36. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategorie Z7

In: Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 36. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1986/87. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. pp. 66–85.

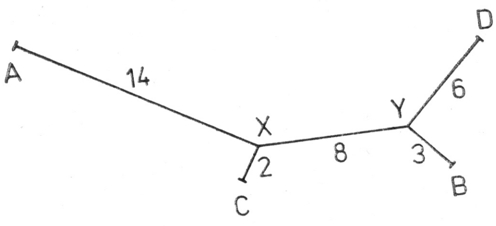
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404854

Kategorie Z7

ÚLOHY I. KOLA

Z7 - I - 1

Přátelé Kouba a Mácha jsou řidiči tramvají. Kouba jezdí na trati č. 1 vedoucí z A do B, Mácha na trati č. 2 spojující C a D. Čísla na plánu (obr. 15) udávají vzdálenosti v kilometrech. Tramvaje jezdí rychlostí 60 km za hodinu. Řidiči mají na každé konečné zastávce 5 minut na odpočinek. Přesně ve 12 hodin vyjel Kouba z konečné A a Mácha z konečné C. Kolikrát se v době od 12 do 19 hodin potkají na úseku XY? Udejte přesné časy a místa jejich setkání.



Obr. 15

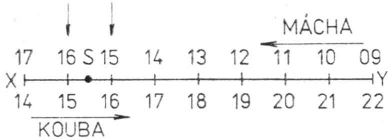
1. řešení. Jsou dva druhy setkání. Při prvním jede Kouba z X do Y a zároveň Mácha z Y do X. Ve druhém případě jede Kouba z Y do X a Mácha naopak z X do Y.

Rychlost jízdy obou linek je 1 km za minutu. Kouba jede jedním i druhým směrem 25 minut. Protože na každé konečné čeká 5 minut, situace na jeho trati se opakuje po 60 minutách. Mácha jede jedním i druhým směrem 16 minut. Započítáme-li přestávky, zjistíme, že situace na jeho trati se opakuje po 42 minutách.

Sestavíme tabulky pro 1. druh setkání.

Mácha z Y do X			Kouba z X do Y	
Y	X		X	Y
12.27	12.35	1. setkání	12.14	12.22
13.09	13.17	↔	13.14	13.22
13.51	13.59		14.14	14.22
14.33	14.41	2. setkání		
15.15	15.23	↔	15.14	15.22
15.57	16.05		16.14	16.22
16.39	16.47	3. setkání		
17.21	17.29	↔	17.14	17.22
18.03	18.11		18.14	18.22
18.45	18.53			

V prvním případě dojde ke 3 setkáním. Přesný čas a místo setkání najdeme například pomocí časové osy; pro 1. setkání viz obr. 16. Čísla udávají kolikátou minutu po 14. hodině projížděli řidiči příslušným místem. Řidiči se setkali ve



Obr. 16

13.15:30 (13 h 15 min 30 s) uprostřed mezi body s označením 15, 16 v místě S vzdáleném od X 1,5 km.

Údaje o dalších dvou setkáních dává tabulka:

Čas setkání	13.15:30	15.18:30	17.21:30
Vzdálenost SX	1,5	4,5	7,5

Stejně řešíme úlohu o setkání ve 2. případě.

Mácha z X do Y			Kouba z Y do X	
X	Y		Y	X
12.02	12.10		12.33	12.41
12.44	12.52	1. setkání		
13.26	13.34		13.33	13.41
14.08	14.16		14.33	14.41
14.50	14.58	2. setkání		
15.32	15.40		15.33	15.41
16.14	16.22		16.33	16.41
16.56	17.04	3. setkání		
17.38	17.46		17.33	17.41
18.20	18.28		18.33	18.41

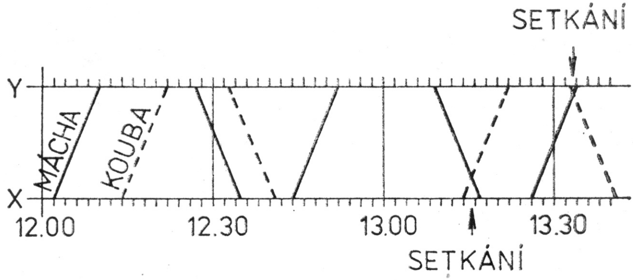
Přesný čas a polohu místa setkání S udává následující tabulka.

Čas setkání	12.33:30	15.36:30	17.33:30
Vzdálenost SX	7,5	4,5	1,5

Tím jsme řešili úlohy, kdy se řidiči setkají při jízdách opačnými směry. Může však nastat ještě další případ. Řidiči se setkají v místě X a společně pokračují do Y nebo se setkají v místě Y a společně pokračují do X.

V 1. případě je to v časovém intervalu 16.14 až 16.22, ve 2. případě v intervalu 14.33 až 14.41.

2. řešení. Úlohu můžeme řešit také pomocí grafu, ve kterém vyznačíme pohyb obou tramvají v úseku mezi X a Y. Část grafu je na obr. 17. Mácha je vyznačen plnou čarou, Kouba čárkovanou čarou.



Obr. 17

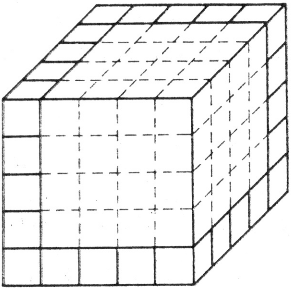
Z7 - I - 2

Krychle o hraně 15 cm byla sestavena ze 62 menších krychlí dvou různých velikostí. Najděte taková dvě sestavení, která se liší nejen způsobem sestavení, ale i velikostmi menších krychlí. Načrtněte názorný obrázek složené krychle.

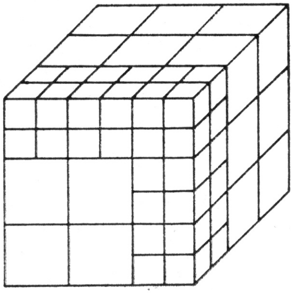
Řešení. *První způsob.* Danou krychli sestavíme nejdříve z většího počtu krychlí menší velikosti. Z nich pak některé slepíme ve větší krychle.

Krychli sestavíme ze 125 menších krychlí. Z nich pak 64 slepíme v jednu krychli (obr. 18a). Celkový počet krychlí tedy bude

$$125 - 64 + 1 = 62$$



a)



b)

Obr. 18a, b

Druhý způsob. Danou krychli sestavíme nejdříve z menšího počtu krychlí větší velikosti. Z nich pak některé rozdělíme na ještě menší krychle.

Krychli sestavíme ze 27 krychlí. Z nich vezmeme 5 a každou rozdělíme na 8 menších krychlí (obr. 18b). Celkový počet krychlí je

$$27 - 5 + 5 . 8 = 62.$$

Z7 - I - 3

Číslo na poznávací značce automobilu nazveme šťastným číslem, jestliže ciferný součet prvních dvou číslic se rovná cifernému součtu druhých dvou číslic. Zjistěte, kolik je šťastných čísel na poznávacích značkách začínajících písmeny *ABZ*.

Řešení. Čísla rozdělíme do skupin podle ciferného součtu prvních dvou číslic. Tento součet může být číslo od 1 do 18. (Součet nemůže být nula, neboť číslo ABZ - 00 00 neexistuje.) Nejdříve určíme počty dvojciferných čísel s ciferným součtem $u = 1, 2, 3, \ldots, 18$.

Ciferný součet	Čísla	Počet čísel
1	01 10	2
2	02 11 20	3
3	03 12 21 30	4
4	04 13 22 31 40	5
5	05 14 23 32 41 50	6
...	....	...
8	08 17 26 atd. 80	9
9	09 18 27 atd. 90	10
10	19 28 37 atd. 91	9
11	29 38 47 atd. 92	8
...	....	...
17	89 98	2
18	99	1

Nyní najdeme počet šťastných čísel. Všimneme si nejdříve například šťastných čísel, která mají ciferný součet prvních dvou číslic roven 1, 2 a 3. Čísla sestavíme do přehledných tabulek (řádky udávají 1. dvojici číslic, sloupec 2. dvojici číslic).

	01	10
01	01–01	01–10
10	10–01	10–10

	02	11	20
02	02–02	02–11	02–20
11	11–02	11–11	11–20
20	20–02	20–11	20–20

	03	12	21	30
03	03–03	03–12	03–21	03–30
12	12–03	12–12	12–21	12–30
21	21–03	21–12	21–21	21–30
30	30–03	30–12	30–21	30–30

Počty šťastných čísel jsou v těchto případech po řadě rovny 2^2, 3^2, 4^2. Tak to zřejmě pokračuje i dále.

Hledaný počet šťastných čísel je tedy roven

$$S = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 9^2 +$$

$$+ 8^2 + \ldots + 1^2.$$

Tedy šťastných čísel je

$$S = 669.$$

Poznámka. Potřebujeme-li sečíst více po sobě jdoucích 2. mocnin přirozených čísel, můžeme použít vzorce, který zde uvedeme bez důkazu

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\, n(n + 1)\,(2n + 1).$$

Například pro $n = 7$ platí

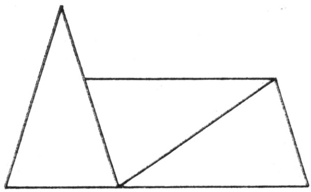
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = \frac{1}{6}7 \,.\, 8 \,.\, 15$$

Ověřte správnost této rovnosti sami.

Z7 - I - 4

— Co děláš?

— Skládám ze tří shodných rovnoramenných trojúhelníků pětiúhelníky. Zatím jich mám šest. Jeden vypadá například takto (obr. 19):



Obr. 19

— A jak jsou dlouhé strany těch trojúhelníků?

— To ti nepovím. Ale řeknu ti, že z těch šesti pětiúhelníků mají dva obvod 19 cm a čtyři 23 cm. To by ti mělo stačit. Ale prozradím ti ještě, že délky stran trojúhelníků jsou celá čísla.

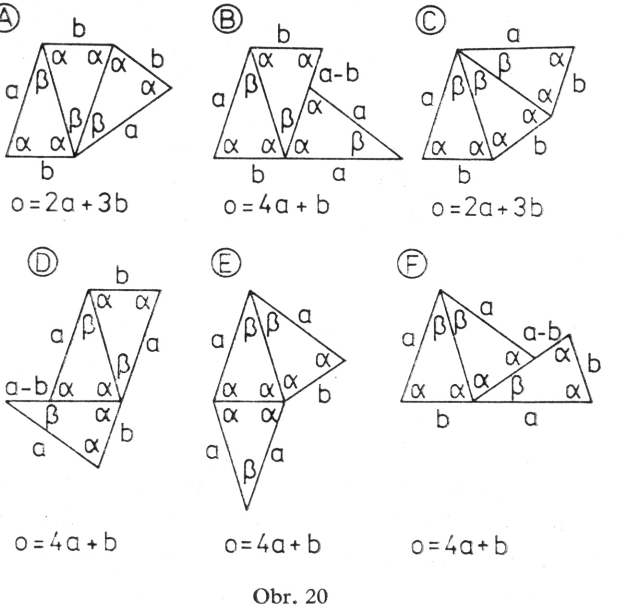
Úkol pro vás:

a) Určete délky stran všech tří rovnoramenných trojúhelníků.

b) Narýsujte všech 6 pětiúhelníků, které lze sestavit z těchto tří trojúhelníků.

Řešení.. Označme délky stran shodných rovnoramenných trojúhelníků, z nichž se skládají pětiúhelníky: a = délka ramen, b = délka základny.

Nyní sestavíme všechny možné pětiúhelníky a vypočítáme jejich obvody (obr. 20).



Obr. 20

Aby to byly pětiúhelníky, nesmí být $a = b$, tzn. nesmějí to být rovnostranné trojúhelníky.

V případech B, D, F jde skutečně o pětiúhelníky (a nikoli o šestiúhelníky), neboť součet vnitřních úhlů při vrcholu společném všem třem trojúhelníkům je roven

$$2\alpha + \beta = 180°.$$

V případě A to není naopak čtyřúhelník, neboť

$$\alpha + 2\beta < 2\alpha + \beta = 180°.$$

Ze šesti pětiúhelníků na obr. 20 mají dva obvod $o = 2a + 3b$ a čtyři obvod $o = 4a + b$. Podle zadání je tedy

$$\begin{aligned} 2a + 3b &= 19 \\ 4a + b &= 23 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme

$$a = 5 \text{ cm}, b = 3 \text{ cm}.$$

Jiné řešení neexistuje.

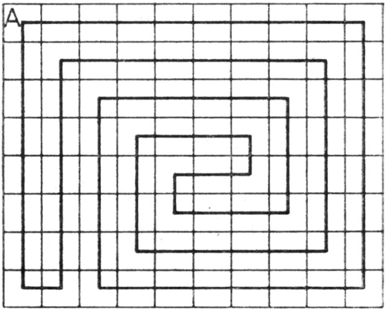
Poznámka. Na obrázku 20 jsme předpokládali, že $a > b$. Kdyby bylo $a < b$, pak bychom sestrojili podobným způsobem 6 pětiúhelníků, ale jejich obvody by byly pětkrát $2a + 3b$ a jedenkrát $4a + b$. Tím by nebyla podmínka úlohy splněna. (Načrtněte si sami tyto případy.) Úloha má tedy opravdu jen jedno řešení.

Z7 - I - 5

Obrazárnu tvoří 80 čtvercových místností o straně 4 metry (obr. 21). Hlídač koná každou hodinu obhlídku všech místností podle plánu. Začíná i končí v místnosti A. Přitom projde středem každé místnosti.

a) Kolik metrů celkem ujde?

b) Zjistěte, zda by si mohl délku procházky nějak zkrátit.



Obr. 21

Řešení. Uvnitř každé místnosti projde hlídač dráhu dlouhou 4 metry. Protože projde 80 místností, ujde celkem dráhu dlouhou 320 metrů (= 80 . 4 m). Přitom vůbec nezáleží na tom, jaký tvar má dráha, kterou hlídač projde. Cestu si tedy nemůže zkrátit.

Z7 - I - 6

Množina M se skládá ze všech osmiciferných čísel zapsaných pouze pomocí 1 a 3. Najděte v množině M číslo, které je beze zbytku dělitelné číslem 7 a přitom

a) je co nejmenší,

b) je co největší,

c) má co největší počet číslic 3,

d) má co největší počet číslic 1.

Řešení. a) Budeme vypisovat čísla množiny M podle velikosti počínaje od nejmenšího a zkoumat, zda jsou dělitelná 7.

$$
\begin{aligned}
11\,111\,111 &= 7 \,.\, 1\,587\,301 + 4\\
11\,111\,113 &= 7 \,.\, 1\,587\,301 + 6\\
11\,111\,131 &= 7 \,.\, 1\,587\,304 + 3\\
11\,111\,133 &= 7 \,.\, 1\,587\,304 + 5\\
11\,111\,311 &= 7 \,.\, 1\,587\,330 + 1\\
11\,111\,313 &= 7 \,.\, 1\,587\,330 + 3\\
\underline{11\,111\,331} &= 7 \,.\, 1\,587\,333
\end{aligned}
$$

Nejmenší hledané číslo je 11 111 331.

b) Podobně budeme hledat největší číslo. Zápis uvedeme už stručnější. Zapíšeme jen čísla a příslušný zbytek při dělení sedmi:

33 333 333 (zb. 5)	33 333 133 (zb. 1)
33 333 331 (zb. 3)	33 333 131 (zb. 6)
33 333 313 (zb. 6)	<u>33 333 111</u> (zb. 0)
33 333 311 (zb. 5)	

Hledané číslo je 33 333 111.

c) Číslo z 8 trojek není dělitelné sedmi. Budeme vyšetřovat čísla zapsaná 7 trojkami; stačí ta, která jsme nezkoumali v případě b. První z nich je již násobek 7.

33 331 333 (zb. 0)

Jedno číslo jsme našli. Zjistíme, zda není ještě další možné číslo - zda úloha nemá více řešení.

33 313 333 (zb. 4)	31 333 333 (zb. 3)
33 133 333 (zb. 2)	13 333 333 (zb. 6)

Úloha má jediné řešení, je to číslo 33 331 333.

d) Postupujeme podobně jako v případě c.

11 113 111 (zb. 2)	13 111 111 (zb. 6)
11 131 111 (zb. 5)	31 111 111 (zb. 3)
11 311 111 (zb. 0)	

Úloha má jediné řešení, a to číslo 11 311 111.

Poznámka. Výpočty zbytků při dělení sedmi je možno zjednodušit použitím věty:

Nechť přirozená čísla A, B dávají při dělení číslem n (např. $n = 7$) po řadě zbytky a, b. Potom součet $A + B$ dává při dělení číslem n stejný zbytek jako je zbytek při dělení součtu $a + b$ číslem n.

Důkaz této věty ověříme na konkrétním případě, jeho podstata má však obecnou platnost. Položme např. $A = 11\,111\,111$, $B = 20$ a $n = 7$. Potom je

$$A = 11\,111\,111 = 7 \,.\, 1\,587\,301 + 4,$$

tedy $a = 4$. Podobně

$$B = 20 = 7 . 2 + 6,$$

tedy $b = 6$. Součet

$$A + B = (7 . 1\,587\,301 + 4) + (7 . 2 + 6) =$$

$$= \underbrace{7 . (1\,587\,301 + 2)}_{\text{násobek } 7} + \underbrace{(4 + 6)}_{\substack{\text{součet zbytků} \\ a + b}}$$

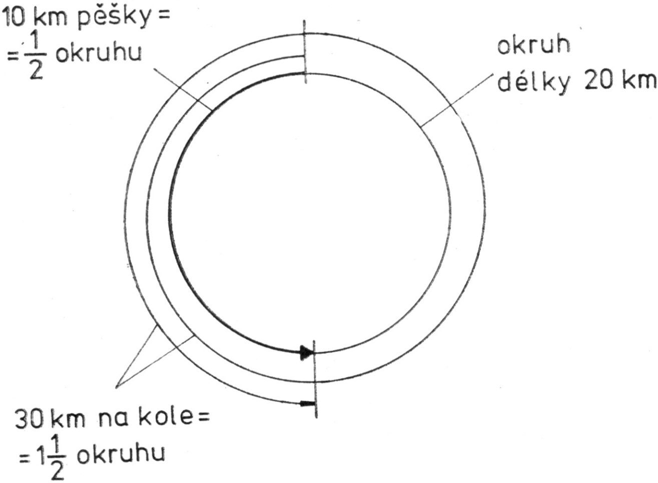
Z toho je vidět, že $A + B$ i $a + b$ dávají při dělení sedmi stejný zbytek, který se rovná 3.
Porovnejte s řešením úlohy Z7 - I - 6; $A + B = 11\,111\,131$.

ÚLOHY II. KOLA

Z7 - II - 1

Jirka a Karel mají co nejrychleji absolvovat dvakrát závodní okruh délky 20 km. Mají jedno kolo, na kterém se mohou střídat. Každý může jet na kole rychlostí 30 km/h a běžet rychlostí 10 km/h. Mohou absolvovat závod za dobu kratší než $2\frac{1}{2}$ hodiny? Jak se musejí střídat? Jak jim to bude dlouho trvat? (5 bodů)

Řešení. Střídání mohou provést takto: Jeden z nich vyrazí pěšky a druhý na kole. Za 1 hodinu první uběhne 10 km a uběhne tak půl okruhu. Za stejnou dobu druhý ujede 30 km a ujede tedy $1\frac{1}{2}$ okruhu. Tím předhoní prvního o celé kolo (obr. 22). V tomto okamžiku si úlohy vymění. Za další hodinu oba dokončí 2. okruh. Cesta jim bude trvat pouze 2 hodiny.



Obr. 22

Poznámka. Kdyby závodníci měli absolvovat jen 1 okruh, trvalo by jim to déle než 1 hodinu. Zřejmě nejvýhodnější by bylo toto střídání: Jeden ujede půl okruhu na kole za 20 minut, pak kolo položí a zbytek doběhne. To mu bude trvat 1 hodinu. Druhý poběží 1 hodinu, kde v polovině okruhu najde kolo, na které nasedne a do cíle dorazí za dalších 20 minut. Oběma to bude tedy trvat 1 hodinu 20 minut.

To ovšem za samozřejmého předpokladu, že poběží stejným směrem. Jeden z řešitelů úlohy však objevil, že znění úlohy nevylučuje, aby se oba závodníci pohybovali po okruhu opačnými směry. V tomto případě mohou i jeden okruh absolvovat za pouhou hodinu. Řešení jistě objevíte snadno sami.

Z7 - II - 2

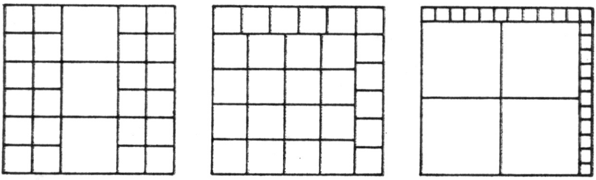
Čtverec o straně 1 m byl beze zbytku pokryt 27 čtvercovými dlaždicemi dvou různých velikostí.

a) Udejte aspoň dvě možnosti pro rozměry dlaždic a pokrytí načrtněte.

b) Můžete najít takové pokrytí, které je souměrné podle středu daného čtverce? (5 bodů)

Řešení. Myšlenka řešení je obdobná jako při řešení 2. úlohy I. kola. Jedna možnost je rozdělit čtverec na menší počet čtverců, než je 27, a dodatečně některé z nich rozdělit ještě na menší čtverce. Tak dostaneme řešení z obr. 23a.

Druhá možnost je rozdělit čtverec nejdříve na větší počet čtverců, než je 27. Potom některé z nich spojit v jeden čtverec a ten případně znovu rozdělit na nové čtverce. Tak dostaneme řešení z obr. 23b, c.



a) b) c)

Obr. 23 a — c

Snadno vypočítáme ve všech třech případech z obr. 23a, b, c délky stran čtverců:

$$\text{a)}\ \frac{1}{6}\ \text{m},\ \frac{1}{3}\ \text{m}; \qquad \text{b)}\ \frac{1}{6}\ \text{m},\ \frac{5}{24}\ \text{m}; \qquad \text{c)}\ \frac{1}{12}\ \text{m},\ \frac{11}{24}\ \text{m}.$$

Řešení z obrázku 23a vyhovuje i druhé části úlohy.

Z7 - II - 3

Zjistěte, kolik můžete celkem napsat čtyřciferných čísel, ve kterých se sobě rovnají ciferné součty prvních dvou a posledních dvou číslic a také ciferné součty krajních a vnitřních číslic. Odůvodněte, že jste nalezli všechna uvažovaná čísla.

(5 bodů)

Řešení. Čísla zapíšeme ve tvaru $xyuv$. Podle podmínky úlohy je:

$$\begin{aligned} x + y &= u + v \\ x + v &= u + y \end{aligned} \Bigg\rbrace -$$

Od 1. rovnice odečteme 2. rovnici. Dostaneme:

$$\begin{aligned} y - v &= v - y \quad | + y + v \\ 2y &= 2v \\ y &= v \end{aligned}$$

Odtud po dosazení do původních rovnic vypočítáme, že i

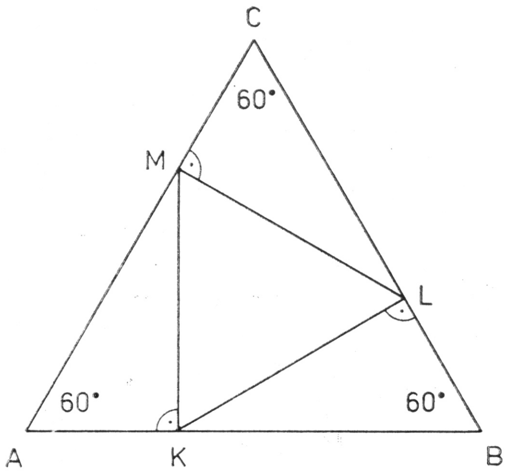
$$x = u.$$

Ve všech hledaných číslech se tedy musí rovnat první dvojčíslí druhému dvojčíslí. Každé z těchto dvojčíslí může být libovolné z čísel 10, 11, 12, ..., 99. Těchto čísel je 90 a tedy i hledaných čtyřciferných čísel je 90. Jsou to

1 010, 1 111, 1 212, 1 313, ..., 9 898, 9 999.

Z7 - II - 4

Narýsujte rovnostranný trojúhelník ABC o straně $a = 6$ cm a rozdělte jej třemi úsečkami na 4 části, z nichž jedna je opět rovnostranný trojúhelník a zbylé tři jsou shodné pravoúhlé trojúhelníky. Vypočítejte délky stran všech vzniklých trojúhelníků, výsledek přesně narýsujte. (5 bodů)



Obr. 24

Řešení. Nejdříve musíme mít nápad, jak bude asi rozdělení vypadat. Protože mají vzniknout tři shodné pravoúhlé trojúhelníky, lze snadno uhodnout, že každý bude při jednom vrcholu daného trojúhelníku ABC (obr. 24 na str. 83).

Ze shodnosti trojúhelníků AKM, BLK a CML plyne, že

$$(1) \qquad |AK| = |BL| = |CM|, \qquad |AM| = |BK| = |CL|.$$

Protože trojúhelníky AKM, BLK a CML jsou pravoúhlé s jedním ostrým úhlem velikosti 60°, jsou to »poloviny« rovnostranných trojúhelníků. Z toho dostaneme

$$|AM| = 2|AK|, \qquad |BK| = 2|BL|, \qquad |CL| = 2|CM|.$$

Spolu s rovnostmi (1) odtud zjistíme, že

$$|BK| = 2|AK|, \qquad |CL| = 2|BL|, \qquad |AM| = 2|CM|.$$

Protože je $|AB| = 6$ cm, je:

$$|AK| = |BL| = |CM| = 2 \text{ cm}$$
$$|AM| = |BK| = |CL| = 4 \text{ cm}$$

Z pravoúhlého trojúhelníku AKM vypočítáme pomocí Pythagorovy věty:

$$|MK| = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$|MK| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$|MK| \doteq 3{,}46 \text{ cm} \doteq 3{,}5 \text{ cm}$$

Protože trojúhelníky AKM, BLK, CML jsou shodné, je trojúhelník KLM rovnostranný.

Protože známe polohy bodů K, L, M na stranách trojúhelníku ABC, můžeme řešení již snadno narýsovat.