quad \text{a} \quad \frac{m}{300 + m} \geqq \frac{2}{5}.$$

V obou nerovnostech rozšíříme známé zlomky číslem 100, takže dostaneme

$$\frac{200}{300} \geqq \frac{m}{300} \quad \text{a} \quad \frac{m}{300 + m} \geqq \frac{200}{500}.$$

Z toho je vidět, že stačí volit m tak, aby

$$200 \geqq m \quad \text{a} \quad m \geqq 200.$$

Tomu vyhovuje číslo $m = 200$ a hledané přirozené číslo n je proto

$$n = 300 + m = 500.$$

Poznámka. Číslo $n = 500$ není jediné, které vyhovuje nerovnostem (1). Můžeme provést přesnější odhady. Například nejdříve odhadneme součet

$$a = \frac{1}{301} + \frac{1}{302} + \ldots + \frac{1}{400}.$$

Pro každý z těchto sčítanců platí, že je větší nebo roven $\frac{1}{400}$ a menší než $\frac{1}{300}$. Proto je

$$\frac{1}{3} = \frac{100}{300} > a > \frac{100}{400} = \frac{1}{4}.$$

Můžeme tedy hledat n tak, aby platilo

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} > \frac{1}{401} + \frac{1}{402} + \ldots + \frac{1}{n} > \frac{2}{5} - \frac{1}{4}$$

neboli

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{401} + \frac{1}{402} + \ldots + \frac{1}{n} > \frac{3}{20}.$$

Snadno sami stejným způsobem odhadnete, že tyto nerovnosti platí pro všechna n splňující nerovnosti

$$533 \geqq n \geqq 471.$$

Z8 - II - 2

Najděte nejmenší šesticiferné číslo s navzájem různými číslicemi, které má tyto dvě vlastnosti:

– je dělitelné číslem 72,
– v jeho desetinném zápise se nevyskytují číslice 0, 8, 9.

(5 bodů)

Řešení. Číslo $72 = 9 \,.\, 8$. Proto je hledané číslo dělitelné oběma čísly 9 a 8. V hledaném čísle se mohou vyskytnout jen číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Protože hledáme šesticiferné číslo, musíme jednu číslici vynechat. Hledané číslo má být dělitelné devíti, takže musí mít ciferný součet také dělitelný devíti. Protože

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28,$$

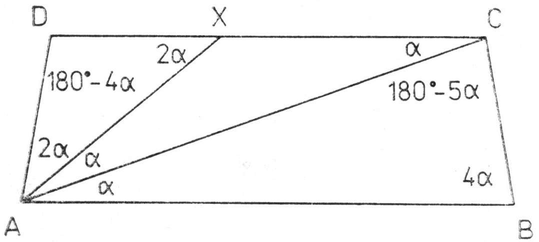
musíme vynechat číslici 1. Hledané číslo má být co nejmenší a musí být sudé (jinak by nemohlo být dělitelné osmi). Takové číslo je 234 576. Protože je toto číslo dělitelné osmi, je to hledané číslo.

Z8 - II - 3

Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB délky 10 cm, jestliže víte, že je možno jej rozdělit dvěma přímkami procházejícími bodem A na tři rovnoramenné trojúhelníky, z nichž jeden je trojúhelník ABC.

(5 bodů)

Řešení. Načrtneme si hledaný lichoběžník a zvolíme označení podle obr. 7.



Obr. 7

V žádném rovnoramenném trojúhelníku nemůže být při základně vnitřní úhel tupý. Proto musí být v trojúhelníku AXD hlavní vrchol bod D a v rovnoramenném trojúhelníku ACX hlavní vrchol bod X. Úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku ACX označme α. Úhly DCA a CAB jsou střídavé, proto je úhel CAB roven také α. Podobně jsou střídavé úhly DXA a XAB. Protože je úhel $XAB = 2\alpha$, je i úhel $DXA = 2\alpha$. Trojúhelník AXD má základnu AX a tedy i úhel $DAX = 2\alpha$. Třetí úhel ADX trojúhelníku AXD je roven $180° - 4\alpha$. V rovnoramenném lichoběžníku jsou úhly při základnách shodné, proto je

$$|\sphericalangle ABC| = 4\alpha; \ |\sphericalangle DCB| = 180° - 4\alpha.$$

Odtud dostaneme, že

$$|\sphericalangle ACB| = (180° - 4\alpha) - \alpha = 180° - 5\alpha.$$

Trojúhelník ABC je rovnoramenný. Mohou nastat dvě možnosti:

$$\text{(a)} \qquad \alpha = 180° - 5\alpha$$
$$\text{(b)} \qquad 4\alpha = 180° - 5\alpha$$

V případě (a) dostaneme:

$$6\alpha = 180°$$
$$\alpha = 30°$$

Z toho však plyne, že $|\sphericalangle ABC| = 4\alpha = 120°$. Ale to není možné, protože strana AB je v lichoběžníku $ABCD$ delší základnou a proto musí být úhel $ABC < 90°$.

V případě (b) dostaneme

$$9\alpha = 180°$$
$$\underline{\alpha = 20°}$$

Lichoběžník $ABCD$ má tedy při delší základně vnitřní úhly $4\alpha = 80°$ a při kratší základně vnitřní úhly $180° - 4\alpha = 100°$.

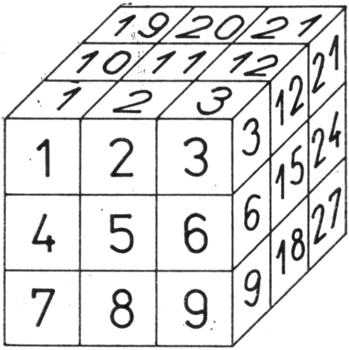
Konstrukce lichoběžníku $ABCD$

1. AB; $|AB| = 10$ cm
2. $\triangle ABC$; (*usu*); $|\sphericalangle CAB| = 20°$, $|\sphericalangle ABC| = 80°$ (úhly sestrojíme pomocí úhloměru)
3. $\triangle ACD$; (*usu*); $|\sphericalangle DAC| = 60°$, $|\sphericalangle DCA| = 20°$, D je v polorovině opačné k polorovině ACB
4. $ABCD$; lichoběžník

Zkouška. (V soutěži nebyla požadována.) Musíme ukázat, že lichoběžník $ABCD$ lze opravdu rozdělit na 3 rovnoramenné trojúhelníky. Sestrojíme bod X na základně CD tak, aby $|\sphericalangle XAB| = 40°$. Výpočtem velikostí úhlů se snadno ověří, že všechny tři trojúhelníky ABC, ACX, AXD jsou rovnoramenné.

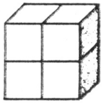
Z8 - II - 4

Na obrázku 8 je znázorněna krychle slepená ze 27 menších shodných krychlí. Zjistěte, jaké různé počty menších krychlí můžeme odebrat z velké krychle, aby zůstalo těleso, ve kterém se každá menší krychle dotýká právě dvěma svými stěnami s jinými menšími krychlemi. Pro každý možný počet stačí uvést jeden příklad. Úloha má 7 řešení. (5 bodů)

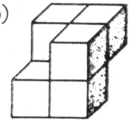


Obr. 8

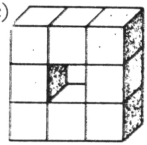
Řešení. Těleso, které zůstane, může se skládat ze 4, 6, 8,

a) 

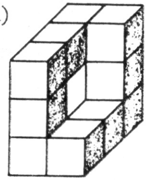
1 * 2 * 5 * 4

b) 

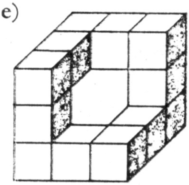
2 * 5 * 4 *
* 13 * 10 * 11

c) 

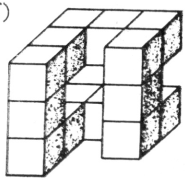
1 * 2 * 3 * 6 *
* 9 * 8 * 7 * 4

d) 

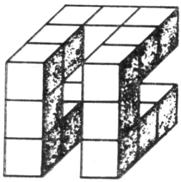
1 * 4 * 7 * 8 *
* 17 * 26 *
* 23 * 20 *
* 19 * 10

e) 

1 * 4 * 7 * 8 * 9 * 18 * 27 * 24 *
* 21 * 20 * 19 * 10

f) 

1 * 4 * 7 * 16 * 25 * 26 * 27 * 18 *
* 15 * 12 * 21 * 20 * 19 * 10

g) 

1 * 4 * 7 * 16 * 25 * 26 * 27 * 18 *
* 9 * 6 * 3 * 12 * 21 * 20 * 19 * 10

Obr. 9a — g

10, 12, 14, 16 krychlí. Odebrat můžeme tedy 23, 21, 19, 17, 15, 13 nebo 11 krychlí.

Ukázky řešení jsou na obr. 9a až g; čísla u obrázků udávají čísla zbylých krychlí.

ÚLOHY III. KOLA

Z8 - III - 1

Najděte všechna 8ciferná čísla dělitelná číslem 72, která vzniknou z čísla 40 756 424 832 vyškrtnutím tří číslic. Napište tato čísla. (6 bodů)

1. řešení. Protože $72 = 8 . 9$, musí být hledané číslo dělitelné jak číslem 8, tak číslem 9. Začneme s dělitelností číslem 9. Ciferný součet daného čísla je

$$4 + 0 + 7 + 5 + 6 + 4 + 2 + 4 + 8 + 3 + 2 = 45.$$

Hledané číslo má být dělitelné devíti, proto i jeho ciferný součet musí být dělitelný devíti. Z daného čísla proto musíme škrtnout takové tři číslice, aby i jejich ciferný součet byl dělitelný devíti, tedy tři číslice, jejichž ciferný součet je 9 nebo 18.

Vypíšeme všechny možnosti (viz tabulku na str. 56).

Škrtnuté číslice		Zůstalo číslo	Vyhovuje ANO - NE
1	0, 7, 2	4– –56 4–4 832	ANO
2	0, 7, 2	4– –56 424 83–	NE - není dělitelné 8
3	0, 6, 3	4– 75– 424 8–2	NE - není dělitelné 8
4	4, 0, 5	– – 7–6 424 832	ANO
5	0, 5, 4	4– 7–6 –24 832	ANO
6	0, 5, 4	4– 7–6 42– 832	ANO
7	5, 2, 2	40 7–6 4–4 83–	NE - není dělitelné 8
8	4, 2, 3	–0 756 4–4 8–2	NE - není dělitelné 8 a není 8ciferné
9	4, 2, 3	40 756 – –4 8–2	NE - není dělitelné 8
10	2, 4, 3	40 756 4– – 8–2	NE - není dělitelné 8
11	4, 3, 2	–0 756 424 8– –	NE - není 8ciferné
12	4, 3, 2	40 756 –24 8– –	ANO
13	4, 3, 2	40 756 42– 8– –	NE - není dělitelné 8
14	7, 8, 3	40 –56 424 – –2	NE - není dělitelné 8
15	4, 6, 8	–0 75– 424 –32	NE - není 8ciferné
16	6, 4, 8	40 75– –24 –32	ANO
17	6, 4, 8	40 75– 42– –32	ANO
18	7, 5, 6	40 – – – 424 832	ANO

Našli jsme celkem 8 čísel:

45 644 832	47 624 832	40 756 248	40 754 232
76 424 832	47 642 832	40 752 432	40 424 832

2. řešení. Nejdříve škrtneme takové tři číslice, aby vzniklé číslo bylo dělitelné osmi. Musí být tedy poslední trojčíslí (číslo určené posledními třemi číslicemi) dělitelné osmi. Protože škrtáme pouze 3 číslice, mohou být poslední trojčíslí vybrána z posledních šesti číslic, jsou to

832, 432, 448, 248, 232, 424.

Sestavíme opět tabulku. Škrtat budeme opět 3 číslice s ciferným součtem dělitelným devíti.

	Poslední trojčíslí	Škrtnuté číslice	Zbylé číslo	Vyhovuje ANO - NE
1	832	0, 7, 2	4– –56 4–4 **832**	ANO
2		4, 0, 5	– – 7–6 424 **832**	ANO
3		0, 5, 4	4– 7–6 –24 **832**	ANO
4		0, 5, 4	4– 7–6 42– **832**	ANO
5		7, 5, 6	40 – – – 424 **832**	ANO
6	432	4, 6, 8	–0 75– 424 –**32**	NE
7		6, 4, 8	40 75– –24 –**32**	ANO
8	448	nelze		
9	248	4, 3, 2	–0 756 **424 8**– –	NE
10		4, 3, 2	40 756 –**24 8**– –	ANO
11	232	6, 4, 8	40 75– 42– –**32**	ANO
12	424	nelze		

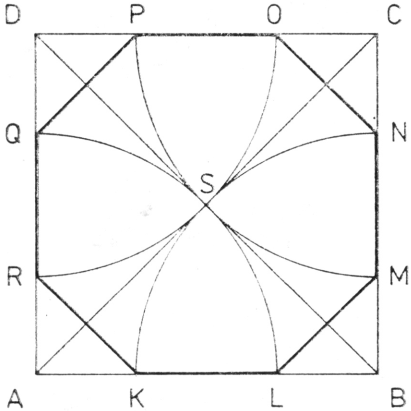
Dostáváme opět 8 možností, uvedených již při 1. řešení.

Z8 - III - 2

Je dán čtverec *ABCD* o straně délky 1 dm. Průsečík jeho úhlopříček označte *S*. Sestrojte čtyři kružnice se středy

A, B, C, D o poloměrech AS. Tyto kružnice protnou strany čtverce v osmi bodech. Dokažte, že jsou to vrcholy pravidelného osmiúhelníku (má shodné strany a shodné vnitřní úhly).

(6 bodů)



Obr. 10

Řešení. Načrtneme si obrázek 10 a označíme vrcholy osmiúhelníku. Úhlopříčka AC čtverce $ABCD$ má délku $|AC| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Proto je $|AS| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Snadno vypočítáme

$$|AK| = |AB| - |BK| = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Podobně je $|BL| = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Proto je

$$|KL| = |AB| - |AK| - |BL| = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) =$$
$$= \sqrt{2} - 1.$$

Délku RK vypočítáme podle Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníku AKR.

$$|RK| = \sqrt{|AK|^2 + |AR|^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2}$$

Odtud dostaneme

$$|RK| = \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right).\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1.$$

Je tedy skutečně $|RK| = |KL|$. Sestrojený osmiúhelník má proto všechny strany shodné. Ale má i všechny vnitřní úhly shodné, neboť mají velikost rovnou $180° - 45° = 135°$.

Z8 - III - 3

Pepík se chlubil: »Když budu mít 9 závaží o hmotnostech 1 g, 2 g, 3 g, ..., 9 g, dokážu je rozdělit na 3 skupiny o stejných hmotnostech«.

Jirka: »To nic není, já umím rozdělit na takové 3 skupiny i 33 závaží o hmotnostech od 1 g do 33 g«.

Karel: »Já umím rozdělit těch 33 závaží na 4 skupiny o stejných hmotnostech«.

Zjistěte, kdo z nich mohl svůj slib splnit. Jestliže rozdělení jde provést, uveďte příklad, když ne, uveďte proč.

(6 bodů)

Řešení. a) Pepík mohl závaží rozdělit například takto:

1. skupina: 1, 2, 3, 4, 5
2. skupina: 6, 9
3. skupina: 7, 8

V každé skupině je součet hmotností 15 g, neboť

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 6 + 9 = 7 + 8 = 15.$$

Rozdělení je možno provést i jinak; například: (4, 5, 6), (1, 2, 3, 9), (7, 8). Sami najdete jistě snadno i další možnosti.

b) Jirka může rozdělení také provést. Využije dělení, které provede Pepík. Skupiny dále doplní například takto:

1. skupina: (10, 33), (13, 30), (16, 27), (19, 24)
2. skupina: (11, 32), (14, 29), (17, 26), (20, 23)
3. skupina: (12, 31), (15, 28), (18, 25), (21, 22)

Jirka tedy rozdělí závaží od 10 g do 33 g na 12 dvojic tak, aby v každé dvojici byl součet hmotností závaží roven 43 g. Těchto 12 dvojic pak rozdělí do 3 skupin po čtyřech dvojicích. Všech 33 závaží rozdělí tedy do 3 skupin o celkových hmotnostech 187 g ($15 + 4 . 43 = 187$).

Hmotnost všech 33 závaží je tedy $3 . 187$ g $= 561$ g.

Poznámka. Celkovou hmotnost všech 33 závaží z úlohy Z8 - III - 3 je možno vypočítat také takto:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 30 + 31 + 32 + 33 =$$

$$= \underbrace{(1 + 33) + (2 + 32) + (3 + 31) + \ldots + (16 + 18)}_{16\text{krát } 34} + 17 =$$

$$= 16 \,.\, 34 + 17 = 561$$

Zkuste sami stejným způsobem vypočítat celkovou hmotnost závaží a) od 1 g do 99 g; b) od 1 g do 100 g.

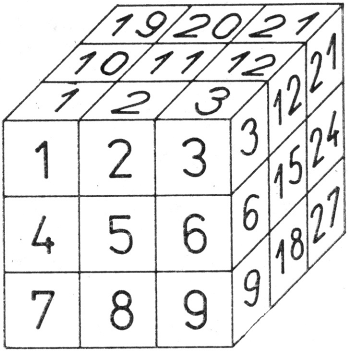
c) Karel nemůže 33 závaží od 1 g do 33 g v žádném případě rozdělit na 4 skupiny o stejných hmotnostech, protože celková hmotnost těchto závaží je 561 g a to není číslo dělitelné čtyřmi.

Z8 - III - 4

Ukažte, že z krychle *K* složené ze 27 menších krychlí (obr. 11) je možno ubrat 1 krychli, 2 krychle, 3 krychle, ..., 14 krychlí tak, že vzniklá tělesa mají stejný povrch s krychlí *K*. Pro každou ze 14 možností stačí uvést čísla krychlí, které uberete. (6 bodů)

Poznámka 1. Těleso, které zůstane, se nesmí rozpadnou na dvě nebo více částí. Nemůžeme tedy například odebrat krychle 1, 2, 4, 5, 7, 8, 12, 21, 15, 24, 18, 27.

Řešení. Všechny možnosti dostaneme například postupným odebíráním krychlí



Obr. 11

3, 2, 6, 5, 12, 11, 15, 14

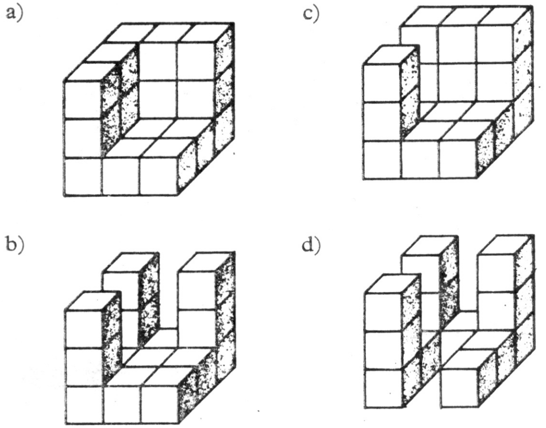
a dále krychlí:

10, 13, 20, 23, 8, 17.

Na obrázcích 12a až 12d jsou znázorněna zbylá tělesa po odebrání krychlí:

3, 2, 6, 5, 12, 11, 15, 14 (obr. 12a)
3, 2, 6, 5, 12, 11, 15, 14, 10, 13 (obr. 12b)
3, 2, 6, 5, 12, 11, 15, 14, 10, 13, 20, 23 (obr. 12c)
3, 2, 6, 5, 12, 11, 15, 14, 10, 13, 20, 23, 8, 17 (obr. 12d)

Poznámka 2. Původní krychle má povrch složený ze 6 . 9 = 54 stěn menších krychlí. Všechna zbylá tělesa se stejným povrchem byla složena nejméně ze 13 menších krychlí. Pokusy se dá ověřit, že nelze najít těleso se stejným povrchem, ale složené jen ze 12 nebo dokonce méně krychlí. Můžeme to však i dokázat.



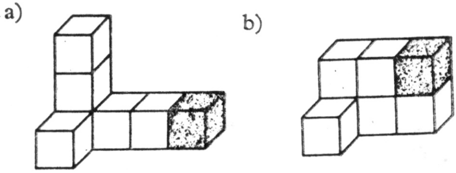
Obr. 12a — d

Nejdříve dokážeme větu:

Když je těleso slepeno z n shodných krychlí, pak je slepeno aspoň podél $n - 1$ společných dvojic stěn.

Pro konkrétní n, např. $n = 13$, můžete větu ověřit pomocí tělesa z obrázku 12d.

Nyní naznačíme důkaz věty pro libovolné n. Předpokládejme, že těleso je slepeno z n krychlí a počet slepených dvojic stěn označíme s. Odebereme-li 1 krychli, ubude aspoň 1 dvojice slepených stěn. Pro $n = 7$ si to ověřte na obr. 13a, b; odebíráme tmavou krychli. Tedy těleso z $n - 1$ krychlí má slepeno nejvýše $s - 1$ dvojic stěn. Tedy odebráním 1 krychle ubude aspoň 1 dvojice slepených stěn. Podobně se dá ukázat, že odebráním 2 krychlí ubudou aspoň 2 dvojice slepených stěn; odebráním 3 krychlí ubudou aspoň 3 dvojice slepených stěn atd.



Obr. 13a, b

Po odebrání $n - 1$ krychlí zbude jediná krychle. Přitom bude aspoň $s - (n - 1)$ dvojic slepených stěn. Ale protože zbyla jediná krychle, nezůstala žádná dvojice slepených stěn. Tedy

$$s - (n - 1) = 0,$$

neboli

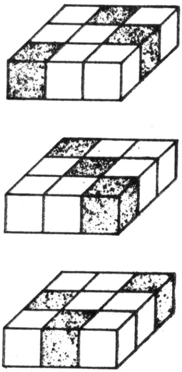
$$s = n - 1.$$

Konkrétně, máme-li slepeno 12 krychlí, je slepeno aspoň 11 dvojic stěn. Spočítejme nyní povrch tohoto tělesa:

$$S = \underbrace{12 \,.\, 6}_{\substack{\text{12 krychlí} \\ \text{po 6 stěnách}}} - \underbrace{11 \,.\, 2}_{\substack{\text{11 dvojic} \\ \text{slepených stěn}}} = 72 - 22 = 54$$

anebo méně (je-li slepeno více než 11 dvojic stěn). Ale toto těleso má menší povrch než původní krychle.

Poznámka 3. Někteří soutěžící úlohu řešili tak, že odebírali z původní krychle menší krychle až do počtu 18, takže zbylo jen 9 krychlí. V tomto případě však nevznikne jedno těleso, ale skupina těles, jejichž povrch však je skutečně stejný s původní krychlí. Například skupina devíti krychlí s čísly 1, 6, 9, 12, 14, 16, 20, 22, 27; jejich rozmístění ve třech vodorovných vrstvách je na obr. 14 vyznačeno tmavými krychlemi



Obr. 14

Počet krychlí už není možno zmenšit. Odůvodněte sami.