36. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategória Z4

In: Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 36. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1986/87. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. pp. 128–139.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404857

Kategória Z4

ÚLOHY I. KOLA

Z4 - I - 1

Kráľ sa rozhodol rozdeliť stádo tiav (velbloudů) medzi svojich piatich synov. Tiav bolo viac ako 50 a menej ako 60. Najmladšiemu dal najmenej tiav, staršiemu o 3 ťavy viac, ešte staršiemu o 3 viac a tak ďalej.
Koľko tiav dostal každý syn?

Riešenie. *1. spôsob.* Urobme si tabuľku, koľko tiav dostal každý zo synov, ak prvý dostal 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... tiav.

1. syn	1	2	3	4	5	6	...
2. syn	4	5	6	7	8	9	...
3. syn	7	8	9	10	11	12	...
4. syn	10	11	12	13	14	15	...
5. syn	13	14	15	16	17	18	...
spolu	35	40	45	50	55	60	...

2. spôsob. Ak prvý syn dostane jednu ťavu, druhý dostane 4, tretí 7, štvrtý 10, piaty 15 - spolu dostanú 35 tiav. Ak prvý dostane o 1 ťavu viac, každý dostane o jednu ťavu viac, spolu teda všetci piati o 5 tiav viac. Teda spolu môžu dostať 35 tiav, alebo 40, alebo 45, ... Sú to všetko násobky piatich. Medzi 50 a 60 je len jedna možnosť a to 55. Od 35 po 55 musíme pridať 4 päťky.

Teda prvý syn dostal $1 + 4 = 5$ tiav, druhý 8, tretí 11, štvrtý 14 a piaty 17 tiav.

Poznámka. Riešenie je neúplné, ak je uvedený len výsledok. »Synovia dostali 5, 8, 11, 14, 17 tiav. Je potrebné ukázať, že iné riešenie neexistuje. To zaručuje tabulka uvedená pri 1. spôsobe riešenia, alebo úvaha o násobkoch medzi číslami 50 a 60 pri 2. spôsobe riešenia.

Z4 - I - 2

Nakresli 5 rôznych bodov *A, B, C, D, E* neležiacich na jednej priamke tak, aby boli vrcholmi

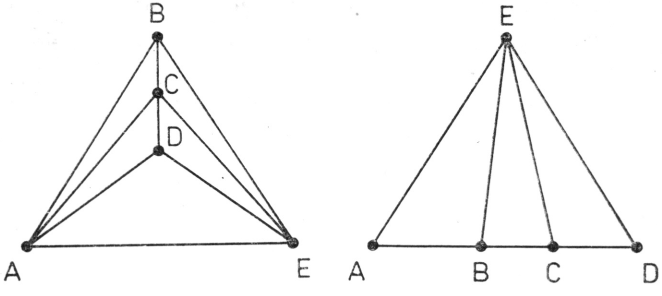
a) čo najväčšieho počtu neprekrývajúcich sa trojuholníkov,

b) čo najmenšieho počtu neprekrývajúcich sa trojuholníkov.

(Dva trojuholníky sa neprekrývajú, ak ich prienikom je buď prázdna množina, alebo bod, alebo úsečka.)

Poznámka: V letáku bol text: ...trojúholníky, ktorých strany sa nepretínajú. Takými sú v obrázku 65a aj trojúholníky *ADE* a *ACE*. To je však už iná úloha.

Riešenie. Najväčší počet je 5 takých trojuholníkov - pozri obr. 65a, najmenší počet sú 3 také trojuholníky - pozri obr. 65b.



a) b)

Obr. 65a, b

Z4 - I - 3

Namiesto hviezdičiek vpíš číslice tak, aby bol súčet naznačených štvorciferných čísel správny.

	6	*	5	1
	5	*	*	7
	*	5	7	*
*	2	4	8	0

Riešenie

	6	*c*	5	1
	5	*d*	*b*	7
	e	5	7	*a*
f	2	4	8	0

Nahraďme si hviezdičky písmenami *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* ako na obrázku. Potom na mieste *a* môže byť len číslica 2 - ostala nám 1 (desiatka), na mieste *b* môže byť len číslica 5 (pozor na prechod cez desiatku) - ostala nám 1 (stovka). Súčet $c + d$ s číslom 5 a jednotkou, ktorá nám ostala pri prechode cez desiatku, nám musí dať číslo, ktoré má na mieste jednotiek číslicu 4. To sú čísla 4, 14, 24, ... Číslo 4 to nemôže byť (prečo?). Pri čísle 14 by číslice c, d museli dať súčet 8, pri čísle 24 by tento súčet musel byť 18. Číslo 34 a väčšie uvažovať nemusíme (prečo?).

To si zapamätáme a pozrieme sa, aké číslice možno dosadzovať za ďalšie písmená. Ak by na mieste stoviek vyšiel súčet 14 - ostala by 1 (tisícka). Potom na miesto e môžme doplniť len cifru 0, ale nula by nemala byť na začiatku čísla. Teda na mieste stoviek musí vyjsť súčet 24.

To môže nastať len vtedy, keď c aj d sú deviatky. Pri súčte nám na mieste stoviek pri tomto nahradení ostanú 2 (tisícky). Teda na mieste e musí byť číslica 9 a potom na mieste f číslica 2.

Výsledok je súčet:

$$\begin{array}{r} 6\,9\,5\,1 \\ 5\,9\,5\,7 \\ 9\,5\,7\,2 \\ \hline 2\,2\,4\,8\,0 \end{array}$$

Z4 - I - 4

Do prázdnych okienok (obr. 66) vpíš čísla 1, 2, 3, 4, 5 tak, aby sa v každom riadku, v každom stĺpci a v obidvoch uhlopriečkach vyskytovalo každé číslo práve raz.

3	5	2		
		1		
				3

Obr. 66

Riešenie. Na mieste koliesok (obr. 67) môžu byť len 1 a 4, vzhľadom na to, že v prvom riadku sú už čísla 2, 3, 5. Ale v uhlopriečke je 1, teda prvý riadok musí byť ako na obrázku 68.

3	5	2		
		1		
				3

Obr. 67

3	5	2	1	4
		1		
				3

Obr. 68

Na mieste štvorčeka (obr. 68) môže byť len 2, alebo 5. Ak uvažujeme 5, potom uhlopriečku môžme doplniť len dvomi spôsobmi (obr. 69a, b).

V obidvoch prípadoch musí byť 5 v druhom riadku a štvrtom stĺpci. Potom ale ďalšie dop'nenie uhlopriečky nie je možné, pretože 3 nevieme ďalej umiestniť. Teda na mieste štvorčeka musí byť 2

3	5	2	1	4
	2		5	
		1		
	~~3~~		4	
~~2~~				5

a)

3	5	2	1	4
	4		5	
		1		
	~~2~~		2	
~~3~~				5

b)

Obr. 69a, b

Podobným spôsobom doplníme ostatné okienka. Výsledok je na obrázku 70.

3	5	2	1	4
2	4	5	3	1
4	3	1	2	5
1	2	4	5	3
5	1	3	4	2

Obr. 70

Z4 - I - 5

Janka a Danka bývajú v dome, ktorý je označený dvojciferným číslom. Janka si zapísala zoznam všetkých dvojciferných čísel, ktoré sú násobkami čísla 3 a sú menšie ako číslo domu. Danka si tiež zapísala zoznam, ale všetkých dvojciferných čísel, ktoré majú v zápise číslicu 3 a sú menšie ako číslo domu.

Keď porovnali obidva zoznamy, zistili, že obsahujú rovnaký počet čísel.

Potom urobili to isté aj s číslom domu kamarátky Zuzky, ktorá býva v susednom dome na tej istej ulici. Aké bolo ich prekvapenie, keď zistili, že obidva zoznamy obsahujú znovu rovnaký počet čísel.

Viete určiť čísla domov, v ktorých bývajú tieto dievčatá?

Riešenie. Urobme si tabuľku dvojciferných násobkov čísla 3 a dvojciferných čísel, v ktorých sa vyskytuje číslica 3:

12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48
13	23	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	43

51	54	57	60	63	66	69	72	75	78	81	84	87
53	63	73	83	93								

90	93	96	99

Z tabuľky vidíme, že čísla, ktoré môžu označovať domy Janky a Danky a ich kamarátky Zuzky, môžu byť len 36, 37, 49, 50, 51, 54. Ďalej záleží na tom, či dievčatá bývajú v meste alebo na dedine. V meste sú totiž domy číslované v poradí tak, že na jednej strane ulice sú párne (sudá) a na náprotivnej strane sú nepárne (lichá) čísla. Ak je to v meste, sú susedné čísla 49, 51. Na dedine to môžu byť aj 36, 37, alebo 49, 50, alebo 50, 51.

Z4 - I - 6

Marienka išla s rodičmi autom na návštevu ku starým rodičom. Všimla si, že na tachometri je symetrické číslo

23932. Takéto číslo vyzerá spredu ako zozadu. Dalšie symetrické číslo sa na tachometri objavilo až po dvoch hodinách jazdy.

Koľko kilometrov prešli za tie dve hodiny?

Riešenie. Najbližšie symetrické číslo dostaneme zmenou strednej číslice (na mieste stoviek) o jednotku. Zmenou číslice na mieste jednotiek a desiatok sa pri symetrickom čísle mení aj číslica na mieste desaťtisíciek a tisíciek a tak by sme dostali už väčšie čísla.

Ale 9 sa takýmto spôsobom zmení na 0, teda musí nastať zmena o jednotku i na ďaľšom mieste. Zmeníme ho na mieste desiatok, tým sa symetrické číslo zmení i na mieste tisícok. Ak by sme menili na mieste jednotiek, znamenalo by to zmenu i na mieste desaťtisícok a tým oveľa väčšie číslo.

Teda najbližšie symetrické číslo k číslu 23932 je číslo 24042;

$$24042 - 23932 = 110.$$

Za dve hodiny prešli 110 km.

ÚLOHY II. KOLA

Z4 - II - 1

Na miesta hviezdičiek zapíšte cifry tak, aby naznačený rozdiel bol správny.

$$
\begin{array}{r}
6\ 7\ *\ *\ 3 \\
-\ 2\ 7\ *\ 5\ * \\
\hline
3\ *\ 1\ 2\ 7
\end{array}
$$

(6 bodov)

Riešenie. *1. spôsob.*

$$
\begin{array}{r}
6\,7\,c\,b\,3 \\
-\ 2\,7\,d\,5\,a \\
\hline
3\,e\,1\,2\,7
\end{array}
$$

Označme si hviezdičky ako na obrázku. Začíname odčítať od jednotiek. Číslica a musí byť 6, pri odčítaní sme prechádzali cez desiatku, ostala nám 1 (desiatka). Pričítame ju k 5, teda b musí byť 8, bez prechodu cez desiatku.

Na mieste stoviek môže byť c rovné 1 a d rovné 0. Ale potom by $7 - 7 = 0$ a $6 - 2 = 4$. Ale na mieste desaťtisícok vo výsledku je 3 a nie 4. Teda na mieste tisícok musí byť pri odčítaní prechod cez desiatku.

To ale znamená, že i na mieste stoviek je prechod cez desiatku, teda nemôže byť $1 - 0$, ale musí byť $0 - 9$.

Takže výsledný rozdiel je:

$$
\begin{array}{r}
6\,7\,0\,8\,3 \\
-\ 2\,7\,9\,5\,6 \\
\hline
3\,9\,1\,2\,7
\end{array}
$$

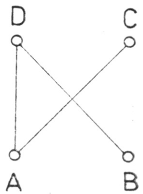
2. spôsob. Úlohu môžeme riešiť aj tak, že si rozdiel prevedieme na súčet:

2	7	*	5	*
3	*	1	2	7
6	7	*	*	3

Ďalšia úvaha je podobná ako v úlohe Z4 - I - 3.

Z4 - II - 2

Medzi štyrmi mestami *A*, *B*, *C*, *D* treba zriadiť tri letecké linky. Chceme, aby sa z každého mesta dalo lietadlom dostať do všetkých ostatných miest (priamo, alebo s prestupovaním). Jedno z riešení je na obrázku 71.



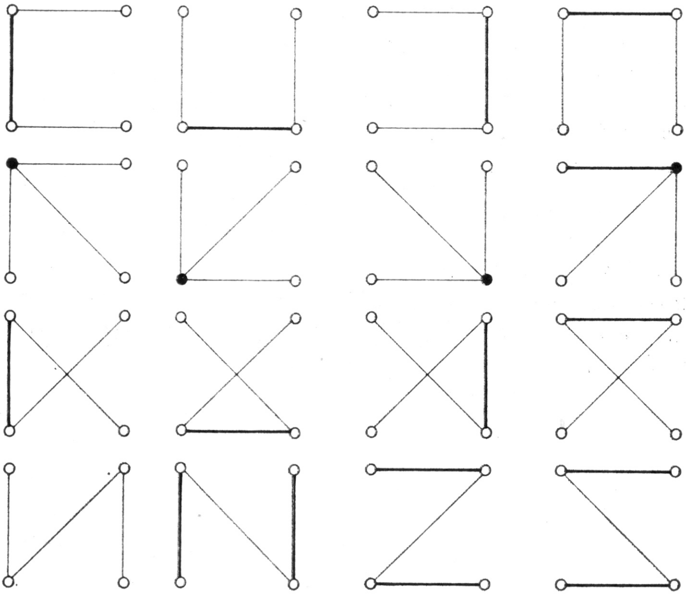
Obr. 71

Nájdite ostatné možnosti. (6 bodov)

Riešenie. Sú štyri typy liniek, z každého sú štyri možnosti. Spolu 16 možností (obr. 72, str. 138).

Z4 - II - 3

Z číslic 7, 0, 5, 8 treba vytvoriť také párne trojciferné čísla, ktoré majú v zápise navzájom rôzne cifry. Zistite súčet všetkých takýchto čísel. (7 bodov)



Obr. 72

Riešenie. *1. spôsob vyberania.* Párne (sudé) číslo musí mať na mieste jednotiek párnu (sudou) číslicu, v našom prípade 0, alebo 8.

0:	570	8:	578
	750		758
	850		508
	580		708
	870		
	780		

Číslica 0 na začiatku nemôže byť; nebolo by to trojciferné číslo.

2. spôsob vyberania (podľa velkosti). 508, 570, 578, 580, 708, 750, 758, 780, 850, 870.

Spolu 10 čísel. Ich súčet je 6 952.