37. ročník matematické olympiády na středních školách

Texty úloh kategorií A, B, C a korespondenčního semináře

In: Leo Boček (editor); Luboš Brim (editor); Tomáš Hecht (editor); Karel Horák (editor): 37. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1987/88. 29. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990. pp. 41–59.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404865

TEXTY ÚLOH KATEGORIÍ A, B, C A KORESPONDENČNÍHO SEMINÁŘE

Kategorie C

C - I

1. Označme $\mathsf{A} = \{0, 1, 2\}$. Najděte všechny trojice reálných čísel a, b, c ($c \neq 0$), pro které platí

$$x \in \mathsf{A} \text{ a } y \in \mathsf{A} \Rightarrow ax + by + cxy \in \mathsf{A} .$$

2. Pro která přirozená čísla n je číslo $n^2 + 5n + 8$ dělitelné číslem 49?

3. Jsou-li p, q, pq a $p + q$ délky stran čtyřúhelníku, kde $p \geqq 3$, $q \geqq 3$ jsou přirozená čísla, pak jedna z jeho úhlopříček má délku menší než 11. Dokažte.

4. Je dán pravidelný trojboký hranol $ABCA'B'C'$ s podstavnou hranou délky a a výškou v. Označme S střed stěny $BCC'B'$ a K, L ty body na hranách BB', CC', pro něž jsou lomené čáry AKS a ALS nejkratší. Vypočítejte poměr objemů jehlanu $AKLS$ a daného hranolu.

5. Ve volejbalovém turnaji se utkalo $n \geqq 3$ družstev. Dokažte, že existuje takové družstvo A, že ke každému jinému družstvu B najdeme třetí družstvo C tak, že ve vzájemných zápasech družstev A, B, C vyhrálo A aspoň jednou a družstvo B nejvýše jednou.

6. V pravidelném devítiúhelníku $ABCDEFGHI$ označme K, L, M průsečíky dvojic přímek AD a CG, BF a CG, AD a BF. Najděte 18 různých trojúhelníků podobných s trojúhelníkem KLM, jejichž všechny vrcholy jsou vrcholy daného devítiúhelníku.

C - S

1. Výpočtem ověřte, že délka strany pravidelného dvanáctiúhelníku vepsaného kružnici o poloměru 2 je $\sqrt{6} - \sqrt{2}$.

2. Najděte všechna čtyřciferná čísla končící číslicí 9, která jsou dělitelná každou svou číslicí.

3. V tenisovém klubu se hrál turnaj tak, že hráč, který dvakrát prohrál, byl vyřazen. Po 45. zápase zbyl jediný hráč - - vítěz turnaje. Mohl vítěz projít turnajem bez porážky? Kolik bylo účastníků turnaje?

C - II

1. Jarda napsal na tabuli čtyři přirozená čísla. Součet prvních dvou byl 707, součet druhého a třetího byl 700, třetího a čtvrtého 689. Určete
   a) součet prvního a čtvrtého čísla,
   b) nejmenší možnou hodnotu prvního čísla.

2. V daném lichoběžníku určete takový bod, jehož spojnice se středy stran rozdělí lichoběžník na čtyři čtyřúhelníky stejného obsahu.

3. Je dáno čtyřciferné číslo A. Zaměníme-li v čísle A první

číslici s poslední, dostaneme čtyřciferné číslo B. Největším společným dělitelem čísel A, B je číslo 63. Určete čísla A, B.

4. Do kružnice k je vepsán pětiúhelník $ABCDE$ tak, že $AB \parallel DE$ a $AE \parallel BC$. Dokažte, že tečna kružnice k v bodě A je rovnoběžná s přímkou CD.

Kategorie B

B - I

1. Jaký největší počet figurek lze na šachovnici $n \times n$ rozmístit tak, aby žádné dvě nesousedily? (Za sousední považujeme ta políčka, která mají společný alespoň jeden vrchol.)

2. Dokažte, že polynom

$$P_n(x) = x^{(2n)^2} - x^{(2n-1)^2} + x^{(2n-2)^2} - x^{(2n-3)^2} + \ldots \\ \ldots + x^4 - x + 1$$

nemá reálný kořen pro žádné přirozené číslo n.

3. Rozhodněte, zda existuje nenulové zobrazení F množiny mřížových bodů v rovině (tj. bodů s celočíselnými souřadnicemi) do množiny reálných čísel takové, že pro každý pravoúhlý trojúhelník ABC s vrcholy v mřížových bodech a odvěsnami délky 1 platí

$$F(A) + F(B) + F(C) = 0. \tag{1}$$

Existuje takové zobrazení F, požadujeme-li, aby rovnost (1) platila pouze pro takové pravoúhlé trojúhelníky ABC, jejichž osa pravého úhlu je rovnoběžná s osou prvního kvadrantu?

4. Vyjádřete součet čtverců délek tělesových úhlopříček rovnoběžnostěnu pomocí délek jeho hran.

5. Uvažujme řez krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky a rovinou, která je kolmá k úhlopříčce AC' a prochází bo-

dem K hrany $A'B'$, přičemž $|A'K| = t$. Spočtěte obvod o a obsah P řezu a zjistěte, pro které hodnoty $t \in \langle 0, a \rangle$ nabývá funkce P maximum a minimum.

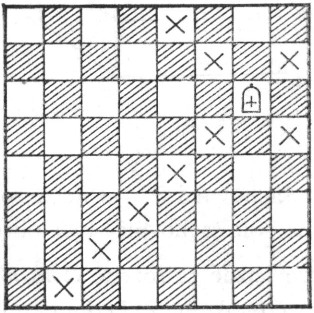
6. Posloupnost (x_n) je definována rekurentně vztahy

$$x_{n+2} = \frac{1 - x_n x_{n+1}}{2 - x_n - x_{n+1}}, \quad x_1 = x_2 = 0\,.$$

Ukažte, že pro každé přirozené číslo n, $n \geqq 3$ je $0 < x_n < 1$.

B - S

1. Na obrázku 1 je šachovnice 8×8 s jedním střelcem. Rozmístěte na ni dalších sedm střelců tak, aby každé neobsazené pole šachovnice bylo ohroženo některým ze střelců. (Například střelec na obrázku ohrožuje všechna pole označená $\times$.)



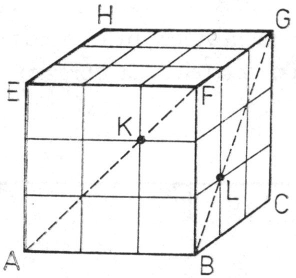
Obr. 1

2. Nechť a, b jsou reálná čísla. Jestliže pro každé celé kladné číslo x je číslo $ax^{1988} + b$ celé, jsou i čísla a, b celá. Dokažte.

3. Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky 2. Pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$ označme P_t bod hrany EF takový, že $|EP_t| = t$. Určete obsah řezu dané krychle rovinou procházející bodem P_t a rovnoběžnou s rovinou BGP_1.

B - II

1. Krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky 3 je rozdělena na 27 krychliček o hraně 1 (obr. 2). Ukažte, že přímka KL je kolmá na stěnové úhlopříčky AF a BG.



Obr. 2

2. Dokažte, že na šachovnici 8×8 nelze rozmístit 7 střelců tak, aby všechna pole šachovnice byla ohrožena.

3. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n $(n \geqq 1)$ existuje polynom f stupně n takový, že hodnoty $f(1), f(2), \ldots, f(n)$, $f(n + 2)$ jsou celá čísla a číslo $f(n + 1)$ není celé.

4. Na rovnoběžných hranách AA', BB', CC' kolmého trojbokého hranolu $ABCA'B'C'$ jsou zvoleny po řadě body K, L, M. Vyjádřete objem tělesa $ABCKLM$ pomocí obsahu S trojúhelníku ABC a délek p, q, r úseček AK, BL, CM.

Kategorie A

A - I

1. Najděte mnohočlen nejmenšího stupně s racionálními koeficienty, který má kořen $\sqrt[1987]{2}$.

2. Dokažte, že střed kulové plochy opsané pravidelnému čtyřstěnu má ze všech bodů prostoru nejmenší součet vzdáleností od jednotlivých vrcholů čtyřstěnu.

3. Předpokládejme, že každý bod roviny je obarven jednou ze dvou barev. Dokažte, že v této rovině existuje rovnostranný trojúhelník, jehož vrcholy jsou obarveny stejnou barvou.

4. Označme P, Q středy stran BC, CA trojúhelníku ABC a T jeho těžiště. Dokažte, že trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AB, právě když je čtyřúhelník $TPCQ$ tečnový.

5. Přiřaďme každé dvojici přirozených čísel (x, y) reálné číslo $f(x, y) \geqq 1$. Pak pro libovolné přirozené číslo k existují přirozená čísla m, n taková, že
$$m + n \geqq k \text{ a } f(m, n) < f(m + 1, n) + f(m, n + 1) .$$
Dokažte.

6. Zjistěte, zda existuje přirozené číslo, jehož dekadický zápis má 23 číslice a které není dělitelné 11, ani když změníme libovolnou z jeho číslic.

A - S

1. Určete nejmenší číslo r, pro které je možno čtverec o straně 10 pokrýt dvěma shodnými kruhy o poloměru r.

2. Určete všechna přirozená čísla n ($n \geqq 2$), pro která má rovnice

$$x^n - 4x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + 1 = 0$$

s reálnými koeficienty všechny kořeny reálné a nezáporné.

3. V prostoru jsou dány body A, P, Q, které neleží na přímce. Popište konstrukci krychle $ABCDEFGH$ takové, že polopřímka AG prochází bodem P a polopřímka BH prochází bodem Q. Najděte podmínky řešitelnosti.

A - II

1. Jestliže čtyři shodné kruhy o poloměru r pokrývají jednotkový čtverec, je $r \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Dokažte.

Zjistěte, zda lze jednotkový čtverec pokrýt pěti shodnými kruhy o poloměru menším než $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

2. Najděte všechna komplexní čísla a, b, pro která má rovnice

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + ax + b = 0$$

v oboru komplexních čísel jen reálné kořeny.

3. V prostoru jsou dány dva různé body P, Q a rovina δ. Popište konstrukci pravidelného čtyřstěnu $ABCD$, jehož

hrana AB leží na úsečce PQ, vrchol D leží v rovině δ, $|\sphericalangle APD| = 30°$ a $|\sphericalangle BQD| = 45°$. Proveďte diskusi.

4. Je dáno přirozené číslo n. Jaké největší hodnoty může nabýt součet

$$|p(1) - 1| + |p(2) - 2| + \ldots + |p(n) - n|\,,$$

je-li p prosté zobrazení množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ na sebe?

A - III

1. Nechť f je zobrazení množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, 1988\}$ do M. Pro libovolné přirozené n položme $x_1 = f(1)$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Zjistěte, zda existuje takové m, že $x_{2m} = x_m$.

2. Jestliže pro koeficienty rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0\,,$$

jejíž všechny kořeny jsou reálné, platí $a^2 = 2(b + 1)$, potom $|a - c| \leqq 2$. Dokažte.

3. Je dán čtyřstěn $ABCD$ s hranami $|AD| = |BC| = a$, $|AC| = |BD| = b$, $|AB| = c$, $|CD| = d$. Určete nejmenší hodnotu součtu $|AX| + |BX| + |CX| + |DX|$, kde X je libovolný bod prostoru.

4. Dokažte, že každé z čísel $1, 2, 3, \ldots, 2^n$ lze zapsat jednou ze dvou barev (červenou a modrou) tak, že žádná nekonstantní $2n$-členná aritmetická posloupnost vybraná z těchto čísel není jednobarevná.

5. Najděte všechna čísla $a \in (-2, 2)$, pro která je mnohočlen $x^{154} - ax^{77} + 1$ násobkem mnohočlenu $x^{14} - ax^7 + 1$.

6. V trojúhelníku $A_1A_2A_3$ se stranami a_1, a_2, a_3 jsou dány tři body, které označíme P_1, P_2, P_3 tak, aby součin jejich vzdáleností od odpovídajících stran a_1, a_2, a_3 byl co největší. Dokažte, že trojúhelníky $P_1A_2A_3$, $A_1P_2A_3$, $A_1A_2P_3$ pokrývají trojúhelník $A_1A_2A_3$.

Korespondenční seminář ÚV MO

1. Řešte rovnici

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = p\,,$$

kde p je reálný parametr.

2. a) Označme E, F, G body na stranách AB, BC, CA trojúhelníku ABC, pro něž platí

$$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|BF|}{|FC|} = \frac{|CG|}{|GA|} = k\,, \qquad 0 < k < 1\,.$$

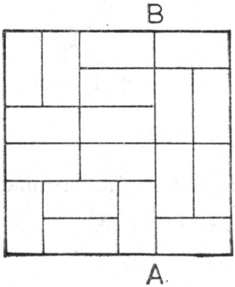
Najděte poměr obsahu trojúhelníku KLM určeného přímkami AF, BG, CE a obsahu trojúhelníku ABC.

b) Rozdělte daný trojúhelník šesti přímkami na takové části, z nichž by bylo možno složit sedm shodných trojúhelníků.

3. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu A. Označme D patu výšky z vrcholu A a sestrojme kružnici k se středem L nad průměrem AD. Průsečíky kružnice k s odvěsnami AB a AC označme K, M. Určete úhly trojúhelníku ABC, víte-li, že délky úseček AK, AL, AM tvoří geometrickou posloupnost.

4. Uvažujme okraj čtvercové šachovnice $n \times n$ o šířce dvou polí. Dokažte, že lze $8(n - 2)$ polí tohoto okraje obejít šachovým koněm, právě když $n - 1$ je dělitelné čtyřmi.

5. Je možné 18 dominových kostek o rozměru 2×1 složit do čtverce tak, aby nevznikl žádný šev spojující protější strany čtverce a jdoucí po hranách kostek? (Např. uspořádání na obr. 3 se nehodí, neboť obsahuje šev AB.)



Obr. 3

6. Devatenáctistěnu je vepsána koule o poloměru 10. Dokažte, že na jeho povrchu existují dva body, jejichž vzdálenost je větší než 21.

7. Uvažujme nekonečný list čtverečkovaného papíru. V každém čtverečku je napsáno číslo, přičemž součet čísel v libovolném čtverci, jehož strany leží na přímkách čtvercové sítě, v absolutní hodnotě není větší než 1. Dokažte, že existuje takové číslo c, že součet čísel v libovolném pravoúhelníku, jehož strany leží na přímkách dané sítě, je nejvýše c.

Dokažte, že uvedené tvrzení platí pro $c = 4$. Může být $c = 3$ nebo $c = 2$?

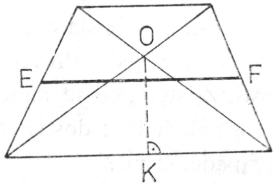
8. V každé ze tří nádob je celočíselný počet litrů vody. Do kterékoli nádoby je dovoleno přelít stejné množství vody, které již v nádobě je, z jiné nádoby. Dokažte, že pomocí takových přelévání můžete jednu z nádob vyprázdnit. (Nádoby jsou dostatečně velké, do každé se vejde celé množství použité vody.)

9. Obdélníková tabulka s m řádky a n sloupci je vyplněna čísly. Srovnejme čísla v každém řádku podle velikosti. Dokažte, že srovnáte-li pak i čísla v každém sloupci podle velikosti, budou i čísla v jednotlivých řádcích srovnána zas podle velikosti. Zjistěte, co se stane, budete-li rovnat nejdříve sloupce a pak řádky: dostanete stejnou tabulku jako v prvním případě, či ne?

10. V tabulce $m \times n$ jsou zapsána čísla tak, že v libovolném pravoúhelníku (tvořeném dvěma řádky a dvěma sloupci tabulky) jsou součty čísel v protějších vrcholech stejné. Část čísel byla smazána, přesto ale bylo možno tabulku jednoznačně doplnit. Dokažte, že v tabulce zůstalo aspoň $n + m - 1$ čísel.

11. Dva hráči hrají »piškvorky« na neohraničeném listu čtverečkovaného papíru podle následujících pravidel. První udělá křížek do libovolného čtverečku. V každém dalším tahu pak dělá křížek do libovolného volného políčka, které sousedí s jedním z políček, na němž už je křížek (sousední políčka jsou ta, která mají společný aspoň jeden vrchol). Druhý hráč udělá v každém svém tahu tři kolečka do libovolných tří volných políček. Dokažte, že ať hraje první hráč jakkoli, druhý ho může »zavřít«, tj. může dosáhnout toho, že první hráč nebude mít kam dát křížek.

12. Na tabuli byl narýsován lichoběžník se střední příčkou *EF* a kolmicí *OK* z průsečíku *O* úhlopříček na větší základnu (obr. 4). Pak byl lichoběžník smazán. Jak lze znovu sestrojit původní lichoběžník ze zachovaných úseček *EF*, *OK*?



Obr. 4

13. Je dáno $2n + 1$ kladných čísel takových, že rozdíl mezi součtem libovolných $n + 1$ daných čísel a součtem zbylých n čísel je kladný. Dokažte, že pro součin B všech $\binom{2n+1}{n+1}$ takových rozdílů a součin A všech $2n + 1$ daných čísel platí

$$B^n \leqq A^{\binom{2n}{n-1}}.$$

14. Je dán konvexní n-úhelník M. Pro mnohoúhelník s vrcholy ve středech stran mnohoúhelníku M platí, že jeho obvod není menší než polovina obvodu M (pro $n \geqq 3$)

a jeho obsah není menší než polovina obsahu M (pro $n \geqq 4$). Dokažte.

15. a) Vrcholu A_1 pravidelného dvanáctiúhelníku $A_1 A_2 \ldots$ $\ldots A_{12}$ je připsáno znaménko —, v ostatních vrcholech je +. Je dovoleno změnit znaménko na opačné v libovolných šesti po sobě jdoucích vrcholech daného mnohoúhelníku. Dokažte, že ani po několika takových operacích nelze dojít k tomu, že by ve vrcholu A_2 bylo minus a v ostatních vrcholech plus.

b) Dokažte totéž tvrzení, je-li dovoleno měnit současně znaménka ne v šesti, ale ve čtyřech po sobě jdoucích vrcholech.

c) Dokažte totéž tvrzení, je-li dovoleno měnit současně znaménka ve třech po sobě jdoucích vrcholech.

16. Jestliže ke každé stěně daného konvexního mnohostěnu sestrojíme v některém jejím bodě vektor k ní kolmý, který bude směřovat ven z tělesa a jehož velikost bude rovna obsahu příslušné stěny, pak bude součet všech takovýchto vektorů roven nule. Dokažte.

17. Dokažte, že pro libovolných n reálných čísel $a_1, a_2, \ldots,$ a_n existuje takové přirozené číslo $k \leqq n$, že každé z k čísel

$$a_k, \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_k), \frac{1}{3}(a_{k-2} + a_{k-1} + a_k), \ldots, \frac{1}{k}(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$$

je nejvýše rovno číslu $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.

18. Množina přirozených čísel má následující vlastnost: ani jedno z čísel množiny nedělí jiné, ale mezi libovolnými třemi čísly vždy některé dělí součet ostatních dvou. Jaký je největší možný počet prvků takové množiny? Jaký je největší možný počet prvků takové množiny, požadujeme-li navíc, aby to byla lichá čísla?

19. Je dáno n reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rozmístěných na kružnici, přičemž $|x_i| = 1$ $(1 \leqq i \leqq n)$ a pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$ jsou součty n součinů všech dvojic čísel vzdálených od sebe k míst vždy nulové $(x_{n+i} = x_i)$:

$$x_1 x_{1+k} + x_2 x_{2+k} + \ldots + x_n x_k = 0$$

Dokažte, že n je čtvercem celého čísla. Čtveřice $-1, 1, 1, 1$ je příkladem takových čísel pro $n = 4$. Existuje taková n-tice pro $n = 16$? Pro jaká n taková n-tice existuje?

20. Dokažte, že pro každé přirozené $n > 1$ platí

$$\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \sin\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) \ldots \sin\left(x + \frac{n-1}{n}\pi\right) = c_n \sin nx\,,$$

kde c_n je nějaké číslo závislé na n. Najděte c_n.

21. S daným přirozeným číslem budeme provádět následující operace:

A) připíšeme k němu číslici 4;

B) připíšeme k němu číslici 0;

C) vydělíme ho číslem 2 (je-li sudé).

Provedeme-li např. s číslem 4 postupně operace C, C, A a B, dostaneme číslo 140. Jak dostaneme pomocí operací A, B, C z čísla 4 číslo 1988? Dokažte, že z čísla 4 lze popsaným způsobem dostat libovolné přirozené číslo.

22. Najděte všechna přirozená čísla m, pro něž

$$1!.3!.5!\dots(2m-1)! = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)!\,.$$

23. Je dán trojúhelník ABC a kladná čísla p, q. Uvnitř daného trojúhelníku najděte bod O s následující vlastností: pro libovolnou přímku procházející bodem O a protínající strany AB a BC v bodech K, L platí

$$p\frac{|AK|}{|KB|} + q\frac{|CL|}{|LB|} = 1\,.$$

24. Označme $s(n)$ ciferný součet přirozeného čísla n (v desítkové soustavě). Přirozené číslo m nazveme »zvláštní«, jestliže je nemůžeme vyjádřit ve tvaru $m = n + s(n)$ pro nějaké přirozené n. Existuje zvláštních čísel jen konečně mnoho?

25. Sestrojíme-li v tětivovém čtyřúhelníku osy úhlů sevřených jeho prodlouženými protějšími stranami, jsou jejich průsečíky se stranami čtyřúhelníku vrcholy kosočtverce. Dokažte.

26. Pomocí čísel $1, 2, \dots, k$ utvořme množinu M všech uspořádaných n-tic $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (je jich k^n). Uvažujme dvě podmnožiny P, Q množiny M, pro které platí: Je-li $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathsf{P}$ a $(q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathsf{Q}$, je $p_i = q_i$ pro aspoň jedno $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dokažte, že jedna z množin P nebo Q má nejvýše k^{n-1} prvků.

27. Najděte nutnou a postačující podmínku pro čísla a, b, α, β, aby šlo obdélník $a \times b$ rozřezat na obdélníky $\alpha \times \beta$.

28. Dva hrají následující hru: Jeden postupně volí číslici, kterou druhý zapíše na místo jedné hvězdičky v následujícím rozdílu

$$\begin{array}{r} \star\ \star\ \star\ \star \\ -\ \star\ \star\ \star\ \star \\ \hline \end{array}$$

atd., celkem osmkrát. Ten, který určuje číslice, se snaží, aby byl rozdíl co největší, druhý zas, aby byl co nejmenší. Dokažte, že:

a) druhý může umísťovat číslice tak, aby vzniklý rozdíl nebyl větší než 4 000 bez ohledu na to, jaké číslice volí první hráč;

b) první může volit číslice tak, aby rozdíl nebyl menší než 4 000 bez ohledu na to, kam je druhý umístí.

29. Najděte poměr velikostí stran trojúhelníku, jehož jedna těžnice je vepsanou kružnicí rozdělena na tři stejné části.

30. Nechť a, b jsou celá čísla. Pro jaká a, b lze rozdělit napůl $a + b$ litrů mléka, máme-li jen nádoby o objemu a, b, $a + b$ litrů?

31. A se zavazuje platit B průměrně $\sqrt{2}$ korun za den. Domluvili se, že n-tý den dostane B celé číslo a_n korun ($a_n \in \{1, 2\}$) tak, aby celková suma po n dnech (tj. $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$) byla co nejblíže číslu $n\sqrt{2}$ (např. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$). Dokažte, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ není periodická.

32. Nechť a, b, m, n jsou přirozená čísla, přičemž a, b jsou nesoudělná a $a > 1$. Dokažte, že pokud $a^n + b^n$ dělí $a^m + b^m$, pak n dělí m.

33. Jestliže součet n kladných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je 1, označme S největší z čísel

$$\frac{x_1}{1 + x_1}, \frac{x_2}{1 + x_1 + x_2}, \ldots, \frac{x_n}{1 + x_1 + \ldots + x_n}.$$

Najděte nejmenší možnou hodnotu S. Pro jaká čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se nabývá?

34. Je možno rozestavit číslice 0, 1, 2 na pole čtverečkovaného papíru o rozměrech 100×100 tak, aby v každém pravoúhelníku 3×4 čtverečky byly tři nuly, čtyři jedničky a pět dvojek?

35. Po skončení hokejového turnaje (jednokolově každý s každým) se ukázalo, že pro libovolnou skupinu mužstev existuje mužstvo, které v zápasech s mužstvy zvolené skupiny získalo lichý počet bodů. Dokažte, že v turnaji hrál sudý počet mužstev.