# 38. ročník matematické olympiády na středních školách

Korespondenční seminář ÚV MO

In: Leo Boček (editor); Jiří Binder (editor); Tomáš Hecht (editor); Karel Horák (editor); Pavel Töpfer (editor): 38. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1988/89. 30. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. pp. 178–188.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404880

# Korespondenční seminář ÚV MO

Korespondenční seminář je jednou z forem péče o talentované žáky. Vznikl ve 24. ročníku MO proto, aby bylo možno věnovat individuální péči i těm žákům, kteří neměli možnost navštěvovat speciální školy a pracovat v tamních seminářích. Nyní, kdy existují i krajské korespondenční semináře a kdy speciální školy s třídami zaměřenými na matematiku najdeme v každém kraji, je cílem tohoto semináře zlepšit individuální přípravu všech studentů, kteří prokázali své schopnosti a matematický talent v předchozích ročnících matematické olympiády. Korespondenční seminář tak nadále zůstává důležitou součástí přípravy na mezinárodní matematickou olympiádu.

K účasti v korespondenčním semináři jsme pozvali všechny špičkové řešitele kategorie A spolu s těmi studenty, kteří nějak vynikli v krajských kolech kategorií B a C předchozího ročníku MO. V průběhu 38. ročníku MO jim bylo postupně zasláno 5 sérií poměrně náročných úloh, jejichž texty najdete v úlohové části této ročenky (bez řešení). Došlá řešení pak byla opravena, ohodnocena a s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům semináře. Nejlepšími v celkovém hodnocení byli:

1. *Petr Hliněný*, 3. ročník G M. Koperníka, Bílovec
2. *Ilja Martišovitš*, 4. ročník G J. Hronca, Bratislava
3. *Ondřej Kalenda*, 3. ročník G W. Piecka, Praha
4. *Ondrej Šuch*, 3. ročník G A Markuša, Bratislava
5. *Martin Dindós*, 3. ročník G J. Hronca, Bratislava
6. *Marek Velešík*, 4. ročník G, Koněvova ul., Brno
7. *Vladimír Komár*, 3. ročník G, Šmeralova ul., Košice
8. *Eduard Omasta*, 3. ročník G, Ružomberok
9. *Petr Čížek*, 4. ročník G W. Piecka, Praha
10. *Martin Čížek*, 3. ročník G, Rožnov pod Radhoštěm

Korespondenční seminář je řízen tajemníkem ÚV MO *RNDr. Karlem Horákem, CSc.*, který se staral o výběr úloh a prováděl i redakci komentářů. Opravu pak zajišťovalo několik pracovníků MÚ ČSAV a několik studentů a aspirantů MFF KU Praha (všichni jsou bývalí olympionici).

## Úlohy korespondenčního semináře

**1.1** Na výšce $BH$ trojúhelníku $ABC$ je dán bod $P$. Označme $K$ a $L$ průsečíky přímek $AP$, $BC$ a přímek $CP$, $AB$. Dokažte, že úsečky $KH$ a $LH$ svírají s výškou $BH$ shodný úhel.

**1.2** Jsou dána kladná čísla $\lambda$, $\alpha$, $\beta$ a posloupnost $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ splňující následující rovnosti:

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = \lambda,$$

$$(\alpha + \beta)^n x_n = \alpha^n x_n x_0 + \alpha^{n-1} \beta x_{n-1} x_1 + \\ + \alpha^{n-2} \beta^2 x_{n-2} x_2 + \ldots + \beta^n x_0 x_n \ (n > 1).$$

Najděte $x_n$ a zjistěte, pro které $n$ je $x_n$ největší.

**1.3** Na přímce je dáno 50 úseček. Dokažte, že platí alespoň jedno z následujících tvrzení:
a) existuje 8 úseček se společným bodem;
b) existuje 8 úseček, z nichž každé dvě jsou disjunktní.

**1.4** Je dáno několik čtverců, jejichž celkový obsah je 1. Dokažte, že je možno je umístit do čtverce s obsahem 2, aniž by se překrývaly.

**1.5** Na kružnici je dána množina F oblouků, pro kterou platí, že při libovolném otočení $R$ kolem středu dané kružnice mají množiny F a $R$(F) společný bod. Jaký nejmenší součet délek mohou mít oblouky z množiny F, je-li počet oblouků $n$?

**1.6** Nechť strany trojúhelníku $ABC$ jsou základnami rovnoramenných trojúhelníků $AB_1C$, $BA_1C$ a $AC_1B$. Dokažte, že kolmice vedené z bodů $A$, $B$, $C$ k odpovídajícím přímkám $B_1C_1$, $C_1A_1$, $A_1B_1$ procházejí jedním bodem.

**1.7** Najděte všechna řešení rovnice

$$\sqrt[n]{x^n - a^n} + \sqrt[n]{2a^n - x^n} = a,$$

je-li $a$ reálné a $n > 1$ přirozené.

**2.1** Zjistěte, pro která $n$ platí: Je-li dán pravidelný $n$-úhelník ($n \geqq 3$), v jehož vrcholech jsou rozmístěny černé a bílé kameny, pak existují tři kameny stejné barvy ležící ve vrcholech rovnoramenného trojúhelníku.

**2.2** Jezero v Kocourkově má tvar nekonvexního $n$-úhelníku. Dokažte, že buď z žádného jeho bodu není vidět všechny břehy, anebo množina takových bodů tvoří vnitřek konvexního $m$-úhelníku, kde $m \leqq n$.

**2.3** Představme si nekonečnou šachovnici ve tvaru horní poloroviny: na bílých polích šachovnice jsou zapsána nějaká čísla tak, aby pro každé černé pole platilo, že součet čísel v levém a pravém sousedním poli je stejný jako součet v horním a spodním sousedním poli. Je-li dáno nějaké číslo $d_n$ stojící v $n$-té řadě, kolik nejméně čísel stojících v prvních dvou řadách šachovnice musíme ještě znát, abychom mohli určit číslo stojící v $(n + 2)$. řadě nad číslem $d_n$?

**2.4** Víme-li, že na $i$-tém výletě turistického oddílu ($1 \leqq i \leqq n$) bylo $\alpha_i . 100\%$ chlapců, kolik nejvýše procent chlapců je v oddíle? (Každý se zúčastnil aspoň jednoho výletu.)

**2.5** Nechť $K$ je střed hrany $AB$ dolní podstavy pravidelného komolého jehlanu a $L$ střed některé hrany $CD$ jeho horní podstavy. Dokažte, že průměty obou úseček $AB$, $CD$ na přímku $KL$ mají stejnou délku.

**2.6** V rovině jsou dány dva body $A$, $B$ a přímka $p$ procházející bodem $A$ a neprocházející bodem $B$. Uvažujme libovolnou kružnici se středem $O$ procházející body $A$, $B$ a označme $C$ její průsečík s přímkou $p$. Najděte geometrické místo středů úseček $OC$.

**2.7** Jsou dána čísla 1, 2, 3, ..., 1000. Najděte největší $m$ takové, že po vyškrtnutí libovolných $m$ čísel mezi zbylými $1000 - m$ čísly existují dvě, z nichž jedno dělí druhé.

**3.1** Pro přirozená čísla $k < n$ rozestavte čísla $1, 2, 3, \ldots, n^2$ do tabulky $n \times n$ tak, aby v každém řádku čísla rostla a přitom součet čísel v $k$-tém sloupci byl

a) nejmenší;

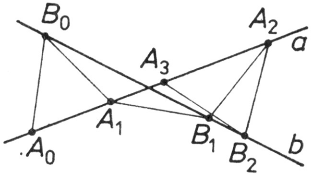
b) největší.

**3.2** Jsou dána přirozená čísla $k$ a $m$. Mezi celočíselnými řešeními $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = m$$

vyberme $N$ takových, že $0 \leqq x_i \leqq m \, (1 \leqq i \leqq k)$ a každé dvě z nich se liší na všech místech. Zjistěte, jaké je největší možné $N$.

**3.3** V rovině jsou dány dvě různoběžky $a$, $b$. V bodě $A_0 \in a$ ve vzdálenosti menší než 1 od přímky $b$ sedí blecha. Blecha postupně poskakuje do bodů $B_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ podle následujících pravidel (obr. 33):




Obr. 33

1. body $A_0, A_1, \ldots$ leží na přímce $a$, body $B_0, B_1, \ldots$ na přímce $b$;
2. $|A_0B_0| = |B_0A_1| = |A_1B_1| = |B_1A_2| = \ldots = 1$;
3. $A_{n+1} = A_n$, jen když $A_nB_n \perp a$, a $B_{n+1} = B_n$, jen když $B_nA_{n+1} \perp b$.

Dokažte, že je-li velikost úhlu přímek $a$, $b$ racionální (ve stupňové míře), bude cesta blechy periodická (tj. dostane se opět do bodu $A_0$ a pak zas bude pokračovat do bodů $B_0, A_1, \ldots$); a je-li iracionální, nedostane se blecha do žádného bodu víc než dvakrát.

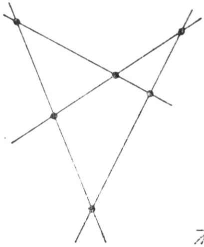
**3.4** Jsou dána dvě nesoudělná přirozená čísla $a$, $b$. Jak známo, každé celé číslo lze vyjádřit jako $ax + by$ s celými $x$ a $y$. Uvažujme množinu M těch celých čísel, která jsou tvaru $ax + by$ pro celá nezáporná $x$, $y$.

a) Jaké je největší celé číslo $c$, které nepatří do M?

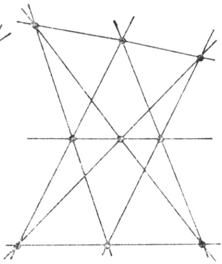
b) Dokažte, že z čísel $n$ a $c - n$ ($n$ je celé) jedno patří do M a druhé ne.

**3.5** Je dán trojúhelník $ABC$. Kolik existuje bodů $D$ takových, že čtyřúhelníky $ADBC$, $ABDC$ a $ABCD$ mají stejný obvod?

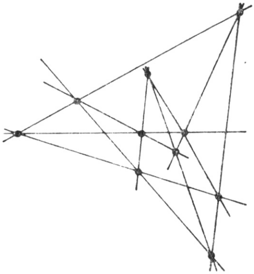
**3.6** Na obr. 34 je šest bodů ležících po třech na čtyřech přímkách. Dokažte, že existuje právě 24 různých zobrazení, která převádějí uvedených šest bodů na sebe, přičemž každá trojice bodů ležících v přímce se zobrazí na trojici bodů ležících v přímce. Zjistěte, kolik takových zobrazení existuje pro konfigurace na obr. 35 a 36 (9 bodů na 9 přímkách a 10 bodů na 10 přímkách).



Obr. 34



Obr. 35



Obr. 36

**3.7** Uvažujme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{3\,000}$ číslic 1, 2 a operaci, která umožňuje prohodit dvě libovolné sousední trojice číslic. Všechny takové posloupnosti rozdělme do disjunktních tříd, přičemž v jedné třídě budou všechny posloupnosti, které lze na sebe převést pomocí několika uvedených operací. Kolik existuje takových tříd?

**4.1** Pro libovolný nepravoúhlý trojúhelník $\mathsf{T}$ označme $H(\mathsf{T})$ trojúhelník, jehož vrcholy jsou paty výšek trojúhelníku $\mathsf{T}$ (tzv. úpatnicový trojúhelník). Uvažujme posloupnost trojúhelníků $\mathsf{T}_1 = H(\mathsf{T})$, $\mathsf{T}_2 = H(\mathsf{T}_1), \ldots$. Jaké musí být úhly trojúhelníku $\mathsf{T}$, aby

a) trojúhelník $H(\mathsf{T})$ byl ostroúhlý,

b) v posloupnosti $\mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2, \ldots$ se vyskytl pravoúhlý trojúhelník $\mathsf{T}_n$ (takže $\mathsf{T}_{n+1}$ není definován),

c) trojúhelník $\mathsf{T}_1 = H(\mathsf{T})$ byl podobný trojúhelníku $\mathsf{T}$?

Pro každé $n$ přirozené zjistěte, kolik existuje navzájem nepodobných trojúhelníků $\mathsf{T}$, pro něž je trojúhelník $\mathsf{T}_n$ podobný trojúhelníku $\mathsf{T}$.

**4.2** Najděte všechna celočíselná řešení rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

taková, že žádné z čísel $x, y, z$ není rovno 1.

**4.3** V rovině jsou dány dva body $A$, $B$. Najděte množinu všech vrcholů $C$ trojúhelníků $ABC$, pro něž mají stejnou délku

a) výška $AA'$ a strana $BC$;

b) těžnice $AA_1$ a strana $AC$;

c) těžnice $AA_1$ a strana $BC$;

d) výška $CC'$ a těžnice $BB_1$;

e) výška $BB'$ a těžnice $CC_1$.

**4.4** Označme $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ vnitřní úhly trojúhelníku $ABC$ a položme

$$S = \mathrm{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2 \frac{\gamma}{2}.$$

a) Je-li trojúhelník $ABC$ ostroúhlý či pravoúhlý, je $S \leqq 2$;

b) je-li trojúhelník $ABC$ tupoúhlý s tupým úhlem aspoň $2 \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$, je $S \geqq 2$;

c) mezi trojúhelníky s tupým úhlem $\gamma$, $\frac{\pi}{2} < \gamma < 2 \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$, existují takové, pro něž $S < 2$, i takové, pro něž $S > 2$. Dokažte.

**4.5** Na nekonečném listu bílého čtverečkovaného papíru je $n$ čtverečků obarveno černě. V jednotlivých okamžicích $t = 1, 2, \ldots$ změníme barvy všech čtverečků podle následujícího pravidla: každý čtvereček obarvíme podle převládající barvy v trojici, kterou s daným čtverečkem tvoří jeho horní a pravý soused. Dokažte, že nejpozději v čase $t = n$ černé čtverečky zmizí.

**4.6** Je dán konvexní $n$-úhelník, jehož žádné dvě strany nejsou rovnoběžné, a uvnitř něho bod. Dokažte, že existuje nejvýše $n$ přímek procházejících daným bodem a dělicích daný mnohoúhelník na dvě části stejného obsahu.

**4.7** Ve středu čtverce stojí policajt a v jednom z vrcholů pachatel. Policajt se může pohybovat po celém čtverci rychlostí nejvýše $u$, zatímco pachatel se může pohybovat jen po stranách čtverce nejvýše rychostí $v$. Zjistěte, pro jaký poměr rychlostí $u/v$ se policajtovi může podařit dostat se s pachatelem na stejnou stranu čtverce, přestože pachatel se tomu snaží zabránit.

**5.1** Je-li $O$ bod uvnitř trojúhelníku $ABC$ takový, že $|\sphericalangle BOC| - |\sphericalangle BAO| = 90°$, označme $M$ a $N$ paty kolmic spuštěných z bodu $O$ na strany $AB$ a $AC$ a $P$ průsečík přímek $BO$, $MN$. Potom je $|\sphericalangle BPC| = 90°$. Dokažte.

**5.2** V obdélníkové tabulce $m \times n$ je zapsáno $mn$ kladných čísel. Uvažujme součiny $m$ čísel v každém sloupci a součet $S$ všech $n$ takových součinů. Přerovnáme-li čísla v každém řádku podle velikosti, nebude výsledný součet $S$ nové tabulky menší. Dokažte.

**5.3** Pro libovolné přirozené $n$ najděte součet

$$S_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \binom{n-k}{k} \frac{1}{4^k}.$$

**5.4** V prostoru jsou dány čtyři body, které neleží v jedné rovině. Kolik existuje různých rovnoběžnostěnů, jejichž čtyři vrcholy tvoří dané body?

5.5 Je dána konečná množina bodů v rovině, v níž každé tři body určují tupoúhlý trojúhelník. Dokažte, že k takové množině lze vždy přidat další bod tak, aby uvedená vlastnost zůstala zachována. Platí analogické tvrzení i pro nekonečnou množinu bodů v rovině s uvedenou vlastností?

5.6 Jestliže

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^{496} =$$
$$= a_0 + a_1 x + \dots + + a^{1984} x^{1984},$$

určete největší společný dělitel čísel $a_3, a_8, a_{13} \dots, a_{1983}$. Zároveň dokažte, že platí $10^{340} < a_{992} < 10^{347}$.

5.7 Zjistěte, zda existuje 100 přímek v rovině, které mají právě 1985 různých průsečíků.