36. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategória Z5

In: Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 36. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1986/87. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. pp. 105–127.

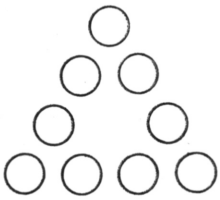
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404856

Kategória Z5

ÚLOHY I. KOLA

Z5 - I - 1

Do každého krúžku na obrázku 39 vpíšte jedno z čísel 1, 2, 3, 4, . . ., 9 (každé len raz) tak, aby súčet čísel umiestnených na každej strane trojuholníka bol vždy 20. Nájdite čo najviac rôznych riešení.



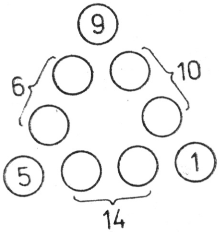
Obr. 39

Riešenie. $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$. Súčet na jednej strane je 20; $20 . 3 = 60$; čísla vo vrcholoch sa započítávajú dvakrát, teda ich súčet musí byť $60 - 45 = 15$. Vo vrcholoch môžu byť len čísla, ktorých súčet je 15. To sú:

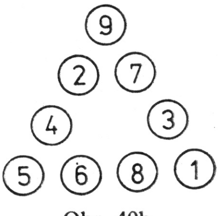
951	861	762	654
942	852	753	
	843		

Až na poradie to iné nemôžu byť. Uvážme teraz jednotlivé možnosti. Na obrázkoch 40 — 47 sú znázornené čísla vo vrcholoch. Chýbajúce čísla v krúžkoch medzi nimi musia dať vždy doplnok do 20. Tento treba rozložiť na dve čísla tak, aby každé bolo zapísané len raz.

1° Vo vrcholoch trojuholníka sú čísla 9, 5, 1.



Obr. 40a



Obr. 40b

$6 = 5 + 1$ . . . 5 tam už je

$= \underline{4 + 2}$ . . . môže byť

$10 = 9 + 1$ . . . 9 tam už je

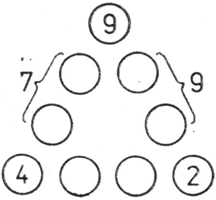
$= 8 + 2$ . . . 2 tam už je

$= \underline{7 + 3}$ . . . môže byť

$= 6 + 4$ . . . 4 tam už je

Potom $14 = \underline{8 + 6}$ . . .
jediné možné doplnenie.
Výsledne doplnenie je na obr. 40b.

2° Vo vrcholoch trojuholníka sú čísla 9, 4, 2.



Obr. 41

$7 = \underline{6 + 1}$ ... môže byť

$= 5 + 2$ ... 2 tam už je

$= 4 + 3$ ... 4 tam už je

$9 = 8 + 1$ ... 1 tam už je

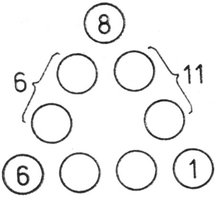
$= 7 + 2$ ... 2 tam už je

$= 6 + 3$ ... 6 tam už je

$= 5 + 4$ ... 4 tam už je

Teda, nedá sa doplniť.

3° Vo vrcholoch trojuholníka sú čísla 8, 6, 1.



Obr. 42

$6 = 5 + 1$ ... 1 tam už je

$= \underline{4 + 2}$ ... môže byť

$11 = 9 + 2$ ... 2 tam už je

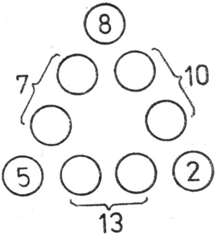
$= 8 + 3$ ... 8 tam už je

$= 7 + 4$ ... 4 tam už je

$= 6 + 5$ ... 6 tam už je

Teda, nedá sa doplniť.

4° Vo vrcholoch trojuholníka sú čísla 8, 5, 2.



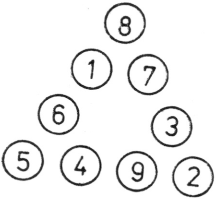
Obr. 43a

$7 = \underline{6 + 1}$ . . . môže byť

$= 5 + 2$ . . . 2 tam už je

$= \underline{4 + 3}$ . . . môže byť

a) Nech $7 = \underline{6 + 1}$



Obr. 43b

$10 = 9 + 1$

. . . 1 tam už je

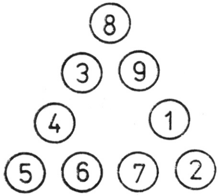
$= 8 + 2$

. . . 2 tam už je

$= \underline{7 + 3}$

. . . môže byť

b) Nech $7 = \underline{4 + 3}$



Obr. 43c

$10 = \underline{9 + 1}$

. . . môže byť

$= 8 + 2$

. . . 2 tam už je

$= 7 + 3$

. . . 3 tam už je

$= 6 + 4$
... 6 tam už je

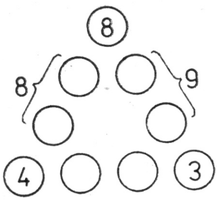
Potom $13 = \underline{4 + 9}$

$= 6 + 4$
... 4 tam už je

Potom $13 = \underline{6 + 7}$

Pozri obr. 43b, c.

5° Vo vrcholoch trojuholníka sú čísla 8, 4, 3.



Obr. 44

$8 = \underline{7 + 1}$ ... môže byť

$= \underline{6 + 2}$ ... môže byť

$= 5 + 3$ ... 3 tam už je

a) Nech $8 = \underline{7 + 1}$

$9 = 8 + 1$
... 8 tam už je

$= 7 + 2$
... 7 tam už je

$= 6 + 3$
... 3 tam už je

$= 5 + 4$
... 4 tam už je

Nedá sa doplniť.

b) Nech $8 = \underline{6 + 2}$

$9 = 8 + 1$
... 8 tam už je

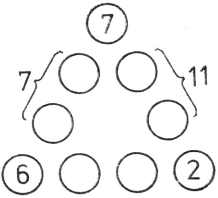
$= 7 + 2$
... 2 tam už je

$= 6 + 3$
... 6 tam už je

$= 5 + 4$
... 4 tam už je

Nedá sa doplniť.

6° Vo vrcholov trojuholníka sú čísla 7, 6, 2.



Obr. 45

$7 = 6 + 1$ ... 6 tam už je

$ = 5 + 2$ ... 2 tam už je

$ = \underline{4 + 3}$ ... môže byť

$11 = 9 + 2$ ... 2 tam už je

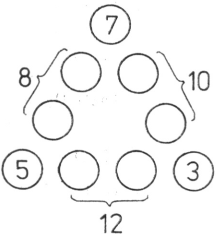
$ = 8 + 3$ ... 3 tam už je

$ = 7 + 4$ ... 4 tam už je

$ = 6 + 5$ ... 6 tam už je

Nedá sa doplniť.

7° Vo vrcholov trojuholníka sú čísla 7, 5, 3.



Obr. 46a

$8 = 7 + 1$ ... 7 tam už je

$ = \underline{6 + 2}$ ... môže byť

$ = 5 + 3$ ... 5 tam už je

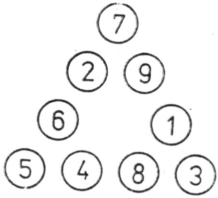
$10 = \underline{9 + 1}$ ... môže byť

$ = 8 + 2$ ... 2 tam už je

$ = 7 + 3$ ... 3 tam už je

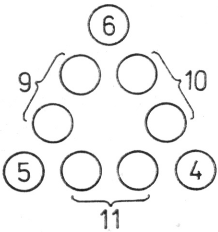
$ = 6 + 4$ ... 6 tam už je

Potom $12 = \underline{4 + 8}$



Obr. 46b

8° Vo vrcholov trojuholníka sú čísla 6, 5, 4.



Obr. 47a

$9 = \underline{8 + 1}$ ... môže byť

$= \underline{7 + 2}$ ... môže byť

$= 6 + 3$ ... 6 tam už je

$= 5 + 4$ ... 5 tam už je

a) Nech $9 = \underline{8 + 1}$

$10 = 9 + 1$

... 1 tam už je

$= 8 + 2$

... 8 tam už je

b) Nech $9 = \underline{7 + 2}$

$10 = \underline{9 + 1}$

... môže byť

$= 8 + 2$

... 2 tam už je

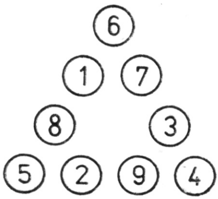
$= \underline{7 + 3}$

... môže byť

$= 6 + 4$

... 4 tam už je

Potom $11 = \underline{2 + 9}$



Obr. 47b

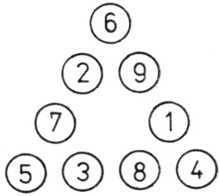
$= 7 + 3$

... 7 tam už je

$= 6 + 4$

... 4 tam už je

Potom $11 = \underline{3 + 8}$



Obr. 47c

Všetky riešenia (až na zmenu poradia vrchoľov, prípadne zmenu poradia čísel vnútri strán) sú tak zostrojené.

Z5 - I - 2

Hviezdičky nahraďte číslicami tak, aby vznikla správna úloha na násobenie:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & * & * & * & 7 \\
 & & & & * & * & * \\
\hline
 & & * & * & * & * & 6 \\
 & * & * & 2 & 0 & 3 & \\
* & 3 & 7 & * & * & & \\
\hline
* & * & * & * & * & * & *
\end{array}
$$

Riešenie. Označme si neznáme cifry písmenami ako na obrázku:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & a & b & c & 7 \\
 & & & & d & e & f \\
\hline
 & & g & h & i & j & 6 \\
 & k & l & 2 & 0 & 3 & \\
m & 3 & 7 & n & o & & \\
\hline
* & * & * & * & * & * & *
\end{array}$$

Potom f musí byť 8, lebo súčin 7 s iným jednociferným číslom nekončí na 6. Podobne $e = 9$.
Potom však $9.7 = 63$ — napíšeme tri a 6 zostalo.

$9.c + 6 = {*}0$, teda $9.c = {*}4$, preto $c = 6$.

Potom však $9.6 + 6 = 60$ — napíšeme nula a 6 zostalo.

$9.b + 6 = {*}2$, teda $9.b = {*}6$, preto $b = 4$.

$9.4 + 6 = 42$ — napíšeme dva a 4 zostali.

Vráťme sa k číslam g, h, i, j. Vynásobením známej časti prvého činiteľa ôsmimi dostávame $j = 3$, $i = 7$.

Hľadajme teraz číslo d; d-násobok čísla $a467$ musí mať na mieste stoviek cifru 7.
Urobme si tabuľku:

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$d.a\underline{4}67$	$a\underline{4}67$	$\star\underline{9}34$	$\star\underline{4}01$	$\star\underline{8}68$	$\star\underline{3}35$	$\star\underline{8}02$	$\star\underline{2}68$	$\underline{\star\underline{7}36}$	$\star\underline{2}03$

Teda $\underline{d = 8}$. Potom $\underline{o = 6}$, $\underline{n = 3}$. Pretože $d = f = 8$, je 1. a 3. riadok v súčine rovnaký. Teda $h = 3$. Zatiaľ máme:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & a & 4 & 6 & 7 \\
 & & & & 8 & 9 & 8 \\
\hline
 & & g & 3 & 7 & 3 & 6 \\
 & k & l & 2 & 0 & 3 & \\
m & 3 & 7 & 3 & 6 & & \\
\hline
* & * & * & * & * & * & *
\end{array}
$$

Sledujte výpočet súčinu:

$a467.8 \quad = g3736$

$8.7 \qquad = 56$, napíšeme 6 a 5 zostalo

$8.6 + 5 = 53$, napíšeme 3 a 5 zostalo

$8.4 + 5 = 37$, napíšeme 7 a 3 zostali

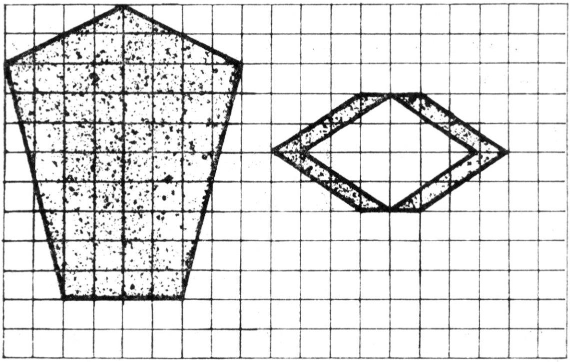
$8.a + 3 = g3$

Teda $8.a = g0$, z čoho $a = 5$.
Výsledok je:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 5 & 4 & 6 & 7 \\
 & & & & 8 & 9 & 8 \\
\hline
 & & 4 & 3 & 7 & 3 & 6 \\
 & 4 & 9 & 2 & 0 & 3 & \\
4 & 3 & 7 & 3 & 6 & & \\
\hline
4 & 9 & 0 & 9 & 3 & 6 & 6
\end{array}
$$

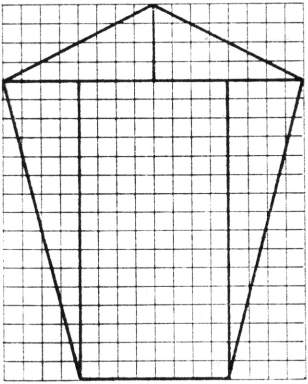
Z5 - I - 3

Určte obsah vyšrafovaných útvarov umiestnených v štvorčekovej sieti (obr. 48). Dĺžka strany štvorčeka je 1 cm.



Obr. 48

Riešenie. a) Prvý útvar si rozdelíme na pravouhlé trojuholníky (obr. 49, str. 116). Súčtom ich obsahov dostaneme obsah daného útvaru. Obsah je 56 cm^2.



Obr. 49

b) Druhý útvar môžme rozdeliť na štyri rovnaké rovnobežníky (obr. 50).

Obr. 50

Obsah takéhoto rovnobežníka vypočítame ak od obsahu obdĺžnika 2.4 cm^2 odčítame obsahy dvoch pravouhlých trojuholníkov $\frac{2 . 3}{2}$ cm^2. Teda 8 cm^2 − 6 cm^2 = 2 cm^2. Obsah jedného rovnobežníka je 2 cm^2; obsah štyroch a teda aj celého útvaru 8 cm^2.

Z5 - I - 4

Prváčka Danka bola vždy veľmi zvedavá a netrpezlivo očakávala deň, kedy dostane svoje prvé vysvedčenie. Súdružka učiteľka jej povedala: »Pri školskej bráne máme 8 schodov. Dohodnime sa, že od zajtra každý deň prejdeš po schodoch do školy iným spôsobom. Musíš však dodržať dve podmienky.

1. Každýkrát musíš stúpiť na prvý schod.

2. Z každého schodu môžeš stúpiť buď na nasledujúci, alebo jeden môžeš preskočiť a stúpiť hneď na ten ďalší.

V ten deň, keď vyčerpáš už aj poslednú možnosť, budeme rozdávať vysvedčenie.«

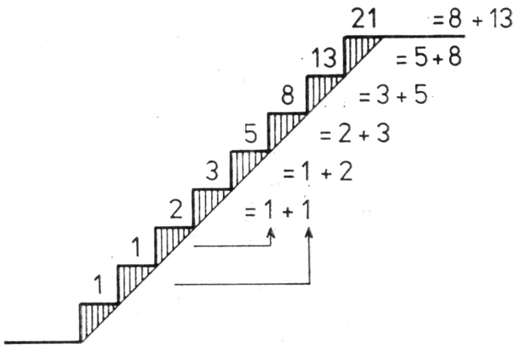
Koľkokrát musela Danka prejsť po schodoch, aby dostala vysvedčenie?

Riešenie (pozri obr. 51, str. 118). Na schody je možné stúpiť takto:

na 1. schod .... 1 spôsobom
na 2. schod .... 1 spôsobom
na 3. schod .... $1 + 1 = 2$ spôsobmi (prečo?)
na 4. schod .... $1 + 2 = 3$ spôsobmi
na 5. schod .... $2 + 3 = 5$ spôsobmi
na 6. schod .... $3 + 5 = 8$ spôsobmi
na 7. schod .... $5 + 8 = 13$ spôsobmi
na 8. schod .... $8 + 13 = 21$ spôsobmi.

Danka musela prejsť po schodoch práve 21krát.

Poznámka. Stretli sme sa i s riešením, že Danka nemusí stúpiť na 8. schod (že ho preskočí). Žiak považoval za schod len »kváder schodu«, »kachličky« za ním už schodom nie sú. Táto úvaha je tiež dobrá. Problém je v tom, že nemáme všetci rovnakú predstavu o tom, čo je



Obr. 51

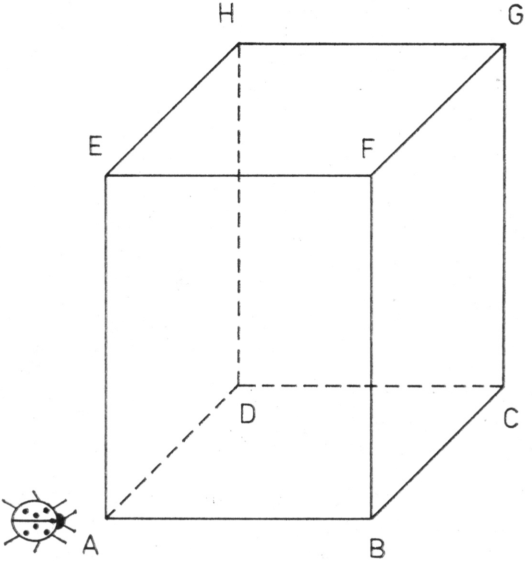
a čo nie je schod a v úlohe to nebolo upresnené. Preto v tomto prípade vychádzajú dva rôzne výsledky. Druhý je $13 + 21 = 34$ možností.

Z5 - I - 5

Na každej hrane kvádra (obr. 52) mimobežnej s hranou DH striehnu pavúky. Pavúky sa môžu pohybovať od jedného vrcholu hrany po druhý, avšak nesmú stúpiť do vrchola. Lienka (sluníčko) Lenka sa chce, po hranách kvádra, dostať z vrcholu A do vrcholu G čo najkratšou cestou. Viete jej poradiť? Nájdite všetky možnosti.

Riešenie. Sú tri možnosti, $A - D - C - G$, $A - D - H - G$, $A - E - H - G$.

Poznámka. V texte úlohy v letáku vypadlo, že lienka chodí len po hranách. Potom je úloha značne náročnejšia a jej riešenie závisí na rozmeroch kvádra.

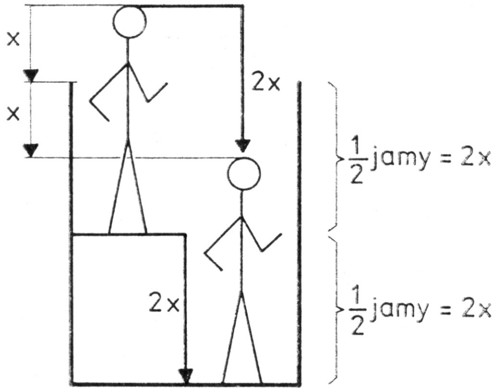


Obr. 52

Z5 - I - 6

Pýtali sa robotníka, akú hlbokú jamu kope. Odpovedal im takto: »Meriam 180 cm. Keď vykopem celú jamu, bude moja hlava pod povrchom zeme tak hlboko, koľko je teraz nad povrchom zeme. Mám vykopanú polovicu jamy.«

Riešenie. Označme vzdialenosť hlavy robotníka nad povrchom jamy x. Keď vykope druhú polovicu jamy, klesne mu hlava o $2x$. To znamená, že polovica jamy je hlboká $2x$, teda celá jama je hlboká $4x$.



Obr. 53

Avšak z obrázku (obr. 53) vidíme, že robotník je vysoký $4x - x = 3x$, teda $x = 60$ cm.

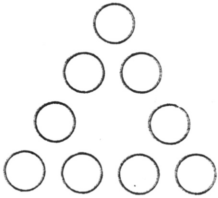
Jama bude hlboká 4.60 cm, tj. 240 cm.

ÚLOHY II. KOLA

Z5 - II - 1

Do krúžkov na obrázku 54 vpíšte čísla od 1 do 9, každé práve raz tak, aby súčet čísel umiestnených na každej strane trojuholníka bol vždy 21. Nájdite aspoň dve riešenia, ktoré sa líšia v množine čísel vo vrcholoch. (6 bodov)

Riešenie (pozri úlohu Z5 - I - 1). $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$.



Obr. 54

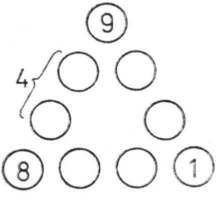
Súčet na jednej strane je 21; $21 . 3 = 63$; čísla vo vrcholoch sa započítavajú dvakrát, teda ich súčet musí byť $63 - 45 = 18$.

Vo vrcholoch môžu byť čísla

9 8 1	8 7 3	7 6 5
9 7 2	8 6 4	
9 6 3		
9 5 4		

1° Vo vrcholoch sú čísla 9, 8, 1.

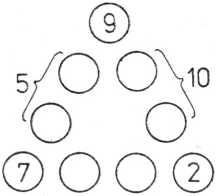
Do súčtu 21 chýbajú 4 (obr. 55). Tie sa však nedajú rozložiť na súčet dvoch čísel, ktoré v trojuholníku nie sú vo vrcholoch.



Obr. 55

2° Vo vrcholoch sú čísla 9, 7, 2.

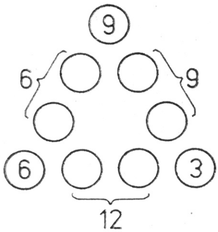
Jediná možnosť doplnenia $5 = 4 + 1$, ale potom sa už 10 nedá rozložiť (obr. 56).



Obr. 56

3° Vo vrcholoch sú čísla 9, 6, 3.

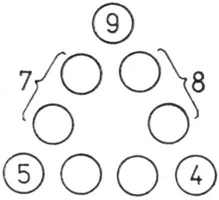
Sú dve možnosti (obr. 57): $6 = 5 + 1$, $6 = 4 + 2$. Ak $6 = 5 + 1$, tak $9 = 7 + 2$ a $12 = 4 + 8$. Ak $6 = 4 + 2$, tak $9 = 8 + 1$ a $12 = 5 + 7$.



Obr. 57

4° Vo vrcholoch sú čísla 9, 5, 4.

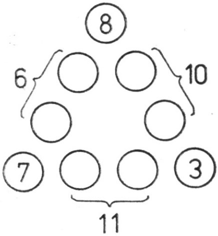
Jediná možnosť je $7 = 6 + 1$ (obr. 58). Ďalej sa však už nedá doplňovať.



Obr. 58

5° Vo vrcholoch sú čísla 8, 7, 3.

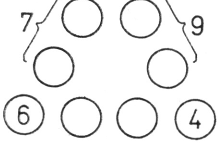
Sú dve možnosti (obr. 59): $6 = 5 + 1$, $6 = 4 + 2$. Ak $6 = 5 + 1$, tak $10 = 6 + 4$ a $11 = 9 + 2$. Ak $6 = 4 + 2$, tak $10 = 9 + 1$ a $11 = 5 + 6$.



Obr. 59

6° Vo vrcholov sú čísla 8, 6, 4.

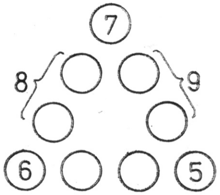
Jediná možnosť $7 = 6 + 1$ (obr. 60), ďalej sa však nedá doplniť.



Obr. 60

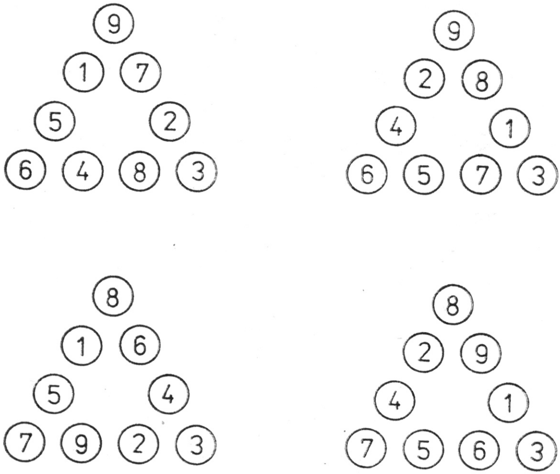
7° Vo vrcholov sú čísla 7, 6, 5.

Číslo 8 se nedá rozpísať ako súčet dvoch čísel, ktoré v trojuholníku ešte nie sú (obr. 61).



Obr. 61

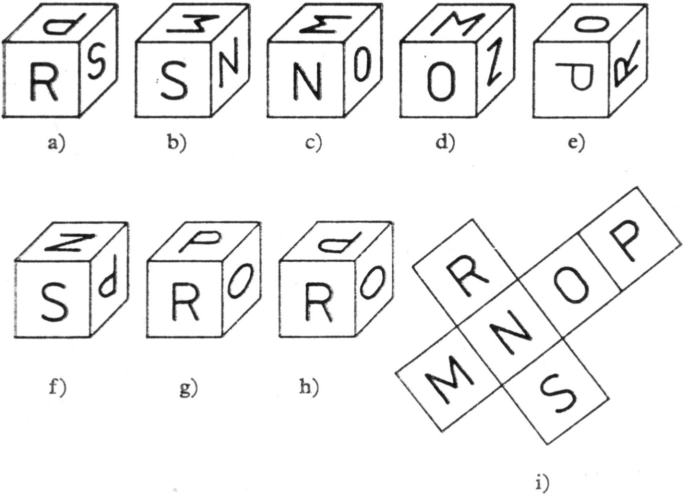
Všetky riešenia (ktoré sa nelíšia zmenou poradia vrcholov, alebo zmenou poradia čísel vnútri strán) sú na obrázku 62.



Obr. 62

Ktoré z ôsmich kociek na obrázkoch 63a—h si mohol Miro zhotoviť z papiera, ktorý si vystrihol z obrázku i.

(4 body)



Obr. 63a — i

Riešenie. Všímame si písmená v stenách, ktoré spolu susedia.

Kocku a) nemožno zložiť, lebo stena S nesusedí so stenou R,

b) nemožno zložiť, lebo v kocke sú písmená M, N »nad sebou«, ale v sieti »vedľa seba«,

c) nemožno zložiť, lebo v kocke písmeno M »leží« nad N a v sieti sú postavené »vedľa seba«,

d) nemožno zložiť, lebo v kocke sú M a O »vedľa seba«, v sieti sú na protiľahlých stenách,

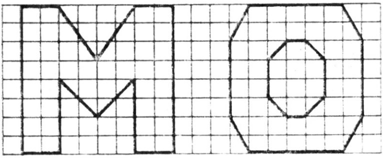
f) nemožno zložiť, lebo v kocke písmeno N »leží nad« S a v sieti písmeno N »stojí nad« S,

g) nemožno zložiť, lebo v kocke písmeno P »stojí nad« R a v sieti písmeno P »stojí dolu hlavou« nad R.

Výsledok. Miro si mohol zhotoviť kocky e) a h).

Z5 - II - 3

Určte obsah útvaru umiestneného v štvorcovej sieti (obr. 64). (Dĺžka strany štvorčeka je 1 cm.) (5 bodov)



Obr. 64

Riešenie. Obsah M: $8 . 8 - (12 + 6) = 46$ (cm^2).
Obsah O: $7 . 8 - (4 . 1 + 10) = 42$ (cm^2).

Z5 - II - 4

Pionierski vedúci kúpili pre deti čokoládové tyčinky. Jedny stáli 2,40 Kčs, druhé 3,20 Kčs. Spolu zaplatili 64 Kčs. Koľko ktorých tyčiniek kúpili? (Uveďte všetky možnosti.)

(5 bodov)

Riešenie

Vedúci kúpili	x kusov	po 2,40 Kčs
	y kusov	po 3,20 Kčs
Spolu zaplatili	$2{,}40 . x + 3{,}20 . y = 64$ Kčs	

Urobme si tabuľku možností pre voľbu x. V tabuľke n znamená, že také celé číslo y neexistuje (y je počet kusov - musí byť celé). Ďalej vidíme, že x je násobkom 4.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 ...	16 ...	20 ...	24
y	20	n	n	n	17	n	n	n	14	n	n	n	11 ...	8 ...	5 ...	2

Úloha má 7 riešení.