38. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie C

In: Leo Boček (editor); Jiří Binder (editor); Tomáš Hecht (editor); Karel Horák (editor); Pavel Töpfer (editor): 38. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1988/89. 30. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. pp. 43–55.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404876

Kategorie C

Texty úloh

C - I - 1

V magickém čtverci 3×3 jsou vepsána přirozená čísla tak, že všechny součiny tří čísel v řádcích, sloupcích i úhlopříčkách jsou stejné. Dokažte, že je pak součin všech devíti vepsaných čísel devátou mocninou přirozeného čísla.

C - I - 2

Rovnostranný trojúhelník ABC o délce strany 4 cm otočíme kolem jeho průsečíku výšek o $90°$, dostaneme tak trojúhelník $A'B'C'$. Určete obsah průniku trojúhelníků ABC a $A'B'C'$.

C - I - 3

Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} 9x + y + z &= 83 \\ x + 9y + z &= 99 \\ x + y + 9z &= 69, \end{aligned}$$

která má při změně jednoho čísla na pravé straně na jiné dvojciferné číslo celočíselné řešení. Najděte toto číslo a příslušné řešení soustavy.

C - I - 4

Vrcholem C trojúhelníku ABC veďte přímku p tak, aby součet vzdáleností bodů A, B od přímky p byl největší.

C - I - 5

Dokažte, že existuje přirozené číslo k, pro které existuje právě 1 988 různých pythagorejských trojúhelníků s odvěsnou délky k. (Pythagorejský trojúhelník je pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými délkami stran.)

C - I - 6

Jaký největší počet čísel je možné vybrat z čísel 1, 2, ..., 1 989, aby žádné z nich se nerovnalo součtu jiných dvou vybraných čísel?

C - S - 1

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky 12 cm, D je střed strany BC. Vypočtěte obsah průniku čtverců $ADKL$, $ABMN$, které neobsahují bod C.

C - S - 2

Opravte pravou stranu právě jedné z rovnic $x + 2y = 43$,

$2x + y = 50$, $x + y = 30$, $x - y = 4$ tak, aby opravená soustava měla řešení v oboru reálných čísel. Napište opravenou soustavu a její řešení.

C-S-3

Ve třídě je 30 žáků, každému je přiřazeno pořadové číslo podle abecedního seznamu. Učitel vyvolává žáky podle tohoto pravidla: Sečte pořadová čísla dvou posledně vyvolaných žáků, a jestliže je součet větší než 30, odečte číslo 30. Výsledek je pořadové číslo žáka, který bude vyvolán. Dokažte, že nemohou být bezprostředně po sobě vyvoláni Horáček, Šebestová a Mach v tomto pořadí.

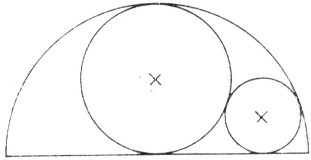
C-II-1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + xy + xz &= 80 \\ xy + y^2 + yz &= 48 \\ xz + yz + z^2 &= -64. \end{aligned}$$

C-II-2

Do půlkruhu s poloměrem 4 jsou vepsány dva kruhy s průměry 4 a d, které se dotýkají (obr. 1). Vypočtěte d.



Obr. 1

C - II - 3

Je dán pravidelný dvanáctiúhelník $A_1A_2A_3\ldots A_{12}$ vepsaný kružnici s poloměrem 10. Vypočtěte obsah lichoběžníku $A_1A_2A_4A_5$.

C - II - 4

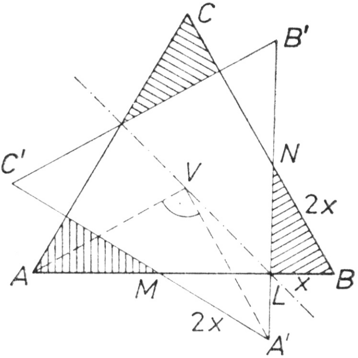
Množina M se skládá z $n + 1$ celých kladných čísel menších než $2n$. Dokažte, že některé z nich se rovná součtu nejmenšího čísla z množiny M a některého dalšího čísla z této množiny.

Řešení úloh

C - I - 1

Označme po řadě a, b, c čísla vepsaná do prvního řádku, podobně d, e, f čísla v druhém a g, h, i čísla v třetím řádku magického čtverce. Označme dále s součin čísel v řádku, sloupci nebo na diagonále. Je tedy $s = abc = def = ghi = adg = beh = cfi = aei = gec$. Proto je $s^4 = (def).(beh).(aei).(gec) = (abc).(def).(ghi).e^3 = s^3e^3$, odkud plyne $s = e^3$. Pro součin všech devíti vepsaných čísel pak platí $(abc).(def).(ghi) = s^3 = e^9$, je to tedy devátá mocnina toho čísla, které stojí uprostřed čtverce.

Označme M průsečík přímek AB a $C'A'$, N průsečík přímek BC a $A'B'$ (obr. 2), průsečík výšek trojúhelníku ABC označíme V. Otočení kolem bodu V o pravý úhel složíme ještě s osovou souměrností podle osy úsečky $A'B'$. Výsledné zobrazení zobrazuje bod A na bod B', bod B na bod A', bod C na bod C', bod V je samodružný, zobrazí se na sebe. Toto složené zobrazení je tudíž osová souměrnost, neboť zobrazuje trojúhelník AVB na trojúhelník $B'VA'$. Průsečík L přímky AB a jejího obrazu $B'A'$ je tedy také samodružný, bod M se zobrazí na bod N a bod N na bod M. Označíme-li $x = |LB| = |A'L|$, je $|LN| = |ML| = x\sqrt{3}$ a $|BN| = |MA'| = 2x$, neboť trojúhelník LBN je pravoúhlý a jeho vnitřní úhel při vrcholu B je 60°. Je ovšem též $|AM| = 2x$, protože při otočení kolem bodu V o 120°, při kterém se bod A zobrazí na bod B a bod B na bod C, zobrazí se bod C'



Obr. 2

na bod A' a bod A' na bod B', takže se bod M zobrazí na bod N. Je $|AB| = 4 = |AM| + |ML| + |LB| = 2x + x\sqrt{3} + x = x(3 + \sqrt{3})$, odkud $x = \dfrac{2(3 - \sqrt{3})}{3}$.

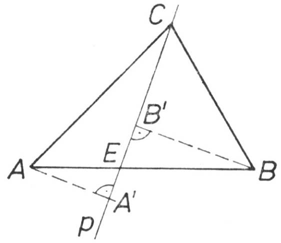
Obsah průniku trojúhelníků ABC, $A'B'C'$ dostaneme, když od obsahu trojúhelníku ABC odečteme obsah vyšrafované části, tj. trojnásobek obsahu trojúhelníku BLN. Výsledek je $4(3 - \sqrt{3})$.

C - I - 3

Jsou-li čísla x, y, z řešením dané soustavy, je $8(y - x) = 16$, $8(y - z) = 30$ a $8(x - z) = 14$. Poslední dvě rovnice, které jsme dostali odečtením třetí rovnice od prvních dvou rovnic soustavy, ukazují, že x, y, z nemohou být celá čísla. Jelikož máme změnit pravou stranu jen jedné z daných rovnic, musí to být rovnice třetí, číslo 69 nahradíme zatím neznámým číslem a. Z prvních dvou rovnic plyne $y = x + 2$, dosazením do první a třetí rovnice dostaneme $10x + z = 81$, $2x + 9z = a - 2$, odkud $88x = 731 - a = 88 . 7 + 115 - a$. Má-li být x celé číslo, musí být číslo $115 - a$ dělitelné číslem 88. Jelikož má být číslo a dvojciferné, musí být $a = 27$. Je pak $x = 8$, $y = 10$, z vychází rovněž celočíselné, $z = 1$.

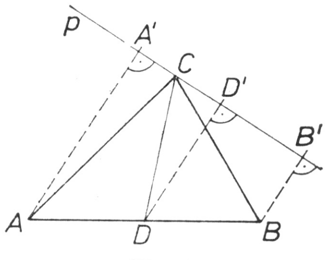
C - I - 4

Uvažujme nejdříve jen ty přímky, které procházejí bodem C a protínají úsečku AB (obr. 3). Označme E společný bod přímky p (procházející bodem C) a úsečky AB, paty



Obr. 3

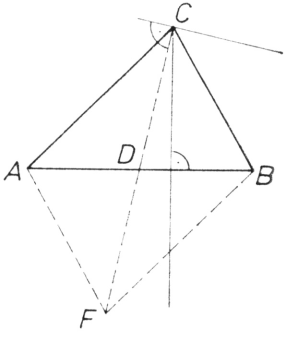
kolmic vedených body A, B na přímku p označíme A', B'. Je pak $|AA'| + |BB'| \leqq |AE| + |BE| = |AB|$, přičemž $|AA'| + |BB'| = |AB|$ právě tehdy, když je přímka p kolmá k přímce AB a body A', B', E splynou. Uvažujme nyní přímku p, která nemá společný bod s úsečkou AB (obr. 4)



Obr. 4

a prochází samozřejmě bodem C. Opět označíme A', B' paty kolmic vedených body A, B k přímce p, dále označíme D' patu kolmice vedené k přímce p středem D úsečky AB. Úsečka DD' je střední příčkou v lichoběžníku $AA'B'B$ (je-li přímka p rovnoběžná s přímkou AB, je to ovšem obdélník), proto je $|AA'| + |BB'| = 2.|DD'| \leqq 2.|CD|$. Přitom $|AA'| + |BB'| = 2.|CD|$ právě tehdy, když je přímka p

kolmá k přímce CD. Doplňme trojúhelník ABC na rovnoběžník $AFBC$ (obr. 5). Je-li $|CF| = 2.|CD| > |AB|$, je hledanou přímkou přímka p procházející bodem C kolmo k přímce CF, neboť z $|CF| > |AB|$ plyne, že přímka p neprotíná úsečku AB. Je-li $|CF| < |AB|$, je hledanou přímkou p přímka procházející bodem C a kolmá k přímce AB. Přímka p pak úsečku AB protíná. Je-li $|CF| = |AB|$, má úloha dvě řešení, kolmici vedenou bodem C ke straně AB (ta úsečku AB protíná) a dále kolmici vedenou bodem C k úhlopříčce CF obdélníku $AFBC$ (ta úsečku AB neprotíná).



Obr. 5

C - I - 5

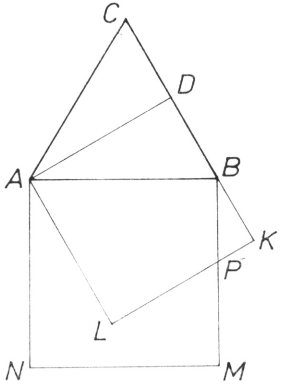
Označme a a c délky druhé odvěsny a přepony pythagorejského trojúhelníku, jehož první odvěsna má délku k. Je tedy $k^2 = c^2 - a^2 = (c - a)(c + a)$. Čísla $c - a$, $c + a$ musejí být obě lichá nebo obě sudá a první je menší než druhé. Naše úloha bude vyřešena, najdeme-li takové číslo k, jehož druhá mocnina se dá právě 1 988 způsoby napsat jako součin dvou přirozených čísel stejné parity, přičemž první z nich je menší než druhé. Nejlépe je zkusit vzít nějakou mocninu prvočísla. Vyhovuje například $k = 3^{1988}$, tedy $k^2 = 3^{3976}$. Toto číslo můžeme právě 1 988 způsoby napsat jako součin dvou přirozených čísel tak, aby byly splněny výše uvedené podmínky. Jde o rozklady $k^2 = 3^a . 3^{3976-a}$, kde a probíhá čísla 0, 1, 2, ..., 1 987. Mohli jsme též zvolit $k = 2^{1989}$, tedy $k^2 = 2^{3978}$. Jediné rozklady splňující požadavky úlohy jsou $k^2 = 2^b . 2^{3978-b}$, b nabývá hodnot 1, 2, ..., 1 988.

C - I - 6

Vybereme-li z daných čísel všechna lichá čísla, těch je 995, pak se žádné z vybraných čísel nerovná součtu dvou jiných vybraných, neboť součet každých dvou lichých čísel je číslo sudé. Ukážeme ještě, že více než 995 vybrat nelze. Předpokládejme, že jsme vybrali 996 čísel, od každého z nich odečteme nejmenší vybrané číslo. Dostaneme tak 995 čísel menších než 1 989. Spolu s vybranými 996 čísly je jich dohromady 1 991. Všechna jsou menší než 1 990. Nutně tedy existují mezi vybranými 996 čísly aspoň dvě různá čísla x_1, x_2 tak, že se každé z nich rovná jinému vybranému číslu zmenšenému o nejmenší vybrané číslo z, tj. $x_1 = y_1 - z$, $x_2 = y_2 - z$. Je zřejmě $x_1 \neq y_1 \neq z$, $x_2 \neq y_2 \neq z$. Je-li $x_1 = z$, je $x_2 \neq z$, takže buď čísla x_1, y_1, z, nebo čísla x_2, y_2, z jsou navzájem různá a $x_1 + z = y_1$, $x_2 + z = y_2$. Tím jsme ukázali, že mezi každými 996 přirozenými čísly menšími než 1 990 existují tři navzájem různá čísla tak, že jedno z nich je součtem zbývajících dvou. Odpověď na otázku úlohy je 995.

C-S-1

Je $|AD| = 6\sqrt{3}$ cm, $|BD| = 6$ cm, tedy $|BK| = 6(\sqrt{3} - 1)$ cm (obr. 6). Označme P průsečík úseček KL a BM. Je $|\sphericalangle PBK| = 30°$, takže $|PK| = |BK| : \sqrt{3}$ cm $= (6 - 2\sqrt{3})$ cm. Hledaný obsah dostaneme, když od obsahu čtverce $ADKL$ odečteme obsah trojúhelníku ADB a obsah trojúhelníku PBK, výsledek je $(6\sqrt{3})^2 - 18\sqrt{3} - 12(2\sqrt{3} - 3) = (144 - 42\sqrt{3})$ cm^2.



Obr. 6

C-S-2

Z prvních dvou rovnic plyne $x = 19$, $y = 12$. Tyto hodnoty nevyhovují žádné z dalších dvou rovnic. Z toho plyne, že je třeba opravit jednu z prvních dvou rovnic. Poslední dvě rovnice mají řešení $x = 17$, $y = 13$. Tyto hodnoty vyhovují první rovnici, druhou rovnici je třeba opravit na $2x + y = 47$, řešení je $x = 17, y = 13$.

C-S-3

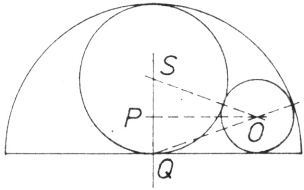
Označme h, $š$, m pořadová čísla Horáčka, Šebestové a Macha, je tedy $h < m < š$. Kdyby byli bezprostředně za sebou vyvoláni Horáček, Šebestová a Mach v tomto pořadí, muselo by platit $h + š = m$ nebo $h + š - 30 = m$. Avšak $h + š$ se nerovná m, protože $š > m$. Druhá rovnost také nemůže platit, neboť $š - 30$ se rovná nule nebo je to číslo záporné, takže $h + š - 30 \leqq h < m$.

C-II-1

Je-li trojice x, y, z řešením dané soustavy, je $x(x + y + z) = 80$, $y(x + y + z) = 48$, $z(x + y + z) = -64$, takže $x : y : z = 5 : 3 : (-4)$. Položíme-li tudíž $x = 5k$, $y = 3k$, $z = -4k$, dostaneme $k^2 = 4$, takže $k = 2$ nebo $k = -2$. Soustava má dvě řešení: $x = 10, y = 6, z = -8$ a $x = -10$, $y = -6$, $z = 8$.

C-II-2

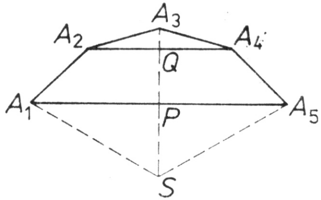
Z pravoúhlých trojúhelníků SOP, OPQ (obr. 7) plyne $|SO|^2 - |SP|^2 = |OQ|^2 - |PQ|^2$, tj. $(2 + r)^2 - (2 - r)^2 = (4 - r)^2 - r^2$, kde r je poloměr menšího kruhu. Odtud $r = 1$, $d = 2$.



Obr. 7

C - II - 3

Označme S střed kružnice opsané dvanáctiúhelníku (obr. 8) a P, Q paty kolmice vedené bodem S k úsečkám A_1A_5, A_2A_4. Je $|A_2A_4| = 10$, $|SQ| = 5\sqrt{3}$. Protože $|\sphericalangle PSA_5| = 60°$, je $|PS| = 5$ a $|A_1A_5| = 2|PA_5| = 2.5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$, tedy $|PQ| = 5\sqrt{3} - 5$. Obsah lichoběžníku je $25(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 50$.



Obr. 8

C - II - 4

Označme a nejmenší číslo z množiny M, nechť $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$ jsou všechna další čísla z množiny M. Přirozená čísla

$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1 - a, a_2 - a, \ldots, a_n - a$ jsou vesměs menší než $2n$ a je jich právě $2n$. Proto nemohou být navzájem různá, pro některé i a některé j ($j \neq i$) musí platit $a_i = a_j - a$, tj. $a_j = a_i + a$, což jsme měli dokázat.