37. ročník matematické olympiády na středních školách

Medzinárodná matematická olympiáda

In: Leo Boček (editor); Luboš Brim (editor); Tomáš Hecht (editor); Karel Horák (editor): 37. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1987/88. 29. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990. pp. 146–161.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404868

Medzinárodná matematická olympiáda

29. medzinárodná matematická olympiáda sa konala v dňoch 9.—21. júla 1988 v Austrálii pri rekordnej účasti 268 súťažiacich zo 49 krajín. Ďalších 8 krajín - Fidži, Francúzska Polynézia, India, Nová Kaledónia, Reunion, Thajsko, Tonga a Západná Samoa vyslali pozorovateľov. Československo reprezentovalo úplné 6členné družstvo. Súťaž riadila medzinárodná porota, v ktorej každá zúčastnená krajina mala svojho zástupcu.

Porota pod vedením profesora *R. Pottsa* z Austrálie vybrala z návrhov úloh jednotlivých krajín 6 súťažných úloh a rozhodla, že každá úloha bude hodnotená maximálne siedmimi bodmi. Slávnostné zahájenie súťaže bolo popoludní 14. júla za prítomnosti austrálskeho ministra práce a vzdelávania p. *J. S. Dawkinsa.* Žiaci riešili úlohy 15. a 16. júla dopoludní, prvý deň prvú trojicu úloh, 2. deň druhú trojicu úloh, na riešenie bolo k dispozícii po 4,5 hodiny čistého času.

Texty úloh

(v zátvorke za úlohou je uvedena krajina, ktorá úlohu navrhla)

1. V rovine sú dané dve sústredné kružnice s polomermi R a r $(R > r)$ a bod P na menšej kružnici. Nech bod B

je (premenlivý) bod veľkej kružnice. Ďalej nech priamka BP znovu pretína veľkú kružnicu v bode C a kolmica l na priamku BP v bode P pretína malú kružnicu v bode A (ak l je dotyčnica ku kružnici v bode P, tak $A = P$). Potom

I. Nájdite množinu hodnôt výrazu $|AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2$.

II. Nájdite geometrické miesto bodov stredov úsečky AB.

(Luxemburg)

2. Nech n je kladné celé číslo a nech $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_{2n+1}$ sú podmnožiny množiny B. Predpokladajme, že

a) A_i má práve $2n$ prvkov pre $i = 1, 2, \ldots, 2n + 1$

b) $\mathsf{A}_i \cap \mathsf{A}_j$ obsahuje práve jeden prvok pre všetky i, j $1 \leqq i < j \leqq 2n + 1$

c) každý prvok množiny B patrí aspoň do dvoch množín A_i.

Pre ktoré čísla n existuje zobrazenie f: $\mathsf{B} \to \{0, 1\}$ tak, aby každá množina A_i obsahovala práve n prvkov, ktorým je priradená 0? (ČSSR)

3. Na množine kladných celých čísel je definovaná funkcia f nasledovne:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \quad f(3) = 3 \\ f(2n) &= f(n) \\ f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n) \\ f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n) \end{aligned}$$

pre všetky kladné celé čísla n. Určte počet tých celých kladných čísel n neprevyšujúcich 1988, pre ktoré $f(n) = n$. (Veľká Británia)

4. Dokážte, že množina takých reálnych čísel x, pre ktoré

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqq \frac{5}{4}$$

je zložená z disjunktných intervalov, ktorých súčet dĺžok je 1988. (Írsko)

5. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou BC označme D pätu výšky z vrcholu A. Priamka, ktorá spojuje stredy kružníc vpísaných trojuholníkom ABD a ACD pretína strany AB, AC po rade v bodoch K, L. Označme S, resp. T, obsah trojuholníka ABC, resp. AKL. Dokážte, že $S \geqq 2T$. (Grécko)

6. Nech a, b sú také kladné celé čísla, že číslo $ab + 1$ je deliteľom čísla $a^2 + b^2$. Dokážte, že číslo $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ je štvorcom prirodzeného čísla. (SRN)

Vybrané úlohy s výnimkou šiestej úlohy neboli ťažké, boli z klasických tém a ich obťažnosť bola primeraná úrovni súťaže. Šiesta úloha bola veľmi ťažká, vyriešilo ju len 11 súťažiacich, jej riešenie sa zakladalo na netradičnom obrate.

Koordinácia opráv úloh prebehla hladko, takže 19. júla na záverečnom zasadaní poroty sa rozhodovalo už len o bodových hraniciach pre jednotlivé ceny. Stanovili sa takto 33—42 bodov 1. cena, 23—31 2. cena, 14—22 3. cena. 20. júla bolo slávnostné odovzdávanie cien a ukončenie olympiády. Prvé ceny odovzdával austrálsky ministerský predseda p. *R. J. L. Hawke*. Medzi tými, čo získali prvú cenu bol aj 13-ročný Austrálčan *Terrence Tao* (bola to už jeho tretia medzinárodná olympiáda). Jedinú zvláštnu cenu za elegantné riešenie úlohy získal účastník z Bulharska. Výsledky členov československého družstva ako aj ostatných súťažiacich vidno z priloženej tabuľky.

Olympiáda sa konala v rámci osláv 200 rokov bieleho osídlenia Austrálie, bola veľmi dobre organizovaná a pre účastníkov bola veľkým zážitkom. Československé družstvo s výnimkou vedúceho delegácie, *dr. F. Zítka, CSc.*, ktorý ako člen jury priletel skôr, priletelo do Sydney 11. júla, 11.—13. júla strávilo prehliadkou Sydney, 14. júla nás previezli do Canberry, ktorá je asi 300 km na juhozápad od Sydney v horách. Všetky ďalšie činnosti boli potom v Canberre. 15. a 16. júla boli súťažné dni, 17. júla bola prehliadka Canberry, 19. júla výlet do neďalekej prírodnej rezervácie. S množstvom dojmov sme sa vrátili domov, do Prahy, 23. júla.

ČESKOSLOVENSKÁ ÚČASŤ NA MMO

Do súťaže na 29. MMO vyslalo Československo šesť žiakov vybraných na základe výsledkov dosiahnutých v domácej MO, na prípravných sústredeniach, korešpondenčnom seminári ÚV MO a iných podobných akciách. Dvaja boli v šk. roku 1987|88 študentami 2. ročníka, dvaja 3. ročníka a dvaja 4. ročníka gymnázia, piati boli zo špeciálnych matematických tried.

Výkon československého družstva trochu zaostal za očakávaním. Po vcelku dobrom výkone v 1. deň súťaže nastal 2. deň útlm a všetci šiesti súťažiaci dosiahli spolu len 26 bodov zo 126 možných, čo vzhľadom k ľahkej 4. úlohe (jej trik bol dobre známy z domácich súťaží) a nie ťažkej 5. úlohe, bolo málo. Čakalo sa najmä, že všetci československí účastníci získajú cenu. 12. miesto v neoficiálnom hodnotení družstiev medzi 49 krajinami opticky nie je zlé, avšak úroveň starostlivosti o talenty v ČSSR a tradície by dali tušiť výraznejšie úspechy.

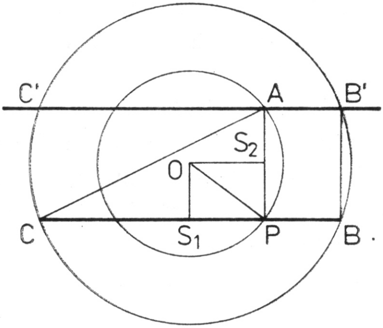
Československo prispelo na MMO aj prácou v jury. Jedna zo šiestich súťažných úloh (úloha č. 2) bola československá, všetky 3 úlohy z čsl. návrhu sa dostali do užšieho výberu úloh pre MMO.

Riešenia úloh

1. *Časť i).* Označme O spoločný stred oboch kružníc, S_1 stred tetivy BC, S_2 stred tetivy AP, $|PC| = c$, $|PB| = b$, $|PA| = a$. Z Pytagorovej vety pre trojuholníky APC, APB dostaneme

$$|AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2 = c^2 + a^2 + b^2 + a^2 + (b + c)^2 = \\ = 2(a^2 + b^2 + c^2 + bc) \qquad (1)$$

Zrejme $|S_2P| = \dfrac{a}{2}$, $|S_1P| = \left|\dfrac{c - b}{2}\right|$, $|S_1C| = \dfrac{b + c}{2}$ (obr. 42).



Obr. 42

Teraz napíšeme Pytagorovu vetu pre trojuholníky OS_2P a OS_1C

$$\left(\frac{c-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = r^2 \tag{2}$$

$$\left(\frac{c+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2 \tag{3}$$

Ak vynásobíme rovnosť (2) dvoma a rovnosť (3) šiestimi a vynásobené rovnosti sčítame, tak dostaneme

$$2(a^2 + b^2 + c^2 + bc) = 2r^2 + 6R^2$$

t.j. vzhľadom na (1)

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2 = 2r^2 + 6R^2$$

čo nezávisí na polohe bodu B.

Časť ii). Veďme bodom A rovnobežku s tetivou BC, jej priesečníky s väčšou kružnicou označme C', B'. Potom $APBB'$ aj $APCC'$ sú pravouholníky a stred uhlopriečky AB je zároveň aj stredom uhlopriečky PB'. Keď bod B prebehne celú veľkú kružnicu, tak aj bod B' prebehne celú veľkú kružnicu, to znamená, že hľadaným geometrickým miestom bodov je kružnica rovnoľahlá s veľkou kružnicou v rovnoľahlosti so stredom P a koeficientom $\frac{1}{2}$.

2. Ukážeme, že každý prvok množiny B patrí práve do dvoch množín A_i. Naozaj, keby prvok $a \in \mathsf{A}_i$ patril do aspoň ďalších dvoch množín $\mathsf{A}_j, \mathsf{A}_k$, tak zvyšných $2n - 1$ prvkov množiny A_i by patrili do zvyšných $2n - 2$ množín (okrem A_i, A_j, A_k) t.j. aspoň dva by patrili do nejakej

množiny A_l a teda $A_i \cap A_l$ by malo aspoň dva prvky.

Potom množina B má $n(2n+1)$ prvkov. Ak n je nepárne, tak požadované zobrazenie neexistuje, pretože ak označíme $B_0 = \{X \in B \mid f(X) = 0\}$, tak počet prvkov množiny B_0 by mal byť $\frac{n(2n+1)}{2}$ (totiž každý prvok patrí práve do dvoch množín), čo nie je možné. Na druhej strane, pre párne n taká funkcia existuje napr. pre $X \in B$, $\{X\} = A_i \cap A_j$ položme $f(X) = 0$ práve vtedy, ak »vzdialenosť« medzi vrcholmi X_i, X_j pravidelného $2n+1$ uholníka $X_1X_2 \ldots X_{2n+1}$ je párna. (Vzdialenosťou tu rozumieme počet úsečiek najkratšej lomenej čiary pozostávajúcej zo strán $2n+1$ uholníka spájajúcej body X_i, X_j).

3. Vypočítajme niekoľko prvých hodnôt funkcie f

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(n)$	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5	13	3	11	7	15

Ak by sme čísla n, $f(n)$ zapísali v dvojkovej sústave, tak naša tabuľka by vyzerala takto

n	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011
$f(n)$	1	1	11	1	101	11	111	1	1001	101	1101

Vzniká hypotéza, že zápis čísla $f(n)$ v dvojkovej sústave vznikne zo zápisu čísla n v dvojkovej sústave obrátením poradia cifier (»čítaním odzadu«). Túto hypotézu dokážeme matematickou indukciou. Pre $n = 1$, $n = 3$ tvrdenie platí. Nech tvrdenie platí pre všetky $n < t$. Ukážeme, že platí aj pre t.

Ak $t = 2n$, tak n, $2n$, a $f(n)$ majú podľa indukčného predpokladu tvar uvedený v tabuľke. Potom $f(2n) = f(n)$ a pohľad do tabuľky nás presvedčí, že tvrdenie platí.

Ak $t = 4n + 1$ tak n, $2n + 1$, $4n + 1$, $f(n)$, $f(2n + 1)$ môžeme podľa indukčného predpokladu vyčítať z tabuľky a $f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n) = f(2n + 1) + (f(2n + 1) - f(n)) = (10c_0c_1 \dots c_k)_2$ č. b. t. d.

Ak $t = 4n + 3$ postupujeme podobne využijúc rovnosť

$$f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(2n) = 2(f(2n + 1) - f(n)) + f(2n + 1)$$

Dôkaz našej hypotézy je skončený. Teraz už vidíme, že $f(n) = n$ keď číslo n má symetrický zápis v dvojkovej sú-

Tabuľka 1

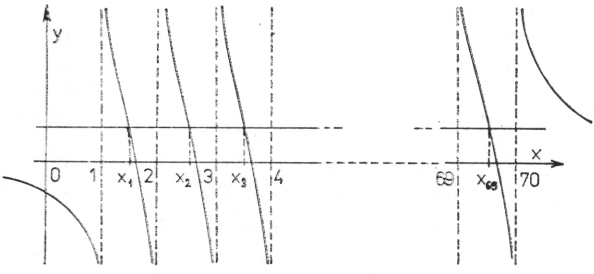
číslo	jeho zápis v dvojkovej sústave						
	2^{k+2}	2^{k+1}	2^k	2^{k-1} …	2^2	2^1	2^0
n			c_k	c_{k-1}	c_2	c_1	c_0
$2n + 1$		c_k	c_{k-1}	c_{k-2}	c_1	c_0	1
$2n$		c_k	c_{k-1}	c_{k-2}	c_1	c_0	0
$4n + 1$	c_k	c_{k-1}	c_{k-2}	c_{k-3}	c_0	0	1
$4n + 3$	c_k	c_{k-1}	c_{k-2}	c_{k-3}	c_0	1	1
$f(n)$			c_0	c_1	c_{k-2}	c_{k-1}	c_k
$f(2n + 1)$		1	c_0	c_1	c_{k-2}	c_{k-1}	c_k
$f(2n + 1) - f(n)$		1	0	0	0	0	0
$2(f(2n + 1) - f(n))$	1	0	0	0	0	0	0

stave. Podľa predpokladu $n \leqq 1988$, teda n je nanajvýš 11 ciferné číslo (v dvojkovej sústave). Nasledujúca tabuľka udáva počet $p(k)$ symetrických k-ciferných čísel,

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p(k)$	1	1	2	2	4	4	8	8	16	16	32

čo v súčte dáva 94 symetrických čísel. Avšak $1988 = (11111000100)_2$ a existujú len dve symetrické 11 ciferné čísla prevyšujúce 1988 a to $(11111011111)_2$ a $(11111111111)_2$, takže hľadaný počet je 92.

4. Označme $f(x)$ súčet $\sum\limits_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k}$. Na obrázku 43 vidíme nakreslený graf funkcie $y = f(x)$. Je totiž jasné, že na každom intervale $(i, i+1)$ $i = 1, 2, \ldots, 69$ je funkcia $f(x)$ ako súčet klesajúcich funkcií klesajúca. To samé platí pre intervaly $(-\infty, 1)$, $(70, \infty)$. Ďalej vidíme, že $\lim\limits_{x \to i^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to i^+} f(x) = \infty$ pre $i = 1, 2, \ldots, 70$ a že $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$



Obr. 43

$= \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$. Tieto fakty implikujú, že graf funkcie $y = f(x)$ je kvalitatívne taký, ako je nakreslený na obrázku 43.

Z obrázku vidíme, že riešením našej nerovnice bude zjednotenie 70 disjunktných intervalov tvaru $(i, x_i\rangle$, kde x_i je koreň rovnice $\sum\limits_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} = \frac{5}{4}$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_{70}$ pre $i = 1, 2, \ldots, 70$. To však znamená že súčet dĺžok týchto 70 intervalov $S = \sum\limits_{k=1}^{70} x_i - \sum\limits_{i=1}^{70} i$. Upravujme našu rovnicu. Postupne dostávame:

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k(x-1)(x-2)\ldots(x-70)}{x-k} =$$

$$= \frac{5}{4}(x-1)(x-2)\ldots(x-70)$$

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-70) -$$

$$- \frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70} \frac{k(x-1)(x-2)\ldots(x-70)}{x-k} = 0$$

teda rovnicu tvaru

$$x^{70} + a_{69}x^{69} + \ldots + a_0 = 0$$

Zo súvisu medzi koreňmi a koeficientami normovaného polynómu vieme, že $\sum\limits_{k=1}^{70} x_i = -a_{69}$. Avšak

$$a_{69} = -\sum_{k=1}^{70} k - \frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70} k = -\frac{9}{5}\sum_{k=1}^{70} k$$

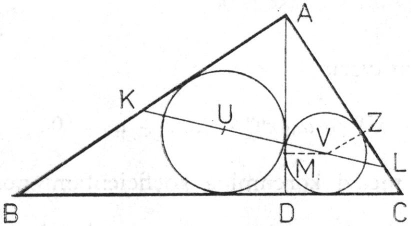
lebo k-tý sčítanec v sume má koeficient pri x^{69} rovný $\frac{4}{5}\,k$.

Potom $S = \sum_{i=1}^{70} x_i - \sum_{i=1}^{70} i = \frac{4}{5}\sum_{i=1}^{70} i = 1988$ č. b. t. d.

5. Označme U resp. V stred kružnice vpísanej trojuholníku ABD resp. trojuholníku ACD, Z resp. M bod dotyku kružnice vpísanej trojúholníku ACD a strany AC resp. AD. Dôkaz spravíme v troch krokoch:

a) ukážeme, že $\Delta\, UDV \sim \Delta\, BAC$
b) ukážeme, že $\Delta\, AKL$ je rovnoramenný a pravouhlý
c) ukážeme, že $|AL| = |AD|$

a) Nech r je polomer kružnice vpísanej trojuholníku BAC (obr. 44), r_1 trojuholníku ADC, r_2 trojuholníku ADB. Z podobnosti trojuholníkov ABC, DAC, DBA vyplýva, že



Obr. 44

$$r_1 = r\frac{|AC|}{|BC|},\; r_2 = r\frac{|AB|}{|BC|} \text{ teda } \frac{|DU|}{|DV|} = \frac{r_2\sqrt{2}}{r_1\sqrt{2}} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

čo spolu s kolmosťou strán UD, VD dokazuje, že trojuholník UDV je podobný s trojuholníkom BAC.

b) Všimnime si štvoruholník $CDUL$. Z podobnosti $\Delta ABC \sim \Delta DUV$ vyplýva, že $|\sphericalangle DUV| + |\sphericalangle BCA| = \frac{\pi}{2}$, čo spolu s faktom $|\sphericalangle UDC| = \frac{3}{4}\pi$ dáva rovnosť $|\sphericalangle ULC| = \frac{3}{4}\pi$, teda trojuholník KLA je rovnoramenný $\left(\text{lebo } |\sphericalangle KLA| = \frac{\pi}{4}, |\sphericalangle BAC| = \frac{\pi}{2}\right)$.

c) $|ZL| = r_1$, lebo VZL je rovnoramenný trojuholník. Potom $|AL| = |AZ| + r_1 = |AM| + r_1 = |AD|$. Avšak $S = \frac{1}{2}|AD|.|BC|$, $2T = |AD|^2$. Požadovaná nerovnosť je potom ekvivalentná s nerovnosťou $|BC| \geqq 2|AD|$, ktorú ľahko nahliadneme, ak narysujeme Tálesovu kružnicu nad priemerom BC.

6. Nech $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = q$, $q \in N$. Potom

$$a^2 + b^2 = qab + q \tag{1}$$

Dôkaz urobíme sporom. Ak tvrdenie neplatí, tak existujú celé kladné čísla a, b, q, ktoré spĺňajú (1) a navyše také, že q nie je štvorcom prirodzeného čísla. Spomedzi takýchto trojíc celých čísel, zvoľme tú, v ktorej je b najmenšie (ak je takýchto trojíc viac, tak ľubovoľnú z nich).

Nech je to trojica a_0, b_0, q_0. Potom q_0 nie je štvorec a zrejme $a_0 \geqq b_0 > 0$ (ináč by sme zamenili a_0, b_0 resp. $q_0 = a_0^2$). Ďalej kvadratická rovnica

$$x^2 - q_0 b_0 x + b_0^2 - q_0 = 0$$

má podľa (1) celočíselný koreň a_0. Potom aj jej druhý koreň a' je celočíselný a očividne platí $a_0 a' = b_0^2 - q_0 \neq 0$, teda

$$a' = \frac{b_0^2 - q_0}{a_0} < \frac{b_0}{a_0} \leqq \frac{b_0^2}{b_0} = b_0$$

Vzhľadom k rovnosti $a_0 a' = q_0 b_0$ je zrejme $a' > 0$.

Čísla a', b_0, q_0 tvoria tiež protipríklad a po zámene premenných a', b_0 dostávame protipríklad, v ktorom je $b < b_0$, čo je spor s predpokladom minimality b_0.

Celkové výsledky 29. MMO

Štát	Počet účast.	1. cena	2. cena	3. cena	Súčet bodov
Alžírsko	5		1		42
Argentína	3				23
Austrália	6	1		1	100
Belgicko	6			3	76
Brazília	6				39
Bulharsko	6		4	2	144
Cyprus	6				21
ČSSR	6		2	2	120
Čína	6	2	4		201
Ekuádor	1				1
Filipíny	5				29
Fínsko	6			2	65
Francúzsko	6	1	1	3	128
Grécko	6			1	65
Holandsko	6			3	85
Indonézia	3				6
Irán	6		1	3	86
Írsko	6				30
Island	4			1	37
Izrael	6	1		4	115
Južná Kórea	6			3	79
Kanada	6	1	1	2	124
Kolumbia	6			3	66
Kuba	6				35
Kuwait	6				23

Štát	Počet účast.	1. cena	2. cena	3. cena	Súčet bodov
Luxemburg	3		1	2	64
Maďarsko	6		2	2	109
Maroko	6			2	62
Mexico	6			1	40
NDR	5	1	4		145
NSR	6	1	4	1	174
Nórsko	6				33
Nový Zéland	6		1		47
Peru	6			1	55
Poľsko	3		1		54
Rakúsko	6	1	1	1	110
Rumunsko	6	2	4		201
Hong Kong	6			2	68
Singapúr	6		2	2	96
Španielsko	6				34
Švédsko	6	1		4	115
Taliansko	4			1	44
Tunis	4			3	67
Turecko	6			2	65
USA	6		5	1	153
Veľká Británia	6		3	2	121
Vietnam	6	1	4		166
Juhoslávia	6			4	92
ZSSR	6	4	2		217

Meno a škola	Počet bodov za úlohu 1	2	3	4	5	6	Celkom	Cena	Umiestnenie
Petr Čížek 3. r. GWP Praha	7	7	7	1	5	1	28	2.	38.—43.
Pavol Gvozdjak 4. r. GAM Bratislava	4	7	7	3	0	0	21	3.	73.—81.
Petr Hliněný, 2. r. Gymnázium Bílovec	6	0	1	2	1	0	10	—	166.—173.
Stanislav Krajčí 4 r. Gymn. Šmeralova, Košice	7	7	2	2	3	0	21	3.	73.—81.
Ilja Martišovitš, 3. r. Gym. Novohradská, Bratislava	7	7	7	0	7	0	28	2.	38.—43.
Ondrej Šuch 2. r. GAM Bratislava	4	0	7	1	0	0	12	—	140.—149.