# 38. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie A

In: Leo Boček (editor); Jiří Binder (editor); Tomáš Hecht (editor); Karel Horák (editor); Pavel Töpfer (editor): 38. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1988/89. 30. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. pp. 70–112.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404878

# Kategorie A

## Texty úloh

### A - I - 1

Dokažte, že existuje nekonečně mnoho kvádrů tak, že žádné dva nejsou podobné a jejich hrany a tělesové úhlopříčky mají celočíselnou velikost.

### A - I - 2

Najděte nejmenší přirozené číslo $r$, pro něž existují podmnožiny $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ množiny $\{1, 2, \ldots, r\}$ takové, že pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ platí

$$|A_i| = 5, \qquad |A_i \cup A_{i+1}| = 10 \qquad (A_6 = A_1).$$

### A - I - 3

Pro každé přirozené číslo $n$ je dána nekonečná množina $A_n$, přičemž každé dvě z nich mají konečný průnik. Dokažte, že existuje množina $B$, pro kterou $B \cap A_n$ je nekonečná, právě když $n$ je sudé.

## A - I - 4

Uvnitř trojúhelníku $ABC$ je dán bod $P$. Vedeme-li bodem $P$ rovnoběžky se stranami daného trojúhelníku, dostaneme tři trojúhelníky a tři rovnoběžníky. Dokažte, že součet obsahů těchto tří trojúhelníků je roven aspoň jedné třetině obsahu trojúhelníku $ABC$.

## A - I - 5

Pro nesoudělná celá čísla $p > q > 0$ označme

$$\mathsf{A} = \left\{ \left[ n \frac{p}{q} \right] ; n \in \{1, 2, \ldots, q\} \right\},$$

$$\mathsf{B} = \left\{ \left[ n \frac{p}{p-q} \right] ; n \in \{1, 2, \ldots, p-q\} \right\}.$$

Najděte všechna čísla z množiny $\{1, 2, \ldots, p\}$, jež nepatří do $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$.

## A - I - 6

Na přímce jsou dány tři různé body $A, B, C$. Sestrojte kružnici procházející body $A, B$ tak, aby její tečny z bodu $C$ byly navzájem kolmé.

## A - S - 1

Množina $M$ má právě $n$ prvků. Kolik existuje dvojic množin $(B, C)$ takových, že $B \subset C \subset M$? (Prázdná množina a množina $X$ jsou podmnožiny množiny $X$.)

## A - S - 2

Je dán trojúhelník $ABC$, $|AB| < |AC|$. Popište konstrukci bodu $B'$ na straně $AB$ a bodu $C'$ na straně $AC$, pro které platí, že $B'C' \parallel BC$ a kružnice opsaná trojúhelníku $BB'C'$ se dotýká přímky $AC$.

## A - S - 3

Dokažte, že neexistuje kvádr, jehož rozměry tvoří tříčlennou aritmetickou posloupnost přirozených čísel, jestliže jeho tělesová úhlopříčka má mít také celočíselnou délku.

## A - II - 1

Je dán tětivový lichoběžník $ABCD$ se základnami $AB$, $CD$. Označme $E$ průsečík jeho úhlopříček a $F$ průsečík tečen sestrojených k opsané kružnici v bodech $B$ a $C$. Dokažte, že přímky $EF$ a $AB$ jsou rovnoběžné.

## A - II - 2

Určete nutnou a postačující podmínku pro délky $a, b, c$ stran trojúhelníku $ABC$, aby byl podobný trojúhelníku $PQR$

se stranami $|QR| = t_c$, $|RP| = t_b$, $|PQ| = t_a$, což jsou délky těžnic trojúhelníku $ABC$.

## A - II - 3

Najděte všechny neprázdné disjunktní množiny A, B, jejichž sjednocení je množina N všech přirozených čísel a pro které platí: $1989 \in \mathsf{A}$,

$$x \in \mathsf{A}, y \in \mathsf{A} \Rightarrow x + y \in \mathsf{A},$$
$$x \in \mathsf{B}, y \in \mathsf{B} \Rightarrow xy \in \mathsf{B}.$$

## A - II - 4

Je dáno $n$ bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce. Každá přímka, která neprochází žádným z daných bodů, určuje rozklad daných bodů na dvě disjunktní podmnožiny. Kolik různých rozkladů lze takto dostat? (Rozklady porovnáváme jako neuspořádané dvojice množin.)

## A - III - 1

V rovině jsou dány tři různé body $A$, $B$, $C$ ležící na kružnici se středem $S$ a přímka $p$ kolmá na $AS$. Průsečíky přímky $p$ s přímkami $AB$, $AC$ označme $D$ a $E$. Dokažte, že body $B$, $C$, $D$, $E$ leží na jedné kružnici.

## A - III - 2

V rovině je dáno $mn$ úseček, které spojují $n$ daných bodů.

Dokažte, že z nich lze vybrat posloupnost $V_0, V_1, \ldots, V_m$ různých bodů tak, že $V_{i-1}$ a $V_i$ jsou spojeny úsečkou $(1 \leqq i \leqq m)$.

## A - III - 3

Pro daná nesoudělná čísla $p > q > 0$ najděte všechny dvojice reálných čísel $c, d$ tak, aby pro množiny

$$\mathsf{A} = \left\{\left[n\frac{p}{q}\right]; n \in \mathsf{N}\right\} \quad \text{a} \quad \mathsf{B} = \{[cn + d]; n \in \mathsf{N}\}$$

platilo $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{N}$, kde $\mathsf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ je množina všech přirozených čísel.

## A - III - 4

Délky stran trojúhelníku T′ se rovnají délkám těžnic trojúhelníku T. Shodují-li se trojúhelníky T a T′ v jednom úhlu, jsou podobné. Dokažte.

## A - III - 5

Uvažujme obdélníkový pás $2 \times n$ a označme $P_n$ počet všech takových obarvení některých jeho polí, že žádný čtverec $2 \times 2$ v něm nebude celý obarven. Dokažte, že číslo $P_{1989}$ je dělitelné třemi, a najděte největší mocninu trojky, která je dělí.

## A - III - 6

Uvažujme konečnou posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_n$, jejíž členy jsou přirozená čísla nejvýše rovná $n$. Určete maximální počet členů takové posloupnosti, když víte, že každé dva její sousední členy jsou různé a přitom v ní neexistuje čtveřice členů taková, že $a_p = a_r \neq a_q = a_s$ pro $p < q < r < s$.

# Řešení úloh

## A - I - 1

Úloha souvisí s řešením diofantické rovnice (tj. hledáme jen její celočíselná, resp. přirozená řešení)

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2. \tag{1}$$

Každému jejímu řešení $(a, b, c, d)$ totiž podle Pythagorovy věty odpovídá kvádr, jehož tři navzájem kolmé hrany mají délky $a$, $b$, $c$ a jehož tělesová úhlopříčka má délku $d$.

Rovnice (1) však zřejmě souvisí s jinou, poměrně dobře známou diofantickou rovnicí

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{2}$$

(její řešení v přirozených číslech dává tzv. pythagorejské trojúhelníky, tj. pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnou délkou stran). Najdeme-li např. nějaké její řešení $(x, y, z)$ takové, že i rovnice $a^2 + b^2 = x^2$ má celočíselné řešení, vidíme hned, že čísla $a, b, c = y, d = z$ jsou řešením původní rovnice (1).

Rovnice (2) však má nekonečně mnoho řešení, která umíme dobře popsat. Její podrobné řešení můžeme kromě jiného najít i v ročence 26. ročníku MO (A — P — 1). Každé primitivní řešení rovnice (2), tj. takové řešení, že čísla $x, y, z$ jsou navzájem nesoudělná, můžeme vyjádřit jako

$$x = 2uv,\ y = u^2 - v^2,\ z = u^2 + v^2,$$

kde $u, v$ jsou nesoudělná přirozená čísla taková, že $u > v$ a součin $uv$ je sudý. Přitom podmínka sudosti součinu $uv$ jenom zaručuje, že získaná čísla $x, y, z$ nebudou všechna sudá, tedy soudělná.

Ale i řešení rovnice $a^2 + b^2 = x^2$ můžeme analogicky vyjádřit ve tvaru

$$a = 2UV,\ b = U^2 - V^2,\ x = U^2 + V^2$$

pro vhodná $U > V$, která zřejmě stačí volit tak, aby $U^2 + V^2 = 2uv$ bylo sudé číslo.

Vidíme, že vhodnou volbou parametrů $u, v, U, V$ nyní snadno najdeme nekonečnou množinu řešení rovnice (1)

$$a = 2UV,\ b = U^2 - V^2,\ c = u^2 - v^2,\ d = u^2 + v^2.$$

My však ještě potřebujeme, aby žádné dva z odpovídajících kvádrů nebyly podobné. Na to stačí, abychom vybrali jen taková řešení $(a, b, c, d)$, v nichž jsou čísla $a, b, c, d$ nesoudělná.

Z rovnosti $U^2 + V^2 = 2uv$ plyne, že čísla $U$, $V$ musí mít stejnou paritu. Vezmeme-li však $U$, $V$ lichá, snadno zjistíme, že všechna čísla $a$, $b$, $c$, $d$ vyjdou sudá. Zkusme proto volit $U > V$ sudá a $v = 1$. Pak určitě vyjde $uv = u$ sudé, $u \geqq 2 > > v$, což už zaručuje nesoudělnost řešení rovnice (2), a tedy i čísel $c = y$, $d = z$.

*Poznámka.* I při volbě lichých čísel $U > V$ dostaneme nekonečně mnoho navzájem nepodobných kvádrů: stačí uvážit, že množina odpovídajících poměrů

$$\frac{b}{a} = \frac{U^2 - V^2}{2UV}$$

je nekonečná.

## A - I - 2

Předpokládejme nejprve, že máme dáno číslo $r$ a podmnožiny $\mathsf{A}_i$ $(1 \leqq i \leqq 5)$, které vyhovují úloze. Protože každé dvě množiny $\mathsf{A}_i$, $\mathsf{A}_{i+1}$ jsou podle předpokladu disjunktní, může libovolný prvek $x \in \mathsf{A} = \mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathsf{A}_5$ ležet nejvýše ve dvou z množin $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_5$.

Uvažujme množinu $\mathsf{B}$ všech uspořádaných dvojic $(x, i)$ takových, že $x \in \mathsf{A}_i$. Protože každá z množin $\mathsf{A}_i$ má právě pět prvků, je množina $\mathsf{B}$ pětadvacetiprvková. Na druhé straně se množina $\mathsf{A}$ skládá ze dvou disjunktních částí podle toho, zda prvek $x \in \mathsf{A}$ leží v jedné či ve dvou různých množinách $\mathsf{A}_i$. Označíme-li tedy příslušné počty $n_1$ a $n_2$, je $|\mathsf{A}| = n_1 + n_2$ a

$$|\mathsf{B}| = n_1 + 2n_2 \leqq 2(n_1 + n_2) = 2|\mathsf{A}|,$$

takže $|A| \geqq |B|/2 = 25/2$, neboli $|A| \geqq 13$. Protože pro $r = 13$ lze takové množiny $A_i$ sestrojit, jak ukazuje následující příklad, je $r = 13$ hledané nejmenší $r$ s požadovanou vlastností: $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_2 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, $A_3 = \{4, 5, 11, 12, 13\}$, $A_4 = \{1, 2, 6, 7, 8\}$, $A_5 = \{9, 10, 11, 12, 13\}$.

**Jiné řešení.** Je-li $k$ přirozené číslo, označme $r_k$ nejmenší přirozené číslo $r$ takové, že existují množiny $A_1, \ldots, A_5 \subset \{1, 2, \ldots, r\}$ takové, že pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ platí

$$|A_i| = k, \quad A_i \cap A_{i+1} = \emptyset \quad (A_6 = A_1).$$

Položíme-li

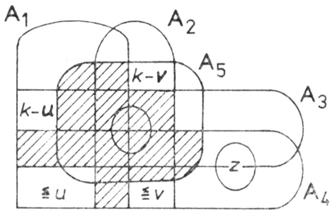
$$A_1 = A_3 = \{1, \ldots, k\}, \quad A_2 = A_4 = \{k + 1, \ldots, 2k\},$$
$$A_5 = \{2k + 1, \ldots, 3k\},$$

vidíme, že $r_k \leqq 3k$. Naopak z toho, že $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ a $|A_1| = |A_2| = k$, plyne nerovnost $2k \leqq r_k$.

Předpokládejme, že množiny $A_1, \ldots, A_5$ splňují uvedené podmínky. Navíc můžeme předpokládat, že $A_1 = \{1, \ldots, k\}$, $A_2 = \{k + 1, \ldots, 2k\}$. Položme proto (vyšrafované části Vennova diagramu na obr. 16 označují prázdné podmnožiny)

$$u = |A_3 \cap A_1' \cap A_2'|, \quad v = |A_5 \cap A_1' \cap A_2'|,$$
$$z = |A_4 \cap A_1' \cap A_2'|,$$

kde čárka označuje doplněk příslušné množiny ve sjednocení




Obr. 16

$A_1 \cup \ldots \cup A_5$. Je tedy $|A_3 \cap A_1| = k - u$, takže $|A_4 \cap A_1| \leqq u$, a analogicky $|A_5 \cap A_2| = k - v$, takže $|A_4 \cap A_2| \leqq v$, a platí

$$k = |A_4| \leqq |A_4 \cap A_1| + |A_4 \cap A_2| + |A_4 \cap A_1' \cap A_2'| \leqq$$
$$\leqq u + v + z.$$

Zároveň je zřejmé, že $u + z \leqq r - 2k$, $v + z \leqq r - 2k$, takže

$$k \leqq u + v + z \leqq 2(r - 2k) - z, \text{ neboli } r \geqq \frac{5k + z}{2},$$

což dává odhady

$$r_k \geqq \frac{5k}{2} \qquad \text{pro } k \text{ sudé},$$

$$r_k \geqq \frac{5k + 1}{2} \qquad \text{pro } k \text{ liché}.$$

Snadno zjistíme, že pro $z = 0$, resp. $z = 1$ nastane rovnost. Pro $k = 5$ tak vychází $r_5 = 13$.

# A - I - 3

Uvedeme jednu z možných konstrukcí. Její motivace je následující.

Vezměme nejprve $B = A_2 \cup A_4 \cup \ldots$, pak je zřejmě každá z množin $B \cap A_{2k} = A_{2k}$ nekonečná. Pro liché indexy $l$ můžeme psát

$$B \cap A_l = (A_2 \cap A_l) \cup (A_4 \cap A_l) \cup \ldots, \tag{1}$$

přičemž každá z množin v závorce má jen konečně mnoho prvků. Protože se však jedná o sjednocení nekonečného počtu množin, nemůžeme o jeho počtu prvků nic tvrdit. Změníme-li ale definici množiny $B$ tak, že od každé z množin $A_{2k}$ odečteme všechny množiny s lichými indexy $l < 2k$, bude v rovnosti (1) vystupovat jen konečný počet neprázdných množin. Proveďme tuto úvahu podrobněji:

Položme nyní $B = (A_2 \setminus C_2) \cup (A_4 \setminus C_4) \cup \ldots$, kde $C_{2k}$ je sjednocení všech množin $A_l$ s lichými indexy $l < 2k$. Je tedy

$$\begin{aligned} B \cap A_{2k} \supset B \cap (A_{2k} \setminus C_{2k}) = A_{2k} \setminus C_{2k} = \\ = A_{2k} \setminus (A_{2k} \cap C_{2k}), \end{aligned}$$

což je nekonečná množina, neboť jsme z nekonečné množiny $A_{2k}$ odstranili jen konečně mnoho prvků.

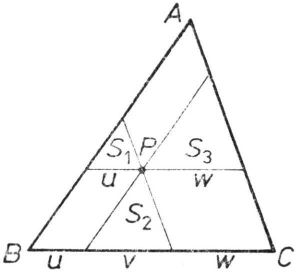
Na druhé straně je pro liché $l$

$$\begin{aligned} B \cap A_l = ((A_2 \setminus C_2) \cap A_l) \cup ((A_4 \setminus C_4) \cap A_l) \cup \ldots \\ \ldots \cup ((A_{2k} \setminus C_{2k}) \cap A_l) \cup \ldots, \end{aligned}$$

přičemž pro $2k > l$ je $(\mathsf{A}_{2k} \setminus \mathsf{C}_{2k}) \cap \mathsf{A}_l = \emptyset$. Poslední sjednocení tedy obsahuje jen konečný počet neprázdných (konečných) množin. Tím je úloha vyřešena.

## A - I - 4

Při důkazu využijeme následující známé vlastnosti podobných zobrazení: Je-li $f$ podobnost v rovině, existuje kladné číslo $k$ takové, že pro libovolné dva body $X$, $Y$ platí $|f(X)f(Y)| = k|XY|$. Pro obsah útvaru $\mathsf{U}$ v rovině pak platí $S(f(\mathsf{U})) = k^2 S(\mathsf{U})$.




Obr. 17

Označme $S$ obsah daného trojúhelníku $ABC$ a $S_1$, $S_2$, $S_3$ obsahy uvažovaných trojúhelníků (obr. 17). Délky úseků, které sestrojené přímky vytnou na straně $BC$ daného trojúhelníku, označme $u$, $v$, $w$. Z podobnosti uvažovaných trojúhelníků danému trojúhelníku plynou následující rovnosti

$$S_1 = \left(\frac{u}{a}\right)^2 S,$$

$$S_2 = \left(\frac{v}{a}\right)^2 S,$$

$$S_3 = \left(\frac{w}{a}\right)^2 S.$$

Jejich sečtením a dosazením $a = u + v + w$ dostaneme

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{(u + v + w)^2} S.$$

Máme tedy pro kladná reálná čísla $u, v, w$ dokázat nerovnost

$$u^2 + v^2 + w^2 \geqq \frac{1}{3}(u + v + w)^2, \qquad (1)$$

která je, jak zjistíme jednoduchými úpravami, ekvivalentní nerovnosti

$$(u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2 \geqq 0.$$

Odtud také plyne, že rovnost nastane právě tehdy, je-li $u = v = w = \frac{1}{3}|AB|$, tj. právě když je bod $P$ těžištěm trojúhelníku $ABC$.

*Poznámka.* Nerovnost (1) je speciálním případem známé Cauchyovy nerovnosti

$$(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

pro $n = 3$, $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$, $v_1 = v_2 = v_3 = 1$.

## A-I-5

Z definice obou množin A, B plyne, že je $A \cup B \subset \subset \{1, 2, \ldots, p\}$. Uvažujme $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ takové, že $k \notin A \cup B$. Protože $k \notin A$, je pro nějaké $n \geqq 0$

$$np < kq < (k + 1)q \leqq (n + 1)p. \qquad (1)$$

Podobně ze vztahu $k \notin B$ plyne, že pro nějaké $m \geqq 0$ je

$$mp < k(p - q) < (k + 1)(p - q) \leqq (m + 1)p,$$

odkud odečtením $kp$ dostaneme nerovnosti

$$(k - m - 1)p \leqq (k + 1)q - p < kq < (k - m)p. \qquad (2)$$

Z obou nerovností (1) a (2) je vidět, že $np = (k - m - 1)p$ je největší celé číslo menší než $kq$. Navíc odtud plyne, že mezi čísly $np = (k - m - 1)p$ a $(n + 1)p = (k - m)p$, jejichž rozdíl je $p$, leží čísla $(k + 1)q - p$ a $(k + 1)q$, jejichž rozdíl je rovněž $p$. Musí tedy být $(k + 1)q = (n + 1)p$, a protože čísla $p$, $q$ jsou nesoudělná, musí $p$ dělit číslo $k + 1$. Odtud vychází, že je $k = p - 1$.

Číslo $p - 1$ v množině $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ skutečně neleží, protože je

$$(q-1)\frac{p}{q} < p - 1 \qquad \text{a} \qquad (p - q - 1)\frac{p}{p-q} < p - 1,$$

neboť $q < p$.

**Jiné řešení.** Zřejmě je $p \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$. Ukážeme, že je dokonce $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \{p\}$. Kdyby pro nějaké $m \in \{1, 2, \ldots, q\}$, $n \in \{1, 2, \ldots, p - q\}$ bylo

$$\left[m\frac{p}{q}\right] = \left[n\frac{p}{p-q}\right] = a,$$

bylo by

$$\frac{mp}{q} = a + \frac{\alpha}{q} \qquad \text{pro} \quad 0 < \alpha < q, \quad \alpha \text{ celé},$$

$$\frac{np}{p-q} = a + \frac{\beta}{p-q} \quad \text{pro} \quad 0 < \beta < p - q, \ \beta \text{ celé},$$

takže

$$mp = qa + \alpha, \qquad np = (p - q)\,a + \beta,$$

$$(m + n)p = pa + \alpha + \beta,$$

$$m + n = a + \frac{\alpha + \beta}{p}.$$

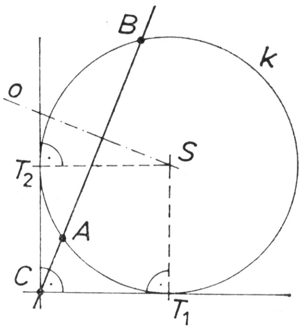
Protože ale je $0 < \alpha + \beta < p$, nemůže poslední rovnost nastat pro celá čísla $m$, $n$, $a$. Sjednocení $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ má tedy celkem $p - 1$ prvků z množiny $\{1, 2, \ldots, p\}$. Jediné číslo, které z ní neobsahuje, je $p - 1$, neboť ($p > q, p > p - q$)

$$\left[(q-1)\frac{p}{q}\right] = \left[p - \frac{p}{q}\right] < p - 1$$

$$\left[(p-q-1)\frac{p}{p-q}\right] = \left[p - \frac{p}{p-q}\right] < p - 1.$$

## A - I - 6

Je zřejmé, že úloha má řešení jen tehdy, neleží-li bod $C$ mezi body $A$, $B$. Předpokládejme, že hledaná kružnice $k$ existuje, a označme $S$ její střed a $T_1$, $T_2$ dotykové body jejích tečen z bodu $C$ (obr. 18). Body $C$, $T_1$, $S$, $T_2$ jsou vrcholy

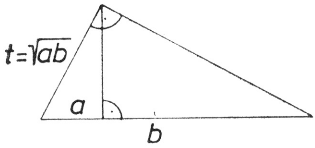



Obr. 18

čtverce. Pro délku $t$ jeho strany, jež je zároveň poloměrem hledané kružnice, z mocnosti bodu $C$ ke kružnici $k$ plyne rovnost $t^2 = ab$, kde $a = |CA|$, $b = |CB|$. Střed $S$ hledané kružnice tedy leží na ose úsečky $AB$ a zároveň na kružnici $l(A, t)$ se středem $A$ a poloměrem $t$.

Z uvedeného rozboru je zřejmé, že úloha bude mít jedno řešení pro $t = \frac{1}{2}|AB|$ a dvě řešení, pokud $t > \frac{1}{2}|AB|$. Jinak úloha řešení nemá. Protože $|AB| = |b - a|$, z podmínky $t^2 = ab$ plyne, že úloha má řešení, právě když $a^2 - 6ab + b^2 \leqq 0$.

Postup konstrukce rovněž plyne z rozboru. Délku $t = \sqrt{ab}$ přitom sestrojíme pro dané délky $a$, $b$ pomocí jedné z Euklidových vět (obr. 19).




Obr. 19

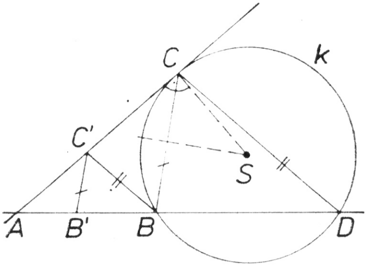
## A - S - 1

Množina M má $\binom{n}{k}$ $k$-prvkových podmnožin C. Každá z těchto množin má zas $2^k$ podmnožin B. Podle binomické věty je tedy počet všech dvojic (B, C) takových, že B $\subset$ C $\subset$ M, roven součtu

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (1 + 2)^n = 3^n.$$

# A-S-2

Sestrojme kružnici $k$, která se dotýká přímky $AC$ v bodě $C$ a prochází bodem $B$ (střed $S$ takové kružnice leží na kolmici k $AC$ v bodě $C$ a na ose úsečky $BC$, obr. 20). Kružnice $k$ protne polopřímku $AB$ ještě v bodě $D$, pro který platí $|AD| > |AB|$, neboť z mocnosti bodu $A$ ke kružnici $k$ plyne, že je $|AD| \, . \, |AB| = |AC|^2$.




Obr. 20

Uvažujme stejnolehlost se středem $A$, která zobrazí bod $D$ do bodu $B$. Obrazem kružnice $k$ v této stejnolehlosti bude kružnice $k'$, která se dotýká přímky $AC$ v bodě $C'$ a stranu $AB$ trojúhelníku $ABC$ protíná v bodě $B'$.

Z předchozího rozboru je zřejmé, že bod $C'$ dostaneme jako průsečík přímky $AC$ s rovnoběžkou vedenou bodem $B$ k přímce $CD$. Protože body $B'$, $C'$ jsou obrazy bodů $B$, $C$ v uvedené stejnolehlosti, je také $B'C' \parallel BC$.

Protože bod $B$ neleží na přímce $AC$, kružnice $k$ vždy existuje a úloha má jediné řešení.

## A-S-3

Předpokládejme, že takový kvádr existuje, a označme $a$, $b$, $c$ délky jeho hran a $u$ délku jeho tělesové úhlopříčky. Protože délky jeho hran mají tvořit tříčlennou aritmetickou posloupnost, můžeme položit

$$a = b - d, \qquad c = b + d,$$

kde $d$ je příslušná diference.

Z Pythagorovy věty pak pro tělesovou úhlopříčku dostáváme vztah

$$u^2 = 3b^2 + 2d^2. \tag{1}$$

Můžeme ovšem předpokládat, že čísla $b$, $d$, $u$ jsou nesoudělná, protože jinak bychom je vydělili jejich největším společným dělitelem a příslušné podíly by splňovaly tutéž rovnici. Z rovnice (1) ale dostaneme, že $u^2 - 2d^2$ je dělitelné třemi, což může být pravda jen v případě, že obě čísla $u$, $d$ jsou dělitelná třemi (stačí probrat všech 9 možných dvojic zbytků mod 3, všeobecně je však známo, že čtverec celého čísla dá při dělení třemi jen zbytek 0 nebo 1). To ale znamená, že $3b^2$ je dělitelné devíti, a tedy i $b$ musí být dělitelné třemi. Došli jsme tak ke sporu, neboť o číslech $b$, $d$, $u$ jsme předpokládali, že jsou nesoudělná.

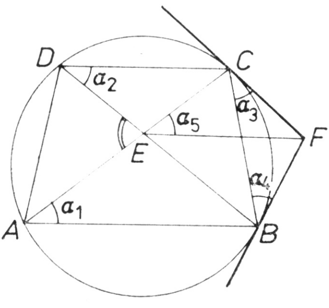
*Poznámka.* Ze vztahu (1) také plyne, že čísla $u$, $b$ jsou buď obě lichá, nebo obě sudá. Využijeme-li dělitelnosti dvěma, resp. čtyřmi, dojdeme v obou případech rychle ke sporu podobně jako v uvedeném řešení.

## A - II - 1

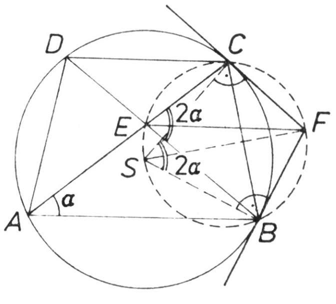
Označme úhly jako na obr. 21. Úhly $\alpha_1$, $\alpha_2$ jsou obvodové a $\alpha_3$ je úsekový úhel příslušný tětivě $BC$, uvedené úhly jsou proto shodné. Protože $|CF| = |BF|$, je $\alpha_3 = \alpha_4$. Zároveň ale je (protože základny $AB$ a $CD$ jsou rovnoběžné)

$$|\sphericalangle\, AED| = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 = 180^\circ - |\sphericalangle\, BFC|,$$

takže čtyřúhelník $EBFC$ je tětivový. Odtud plyne, že $\alpha_5 = \alpha_4 = \alpha_1$, přímky $EF$ a $CD$ jsou tedy rovnoběžné.




Obr. 21




Obr. 22

**Jiné řešení** (podle Petra Lindaského, 3.d G M. Koperníka v Bílovci). Thaletova kružnice nad průměrem $SF$ obsahuje vrcholy $B$, $C$ daného lichoběžníku. Označíme-li $\alpha$ velikost úhlu $BAC$ (obr. 22), bude zřejmě $|\sphericalangle BSC| = 2\alpha$ (odpovídající středový úhel) a také $|\sphericalangle BEC| = 2\alpha$ (jde o vnější úhel k rovnoramennému trojúhelníku $ABE$). Odtud plyne, že body $B$, $C$, $S$, $E$, $F$ leží na kružnici, a pokud $S \neq E$, je podle Thaletovy věty $|\sphericalangle SEF| = 90°$, neboli $EF \parallel AB$.

Pokud je $S = E$, je uvažovaný lichoběžník obdélník a snadno se přesvědčíme, že uvedené tvrzení platí ($SF = EF$ je osou souměrnosti obdélníku $ABCD$).

## A - II - 2

Podle kosinové věty je

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

$$t_a^2 = \frac{a^2}{4} + b^2 - ab\cos\gamma,$$

takže pro délku těžnice $t_a$ dostaneme známý vztah

$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

a cyklickou záměnou získáme další dva vztahy

$$t_b^2 = \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}, \qquad t_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Aby byly zmíněné trojúhelníky podobné, musí platit $a : b : c = t_c : t_b : t_a$, neboli $b^2t_a^2 = c^2t_b^2$ a $b^2t_c^2 = a^2t_b^2$. Odtud dostaneme rovnosti

$$
\begin{aligned}
b^2(2b^2 + 2c^2 - a^2) &= c^2(2c^2 + 2a^2 - b^2),\\
b^2(2a^2 + 2b^2 - c^2) &= a^2(2c^2 + 2a^2 - b^2).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Jejich odečtením vyjde

$$(c^2 - a^2)(2b^2 - a^2 - c^2) = 0.$$

Protože $a$, $b$, $c$ jsou kladná čísla, je buď $c = a$, anebo $a^2 + c^2 = 2b^2$.

Pro $a = c$ dosazením do (1) vyjde

$$b^4 - 2a^4 + a^2b^2 = (b^2 - a^2)(2a^2 + b^2) = 0,$$

tj. $a = b = c$. Rovnostranný trojúhelník samozřejmě má požadované vlastnosti.

Je-li $a^2 + c^2 = 2b^2$, dosazením do (1) zjistíme, že obě rovnosti platí, což znamená, že oba trojúhelníky jsou podobné.

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby uvedené trojúhelníky byly podobné, je tedy rovnost $a^2 + c^2 = 2b^2$ (což je zřejmě splněno i pro rovnostranný trojúhelník).

## A - II - 3

Označme $m$ nejmenší prvek množiny A. Zřejmě je $m > 1$, protože jinak by vyšlo $\mathsf{A} = \mathsf{N}$, $\mathsf{B} = \emptyset$. Číslo $m$ nemůže být složené, protože kdyby bylo $m = ab$, kde $1 < a < m$, $1 < b < m$, bylo by nutně $a \in \mathsf{B}$, $b \in \mathsf{B}$, a tedy i $m = ab \in \mathsf{B}$. Proto je $m$ prvočíslo a množina $\mathsf{A}$ obsahuje i všechny jeho kladné násobky, $\mathsf{A} \supset \{km; k \in \mathsf{N}\}$.

Dejme tomu, že množina $\mathsf{A}$ kromě násobků čísla $m$ obsahuje i nějaké číslo $n$ nesoudělné s $m$. Pak $\mathsf{A}$ obsahuje všechny lineární kombinace $mx + ny$ s přirozenými čísly $x$ a $y$, tedy všechna dostatečně velká přirozená čísla. Skutečně: protože $m$ a $n$ jsou nesoudělná, dávají čísla $N - n$, $N - 2n$, ..., $N - mn$ při dělení číslem $m$ vesměs různé zbytky. Proto pro každé $N > mn$ mezi těmito $m$ čísly existuje jedno, které je dělitelné $m$, tj. existují přirozená čísla $i$ a $j$, $1 \leqq i \leqq m$, taková, že $N - in = jm$, neboli $N = jm + in \in \mathsf{A}$. V tom případě ale je množina $\mathsf{B}$ konečná, a nemůže tedy obsahovat žádné číslo $k > 1$, protože jinak by obsahovala nekonečně mnoho různých čísel tvaru $k, k^2, k^3, \ldots$. Může být jen $\mathsf{B} = \{1\}$ a $\mathsf{A} = \{2, 3, 4, \ldots\}$. Tyto dvě množiny zřejmě vyhovují podmínkám úlohy.

V opačném případě je $\mathsf{A} = \{km; k \in \mathsf{N}\}$ a $\mathsf{B} = \{n \in \mathsf{N}; m \nmid n\}$ pro vhodné prvočíslo $m$. Protože $1989 = 9.13.17$, je $1989 \in \mathsf{A}$ pro $m \in \{3, 13, 17\}$.

*Poznámka.* Pro nesoudělná čísla $m$, $n$ vždycky existují celá čísla $x$, $y$ taková, že $mx + ny = 1$, přitom nejvýše jedno z čísel $x, y$ může být záporné. V případě, že je to např. číslo $y$, můžeme pro libovolná přirozená čísla $k$, $t$ psát

$$k = k(mx + ny) + mnt - mnt = m(kx - nt) + n(ky + mt).$$

Přitom čísla $kx - nt$ a $ky + mt$ budou přirozená, když bude

$$kx - nt \geqq 1, \qquad ky + mt \geqq 1,$$

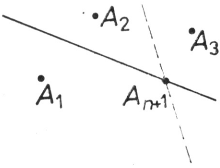
tedy pro $0 < \dfrac{1 - ky}{m} \leqq t \leqq \dfrac{kx - 1}{n}$. Stačí proto, aby bylo

$$\frac{kx - 1}{n} - \frac{1 - ky}{m} \geqq 1, \quad \text{neboli} \quad k \geqq mn + m + n.$$

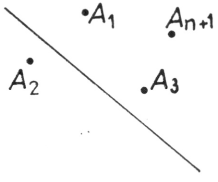
## A - II - 4

Dokážeme matematickou indukcí, že hledaný počet je $\frac{1}{2}n(n-1) + 1$.

Pro $n = 1$ to zřejmě platí. Přidejme k daným bodům $A_1, A_2, \ldots, A_n$ další bod $A_{n+1}$ a uvažujme jednak ty rozklady množiny $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, které lze realizovat pomocí přímky procházející bodem $A_{n+1}$ (obr. 23), a jednak rozklady, které takto dostat nelze (obr. 24).




Obr. 23




Obr. 24

V prvním případě dostaneme z každého rozkladu původní množiny $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ dva různé rozklady množiny

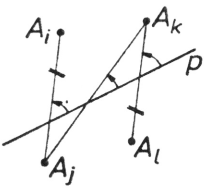
$\{A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}\}$ tak, že polohu uvedené přímky nepatrně změníme, aby i nadále neobsahovala žádný z daných bodů, přičemž bod $A_{n+1}$ padne buď do jedné, či do druhé množiny rozkladu.

V druhém případě už je jednoznačně určeno, do které z množin uvažovaného rozkladu množiny $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ bod $A_{n+1}$ padne. Vidíme tedy, že přidáním jednoho bodu k $n$-prvkové množině bodů se počet možných rozkladů zvětší o počet rozkladů, které lze realizovat přímkou procházející bodem $A_{n+1}$. Postupným otáčením přímky od 0 do 180° zjistíme, že takových rozkladů je právě $n$. Pro počet $p(n)$ rozkladů proto platí

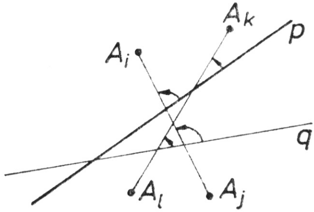
$$p(n+1) = p(n) + n, \qquad p(1) = 1,$$

$$p(n) = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 + 1 = \frac{n(n-1)}{2} + 1.$$

**Jiné řešení.** Budeme uvažovat jen rozklady na dvě neprázdné podmnožiny (triviální rozklad obsahující prázdnou množinu je jediný). Každý takový rozklad je určen nějakou přímkou neprocházející žádným z daných bodů. Přiřaďme nyní rozkladu $\varrho$ určenému přímkou $p$ dvojici bodů $A_i$, $A_j$ takovou, že oba body leží v opačných polorovinách určených přímkou $p$ a orientovaný úhel, který svírá přímka $p$ s přímkou $A_iA_j$, je nejmenší možný. Tato dvojice je vždy určena jednoznačně: daných bodů je jen konečný počet a nemůže se stát, že by existovaly dvě dvojice $A_iA_j \parallel A_kA_l$ s nejmenším orientovaným úhlem (obr. 25), protože orientovaný úhel jedné z úhlopříček odpovídajícího lichoběžníku musí být menší.




Obr. 25

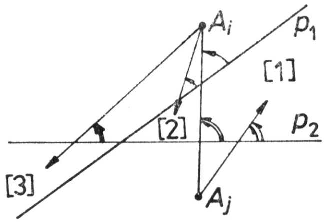



Obr. 26

Dále si uvědomíme, že je to dobrá definice v tom smyslu, že dvojice bodů $A_i$, $A_j$ je určena pouze daným rozkladem a nezávisí na volbě přímky, která jej realizuje (obr. 26). Kdyby totiž existovala jiná dvojice bodů $A_k$, $A_l$, s níž by např. přímka $q$ svírala menší orientovaný úhel než s dvojicí $A_i$, $A_j$, snadno zjistíme, že by pak i přímka $p$ s ní svírala menší orientovaný úhel.

Abychom zjistili požadovaný počet rozkladů, stačí nyní dokázat, že uvedené zobrazení „rozklad $\mapsto$ dvojice bodů" je vzájemně jednoznačné (tj. je prosté a je na), protože počet dvojic dobře známe — těch je $\binom{n}{2}$.

Uvažujme dva rozklady $\varrho_1$ a $\varrho_2$, určené přímkami $p_1$ a $p_2$ kterým v popsaném zobrazení odpovídá stejná dvojice bodů $A_i$, $A_j$. Přesvědčíme se, že obě přímky $p_1$, $p_2$ určují tentýž rozklad, tj. $\varrho_1 = \varrho_2$, neboli jinými slovy, že v úhlu mezi oběma přímkami $p_1$, $p_2$, v němž neleží žádný z bodů $A_i$, $A_j$, neleží ani žádný další z daných bodů. Protože však každá z přímek $p_1$, $p_2$ svírá s přímkou $A_iA_j$ nejmenší možný orientovaný úhel, nemůže žádný bod ležet (obr. 27) ani v části [1], ani v části [2] nebo [3] uvedeného úhlu. Uvedené zobrazení je tedy prosté.



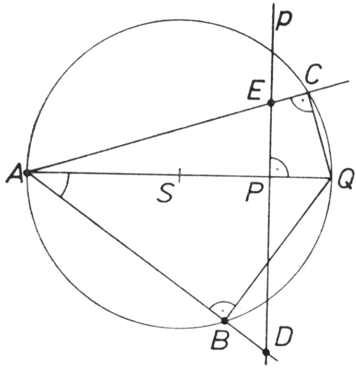

Obr. 27

Abychom ukázali, že každá dvojice bodů $A_i$, $A_j$ odpovídá nějakému rozkladu, vezměme přímku $p$, která prochází středem úsečky $A_iA_j$ a svírá s ní orientovaný úhel tak malý, že v něm už neleží žádný další z daných bodů (to jde, protože žádné tři body neleží v přímce a daných bodů je jen konečný počet).

Dokázali jsme tedy, že celkový počet rozkladů je $\binom{n}{2} + 1$.

## A - III - 1

Označme $P$ patu kolmice $p$ na přímku $AS$ a $Q$ další průsečík přímky $AS$ s danou kružnicí (obr. 28). Podle Thaletovy věty je $|\sphericalangle ABQ| = 90°$, takže pokud $P \neq A$, jsou trojúhelníky $APD$ a $ABQ$ podobné, tj. $|AP| \, . \, |AQ| = |AB| \, . \, |AD|$. Podobně dostaneme pro bod $E$ rovnost $|AP| \, . \, |AQ| = |AC| \, . \, |AE|$, takže pro body $A, B, C, D, E$ vychází rovnost $|AC| \, . \, |AE| = |AB| \, . \, |AD.|$ Z mocnosti bodu $A$ ke kružnici procházející body $B$, $C$, $D$ podle poslední rovnosti dostaneme, že na stejné kružnici leží i bod $E$.




Obr. 28

Pokud je bod $A$ zároveň i patou kolmice $p$, je $P = A = D = E$ a tvrzení úlohy triviálně platí.

*Poznámka.* Tvrzení úlohy lze samozřejmě snadno dokázat pomocí věty o obvodových úhlech, uvedené řešení však má tu podstatnou výhodu, že v něm není potřeba diskutovat polohu přímky $p$.

## A - III - 2

Předpokládejme, že pro nějaké $m$ přirozené je $n$ nejmenší přirozené číslo takové, že tvrzení úlohy neplatí. Kdyby z každého bodu vycházelo aspoň $m$ úseček, snadno sestrojíme požadovanou posloupnost (začneme libovolným bodem a v každém kroku pak máme vždy možnost z $m$ bodů, jež jsou se zvoleným bodem spojeny úsečkou, vybrat ten, který se dosud v posloupnosti nevyskytuje).

Můžeme tedy předpokládat, že existuje bod, z něhož vychází nejvýše $m - 1$ daných úseček. Odstraníme-li tento bod spolu se všemi úsečkami, jež z něho vycházejí, dostaneme aspoň $mn - (m - 1) > m(n - 1)$ úseček spojujících nejvýše $n - 1$ bodů. Pro tyto úsečky ovšem uvedené tvrzení rovněž nemůže platit, což je ve sporu s volbou $n$. Tím je tvrzení dokázáno.

**Jiné řešení** (podle P. Brože, 4. ročník G W. Piecka v Praze). Máme dokázat, že v libovolném (neorientovaném) grafu $G$ s $n$ vrcholy a $mn$ hranami existuje cesta délky $m$ (tj. posloupnost různých vrcholů $V_0, V_1, \ldots, V_m$ grafu $G$, jež jsou spojeny hranou).

Přiřaďme každému vrcholu grafu $G$ délku nejdelší cesty, která jím prochází, a označme $e(G)$ součet těchto hodnot pro všechny vrcholy daného grafu $G$. Dokážeme, že pro každý graf $G$ s $n$ vrcholy a $h$ hranami platí

$$e(G) \geqq h - n + 1. \tag{1}$$

Pro $n = 1$ nerovnost platí, neboť v tomto případě je $e(G) = h = 0$. Předpokládejme, že uvedená nerovnost platí pro každé $n \leqq m - 1$, a uvažujme graf $G$ s $n = m$ vrcholy. Vezměme v něm nejdelší možnou cestu $V_0, V_1, \ldots, V_k$. Z vrcholu $V_0$ mohou vést hrany jen do některých vrcholů $V_1, \ldots, V_k$, jinak by existovala delší cesta. Odstraníme-li teď z tohoto grafu vrchol $V_0$ se všemi hranami, jež z něj vycházejí, dostaneme graf $G_0$ s $m - 1$ vrcholy a aspoň $h - k$ hranami. Podle indukčního předpokladu je tedy

$$e(G_0) \geqq h - k - (m - 1) + 1;$$

přitom ale zřejmě platí $e(G_0) \leqq e(G) - k$ (délka cest vedoucích libovolným vrcholem se odebráním příslušných hran určitě nezvětší a odebranému vrcholu $V_0$ odpovídala cesta délky $k$). Dostáváme tak nerovnost

$$e(G) \geqq h - m + 2,$$

takže (1) platí i pro $n = m$. Tím je důkaz matematickou indukcí hotov.

Pro graf splňující předpoklady úlohy podle (1) tedy platí

$$e(G) \geqq mn - n + 1 = n(m - 1) + 1,$$

podle Dirichletova principu tedy nutně existuje vrchol, kterým vede cesta délky aspoň $m$.

## A - III - 3

(Podle V. Komára, 3. ročník G, Košice, Šmeralova ul.) Předpokládejme, že čísla $c$, $d$ splňují podmínky úlohy. Čísla $p, 2p, 3p, \ldots$ zřejmě patří do A, a protože $\frac{p}{q} > 1$, čísla $p - 1, 2p - 1, 3p - 1, \ldots$ do A určitě nepatří, takže leží v B. Zároveň je jasné, že pro různá $n_1, n_2$ jsou také čísla $\left[n_1 \frac{p}{q}\right]$, $\left[n_2 \frac{p}{q}\right]$ různá. Je také vidět, že nemůže být $c < 0$, ale ani $0 \leqq c \leqq 1$ (to by B obsahovala všechna přirozená čísla aspoň rovná $[c + d]$). Je proto $c > 1$, takže i čísla $[cn_1 + d]$, $[cn_2 + d]$ jsou pro různá $n_1, n_2$ různá.

Protože $kp \in \mathsf{A}$, $kp - 1 \in \mathsf{B}$ $(k \in \mathsf{N})$, je mezi čísly $1, 2, \ldots, kp$ právě $kq$ čísel v $\mathsf{A}$ a $kp - kq$ čísel v $\mathsf{B}$, takže pro každé $k$ přirozené máme

$$kp - 1 = [ck(p - q) + d],$$

neboli

$$kp - 1 \leqq k(p - q)\, c + d < kp. \tag{1}$$

Pro libovolné přirozené $k$ tudíž platí

$$-1 - d \leqq k\,[(p - q)\, c - p] < -d.$$

Odtud ovšem plyne, že $(p - q)c - p = 0$, a tedy $c = \dfrac{p}{p - q}\cdot$

Z (1) pak navíc dostáváme, že $kp - 1 \leqq kp + d < kp$, neboli $-1 \leqq d < 0$. Podle úlohy A — I — 5 víme, že pro množinu $\mathsf{B}' = \left\{\left[n\dfrac{p}{p - q}\right];\, n \in \mathsf{N}\right\}$ platí

$$\mathsf{A} \cup \mathsf{B}' = \mathsf{N} \setminus \{kp - 1;\ k \in \mathsf{N}\}, \qquad \mathsf{A} \cap \mathsf{B}' = \{kp;\ k \in \mathsf{N}\}.$$

Vezmeme-li tedy $d \in \langle -1, 0)$, objeví se v množině $\mathsf{B}$ místo čísel $p, 2p, \ldots, kp, \ldots$ čísla $p - 1, 2p - 1, \ldots, kp - 1, \ldots$, jinak ale pro $n \neq k(p - q)$ musí čísla $\left[n\dfrac{p}{p - q} + d\right]$ zůstat v množině B′, jinými slovy (protože $d < 0$) musí pro všechna $n \neq k(p - q)$ platit

$$n \frac{p}{p - q} + d \geqq \left[n \frac{p}{p - q}\right].$$

Přitom, je-li $r$ $(0 < r < p - q)$ zbytek čísla $np$ při dělení číslem $p - q$, je

$$\frac{np}{p - q} = \left[\frac{np}{p - q}\right] + \frac{r}{p - q},$$

takže pro $n \neq k(p - q)$ odtud plyne nerovnost

$$d \geqq -\frac{r}{p - q}.$$

Čísla $p, 2p, \ldots, (p - q - 1)p$ dávají ovšem vesměs různé zbytky při dělení číslem $p - q$, tj. všechny možné zbytky $1, 2, \ldots, p - q - 1$, protože čísla $p$ a $p - q$ jsou podle předpokladu nesoudělná (kdyby $p - q$ dělilo $k_2 p - k_1 p$ pro $k_1 < k_2 < p - q$, bylo by i číslo $k_2 - k_1 < p - q$ dělitelné $p - q$, což nejde!).

Zároveň z předchozích úvah vidíme, že pro $d \in \left\langle -\frac{1}{p - q}, 0\right)$ platí

$$\mathsf{B} = (\mathsf{B}' \cup \{kp;\ k \in \mathsf{N}\}) \setminus \{kp - 1;\ k \in \mathsf{N}\},$$

takže pro množiny A, B je $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{N}$, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$, jak vyžadovala úloha.

**Jiné řešení** (podle P. Čížka, 4. ročník G W. Piecka v Praze). Protože $\left[n\frac{p}{q}\right] \leqq m-1$, právě když $n < m\frac{q}{p}$, obsahuje množina A právě $\left\lceil m\frac{q}{p}\right\rceil - 1$ čísel menších než $m$ a podobně množina B obsahuje právě $\left\lceil\frac{m-d}{c}\right\rceil - 1$ čísel menších než $m$. (Zde $\lceil x\rceil$ značí tzv. horní celou část čísla $x$, tj. nejmenší celé číslo aspoň rovné číslu $x$; tuto funkci můžeme definovat i pomocí známější „dolní celé části" jako $\lceil x\rceil = -[-x]$.)

Množiny A, B splňují požadavky úlohy, právě když pro každé přirozené $m$ platí

$$|A \cap \{1, 2, \ldots, m-1\}| + |B \cap \{1, 2, \ldots, m-1\}| = \\ = m-1,$$

tj. právě když pro každé $m$ přirozené platí

$$\left\lceil\frac{mq}{p}\right\rceil - 1 + \left\lceil\frac{m-d}{c}\right\rceil - 1 = m-1,$$

čili

$$\left\lceil\frac{mq}{p}\right\rceil + \left\lceil\frac{m-d}{c}\right\rceil = m+1. \tag{2}$$

Pro libovolná reálná čísla $x, y$ platí, že $\frac{[mx+y]}{m} \to x$, když $m \to \infty$, jak je vidět z nerovností

$$x + \frac{y}{m} \leqq \frac{[mx + y]}{m} < x + \frac{y + 1}{m}.$$

Z (2) limitním přechodem dostaneme rovnost

$$\frac{q}{p} + \frac{1}{c} = 1,$$

což dává $c = \dfrac{p}{p - q}$. Dosazením do rovnosti (2) vychází pro každé $m$ přirozené

$$\left\lceil \frac{mq}{p} \right\rceil + \left\lceil m\frac{p - q}{p} - d\,\frac{p - q}{p} \right\rceil = m + 1,$$

$$\left\lceil \frac{mq}{p} \right\rceil + \left\lceil \frac{-mq}{p} \right\rceil - d\left\lceil \frac{p - q}{p} \right\rceil = 1.$$

Pišme $\dfrac{mq}{p} = n + r$, kde $n$ je celé a $r \in (0, 1\rangle$. Poslední rovnost tak můžeme přepsat jako

$$n + \lceil r \rceil + \left\lceil -n - r - d\frac{p - q}{p} \right\rceil = 1,$$

a protože $\lceil r \rceil = 1$, dostáváme podmínku

$$\left[ -r - d\,\frac{p - q}{p} \right] = 0, \quad \text{neboli} \quad -1 < -r - d\frac{p - q}{p} \leqq 0,$$

což je ekvivalentní s nerovnostmi

$$-r\frac{p}{p-q} \leqq d < -(r-1)\frac{p}{p-q}\,.$$

Protože čísla $p$, $q$ jsou nesoudělná, nabývá $r$ pro různá $m$ (stačí $1 \leqq m \leqq p$) všech možných hodnot $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, 1$, takže vychází, že

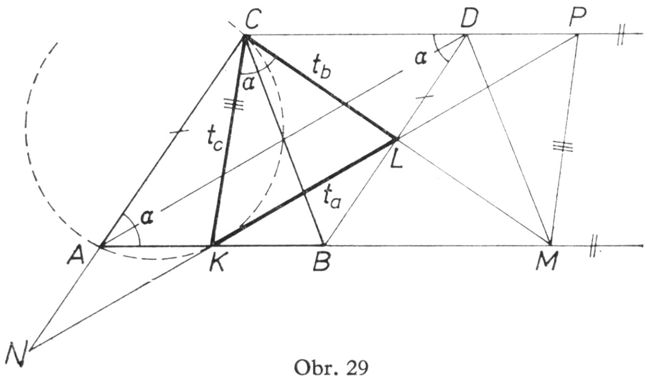
$$d \in \left\langle -\frac{1}{p-q}, 0\right).$$

Obráceně, je-li $c = \frac{p}{p-q}$, $d \in \left\langle -\frac{1}{p-q}, 0\right)$, dostaneme pro každé $m$ přirozené, že platí (2), což zaručuje, že $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{N}$, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$.

## A - III - 4

Označme $A$, $B$, $C$ vrcholy trojúhelníku T a předpokládejme, že se trojúhelníky T, T′ shodují např. v úhlu $\alpha$. Trojúhelník $ABC$ doplňme na rovnoběžník $ABDC$ (obr. 29) a středy jeho stran $AB$, $BD$ označme $K$, $L$. Pak je $\mathsf{T}' = CKL$, $|KL| = t_a$, $|LC| = t_b$, $|CK| = t_c$.

Pokud je $|\sphericalangle KCL| = \alpha$, je podle věty o obvodových úhlech přímka $CL$ tečnou kružnice opsané trojúhelníku $AKC$ (úhel $KCL$ je tzv. úsekový úhel příslušný tětivě $KC$). Uvažme nyní




Obr. 29

bod $M$, který je průsečíkem přímek $AK$, $CL$ (obr. 29). Pro jeho mocnost ke kružnici $AKC$ platí $|MK| \cdot |MA| = |MC|^2$, a protože $|MK| = |CP| = |AB| + |AK| = \frac{3}{2}c$, $|MA| = 2c$, $|MC| = 2t_b$, plyne odtud rovnost $3c^2 = 4t_b^2$.

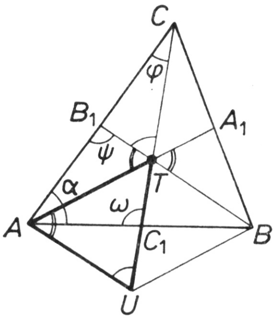
Pokud je $|\sphericalangle\, CKL| = \alpha$, je analogicky přímka $KL$ tečnou kružnice opsané trojúhelníku $AKC$, takže z mocnosti bodu $N$ (obr. 29) ke kružnici $AKC$ vyjde $3b^2 = 4t_a^2$. A podobně pro $|\sphericalangle\, KLC| = \alpha$ je zase přímka $KL$ tečnou kružnice $CLD$, takže z mocnosti bodu $P$ k této kružnici dostaneme rovnost $3c^2 = 4t_a^2$.

Vezměme např. poslední rovnost. Protože (viz např. řešení úlohy A — II — 2) $4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$, plyne odtud $2b^2 = a^2 + c^2$, takže dostaneme

$$3c^2 = 4t_a^2, \qquad 3b^2 = 4t_b^2, \qquad 3a^2 = 4t_c^2,$$

což znamená, že trojúhelníky T a T′ jsou podobné. Analogicky postupujeme i ve zbylých dvou případech.

**Jiné řešení** (podle J. Vomlela, 3. ročník G J. K. Tyla v Hradci Králové). Označme $A_1, B_1, C_1$ středy příslušných stran trojúhelníku $\mathsf{T} = ABC$, $T$ jeho těžiště a $U$ bod na těžnici $CC_1$ takový, že $|TU| = |CT|$ (obr. 30). Trojúhelník $UTA$ je zřejmě podobný uvažovanému trojúhelníku $\mathsf{T}'$, protože délky jeho stran se rovnají dvěma třetinám délek těžnic trojúhelníku $\mathsf{T}$.




Obr. 30

Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že se oba trojúhelníky $\mathsf{T}$, $\mathsf{T}'$ shodují v úhlu $\alpha$. Je-li $\alpha = |\sphericalangle ATU|$, jsou trojúhelníky $TC_1A$, $AC_1C$ podobné (shodují se v úhlech $\alpha$ a $\omega$), takže

$$\frac{|TC_1|}{|AC_1|} = \frac{|TA|}{|AC|}, \qquad \text{neboli} \qquad \frac{t_a}{t_c} = \frac{b}{c}.$$

Trojúhelníky $\mathsf{T}$ a $\mathsf{T}'$ jsou tedy podobné (*sus*).

Pokud je $\alpha = |\sphericalangle AUT|$, jsou podobné trojúhelníky $TB_1C$, $AC_1C$ (shodují se ještě v úhlu $\psi$), takže

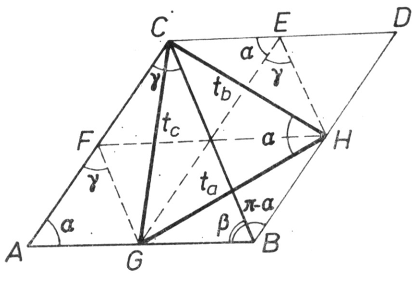
$$\frac{|TB_1|}{|AC_1|} = \frac{|TC|}{|AC|}, \quad \text{neboli} \quad \frac{t_b}{t_c} = \frac{c}{b},$$

a konečně pro $\alpha = |\sphericalangle TAU|$ zjistíme, že jsou podobné trojúhelníky $TB_1A$ a $AB_1B$ (mají ještě společný úhel $\psi$), takže vyjde

$$\frac{|TB_1|}{|AB_1|} = \frac{|TA|}{|AB|}, \quad \text{neboli} \quad \frac{t_b}{t_a} = \frac{b}{c}.$$

I v obou těchto případech tak vychází, že trojúhelníky T a T′ jsou podobné (*sus*). Tím je důkaz hotov.

**Jiné řešení** (podle I. Martišovitše, 4. ročník G J. Hronca v Bratislavě). Doplňme trojúhelník $ABC$ na rovnoběžník $ABDC$ a označme postupně $E, F, G, H$ středy jeho stran $DC, CA, AB$ a $BD$ (obr. 31). Trojúhelníky T′ a $GHC$ jsou tedy shodné. O trojúhelnících T, T′ budeme opět předpoklá-




Obr. 31

dat, že se shodují v úhlu $\alpha$, kde $\alpha, \beta, \gamma$ jsou příslušné úhly daného trojúhelníku $\mathsf{T} = ABC$.

Je-li $\alpha = |\sphericalangle GHC|$, pak podle věty o obvodových úhlech leží body $G, H, E, C$ na kružnici, a protože body $C, E$ leží oba v polorovině $GHC$, je $|\sphericalangle GCH| = |\sphericalangle GEH| = \gamma$.

Pokud je $\alpha = |\sphericalangle HGC|$, dostaneme symetrickou situaci, když místo trojúhelníku $ABC$ vezmeme shodný trojúhelník $DCB$ — analogicky vyjde, že je pak $|\sphericalangle GHC| = \gamma$.

A pokud $\alpha = |\sphericalangle GCH|$, leží body $G, B, H, C$ na kružnici, protože $|\sphericalangle GBH| = 180° - \alpha$. Pak je ale $|\sphericalangle CHG| = \beta$. Ve všech třech případech jsme tedy dostali, že se trojúhelníky $\mathsf{T}$, $\mathsf{T}'$ shodují ve dvou úhlech, takže jsou podobné.

## A - III - 5

Zřejmě je $P_1 = 2^2 = 4$, $P_2 = 2^4 - 1 = 15$. Pokud nejsou obě poslední pole obarvena, což lze zařídit třemi způsoby, existuje $P_{n-1}$ přípustných obarvení zbylých polí uvažovaného pásu (předpokládáme, že je $n \geqq 3$). Jsou-li obě poslední pole obarvena, jsou opět tři možnosti, jak obarvit dvě předposlední pole pásu, aniž by vznikl obarvený čtverec $2 \times 2$, a pro každou z nich máme $P_{n-2}$ přípustných obarvení zbylých polí. Je tedy

$$P_n = 3P_{n-1} + 3P_{n-2}. \tag{1}$$

Odtud plyne, že je $P_n$ dělitelné třemi pro $n \geqq 2$.

Dále dokážeme, že pro každé $k$ přirozené jsou čísla $P_{2k}$ a $P_{2k+1}$ dělitelná mocninou $3^k$, ale $3^{k+1}$ už nedělí $P_{2k+1}$. Pro $k = 1$ uvedené tvrzení platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každé $k \leqq m$. Podle indukčního předpokladu je

$$P_{2(m+1)} = 3(P_{2m} + P_{2m+1})$$

dělitelné číslem $3^{m+1}$. Podobně je i

$$P_{2m+3} = 3(P_{2m+1} + P_{2m+2})$$

dělitelné číslem $3^{m+1}$, ale není dělitelné vyšší mocninou 3, protože podle indukčního předpokladu je první sčítanec dělitelný jen $3^m$, zatímco druhý je dělitelný aspoň $3^{m+1}$.

Nejvyšší mocninou 3, kterou je dělitelné číslo $P_{1989}$, je $3^{994}$.

**Jiné řešení** (podle M. Krause, 3. ročník G v Karlových Varech). Pod každý sloupec obarveného pásu napíšeme 1, jsou-li obě políčka obarvena, a 0, je-li aspoň jedno z nich neobarveno. Obarvení pásu tedy vyhovuje úloze, právě když v získané posloupnosti nejsou dvě 1 vedle sebe.

Pro dané $n$ přirozené označme $p_n(k)$ počet $n$-členných posloupností, v nichž je $k$ jedniček a $n - k$ nul, přičemž žádné dvě jednotky nestojí vedle sebe $\left(\text{zřejmě musí být } k \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$. Protože 0 odpovídá třem možným obarvením příslušného sloupce (obr. 32), platí

$$P_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} p_n(k)\, 1^k \,.\, 3^{n-k}.$$

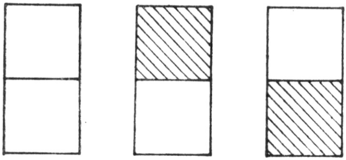
Odtud hned vidíme, že $3 | P_n$ pro každé $n \geqq 2$ $\left(k \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right] < n\right)$. Navíc pro každé $n$ liché platí

$$p_n\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right) = 1$$

(jediná možná posloupnost je $\underbrace{1010\ldots01}_{n}$. Speciálně je tedy $p_{1\,989}(995) = 1$, takže

$$P_{1\,989} = \sum_{k=0}^{995} p_n(k)\, 3^{1\,999-k}$$

je dělitelné právě mocninou $3^{994}$, ale ne už $3^{995}$.



Obr. 32

**Jiné řešení** (podle J. Vomlela, 3. ročník G J. K. Tyla v Hradci Králové). Stejně jako v prvním řešení ze vzorce (1) zjistíme, že $P_n$ je dělitelné třemi pro každé $n \geqq 2$. Opakovaným použitím vztahu (1) pak dostáváme

$$\begin{aligned} P_{1989} &= 3(P_{1\,988} + P_{1\,987}) = 3^2\,(P_{1\,987} + 2P_{1\,986} + P_{1\,985}) = \\ &= \ldots = 3^{994}\,(P_{995} + a_1\,P_{994} + \ldots + a_{993}\,P_2 + P_1), \end{aligned}$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_{993}$ jsou přirozená čísla. Protože $P_{995}, P_{994}, \ldots$ $\ldots, P_2$ jsou dělitelná třemi, ale $P_1$ ne, je $3^{994}$ nejvyšší mocnina trojky, která dělí číslo $P_{1\,989}$.

*Poznámka.* Řešením příslušné diferenční rovnice dostaneme pro přirozená $n$ vzorec

$$P_n = \left(2 + \frac{3}{7}\sqrt{21}\right)\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^{n-1} +$$

$$+ \left(2 - \frac{3}{7}\sqrt{21}\right)\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)^{n-1}.$$

## A - III - 6

Příklad posloupnosti $n, n-1, \ldots, 3, 2, 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$ ukazuje, že pro každé $n$ přirozené existuje posloupnost délky $2n-1$. Dokážeme matematickou indukcí, že delší taková posloupnost neexistuje.

Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Uvažujme tedy posloupnost splňující dané podmínky pro $n \geqq 2$. Pokud se v ní žádný člen neopakuje, má nejvýše $n \leqq 2n - 1$ členů. Předpokládejme tedy, že $a_k = a_{k+m}$ je první opakující se člen uvažované posloupnosti. Protože každé dva její sousední členy jsou různé, je $m > 1$ a navíc podle druhého požadavku se žádný z členů $a_{k+1}, \ldots, a_{k+m-1}$ již nikde jinde před $a_k$ ani po $a_{k+m}$ nevyskytuje! Vyřazením členů $a_{k+1}, \ldots, a_{k+m-1}, a_{k+m}$ proto dostaneme posloupnost, která splňuje dané podmínky (je $a_{k+m+1} \neq a_{k+m} = a_k$); přitom ale i posloupnost $a_{k+1}, \ldots,$ $\ldots, a_{k+m-1}$, kterou jsme vyřadili, uvedené podmínky rovněž splňuje a její délka je $m - 1$. Její členy mohou nabývat $r$ různých hodnot, které se už v nové posloupnosti nevyskytnou, přičemž podle indukčního předpokladu $m - 1 \leqq 2r - 1$.

Délka nové posloupnosti je podle indukčního předpokladu nejvýše $2(n - r) - 1$, původní posloupnost tedy měla délku nejvýše

$$2(n - r) + m - 1 \leqq 2(n - r) + 2r - 1 = 2n - 1.$$

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

**Jiné řešení** (podle P. Hliněného, 3. ročník G M. Koperníka v Bílovci). Pro dané přirozené $n$ označme $d(n)$ délku nejdelší posloupnosti splňující podmínky úlohy. V každé takové posloupnosti existuje číslo, které se tam vyskytuje jen jednou: Vezmeme-li totiž dvojici členů $a_p = a_q$ $(p < q)$ takovou, že $q - p > 1$ je nejmenší, leží mezi nimi aspoň jeden další člen uvažované posloupnosti ($a_p \neq a_{p+1}$, $a_{q-1} \neq$ $\neq a_q$), který se však už nemůže opakovat mezi $a_p$ a $a_q$ a nemůže se vyskytovat před $a_p$ ani za $a_q$ (jinak by nebyla splněna druhá podmínka).

Uvažujme $n \geqq 2$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_p = n$ je to číslo, které se v uvažované posloupnosti vyskytuje jen jednou.

Pokud je $a_{p-1} \neq a_{p+1}$, vynecháme z uvažované posloupnosti člen $a_p$, pokud $a_{p-1} = a_{p+1}$, vynecháme oba členy $a_p$, $a_{p+1}$. V obou případech dostaneme posloupnost složenou z čísel nejvýše rovných $n - 1$, která bude splňovat podmínky úlohy. Je tedy

$$d(n) \geqq d(n - 1) + 2.$$

Protože $d(1) = 1$, snadno zjistíme, že $d(n) \leqq 2n - 1$. Příklad posloupnosti $n, n - 1, \ldots, 3, 2, 1, 2, 3, \ldots, n - 1,$ $n$ ukazuje, že pro každé $n$ přirozené je $d(n) = 2n - 1$.