38. ročník matematické olympiády na středních školách

30. medzinárodná matematická olympiáda

In: Leo Boček (editor); Jiří Binder (editor); Tomáš Hecht (editor); Karel Horák (editor); Pavel Töpfer (editor): 38. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1988/89. 30. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. pp. 189–200.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404881

30. medzinárodná matematická olympiáda

Braunschweig (SRN) 13. – 24. júl 1989

SRN sa stala hostiteľom 30. medzinárodnej matematickej olympiády. Zúčastnilo sa jej 291 súťažiacich z 50 krajín, čo je rekordom v doterajšej histórii MMO. Každá krajina mohla vyslať 6-členné družstvo, čo prevažná väčšina štátov aj využila. Olympiáda sa konala v tichom asi 250-tisícovom Braunschweigu, v Dolnom Sasku. Mesto má matematické tradície, pôsobil tu okrem iných matematikov aj C. F. Gauss a je sídlom technickej univerzity a iných vysokých škôl.

Jury začala svoju činnosť 13. júla výberom a prekladom súťažných úloh do rodných jazykov žiakov. Medzi 32 úlohami, ktoré sa dostali do užšieho výberu, bola aj 1 československá úloha. 16. júla bolo nakoniec vybraných 6 súťažných úloh — po jednej úlohe z Austrálie, Islandu, Holandska, Filipín, Švédska, Poľska.

Súťažiaci spolu s pedagogickými vedúcimi pricestovali do Braunschweigu 16. júla. Boli ubytovaní na viacerých miestach, československé družstvo bývalo v internáte neďaleko stredu mesta. 17. júla bolo slávnostné zahájenie olympiády za účasti predstaviteľov krajinskej i spolkovej vlády. 18. a 19. júla boli súťažné dni, v rámci ktorých študenti dostali po 3 úlohy. Na riešenie každej trojice úloh mali 4,5 hodiny čistého času. Nasledujúce dni sa konala oprava a koordinácia opráv žiackych riešení. 23. júla bolo slávnostné vyhlásenie výsledkov za účasti spolkového ministra pre výuku a vedu *Möllemanna*, ktorý aj odovzdával zlaté medaily, krajinského ministra *H. Horrmanna* a predsedu jury *A. Engela*. Zostávajúce dni boli pre žiakov určené na spoznávanie hostiteľskej krajiny. Hostitelia zorganizovali celodenný výlet do Hannoveru s nezabudnuteľným kultúrnym programom v Herrenhausen Garten, výlet do Gifhornu s návštevou múzea veterných mlynov, prehliadku Braunschweigu, exkurzie do výrobných podnikov. Dňa 24. júla sme sa spoločne vrátili do vlasti.

Tabuľka 5

Krajina	Počet žiakov	Body	1. cena	2. cena	3. cena	č. uzn.
Austrália	6	119		2	2	
Belgicko	6	111			3	2
Brazília	6	64			3	
Bulharsko	6	195	1	3	2	
Cyprus	6	24				1
Československo	6	202	2	1	3	
Čína	6	237	4	2		
Filipíny	6	45		1		
Fínsko	6	58				3
Francúzsko	6	156		1	5	
Grécko	6	122		1	3	2
Holandsko	6	92		1	1	2
Hong Kong	6	127		2	1	1
India	6	107			4	1
Indonézia	6	21				
Irán	6	147		2	3	1
Írsko	6	37				2
Island	4	33				2
Izrael	6	105		2	1	
Juhoslávia	6	170	1	3	1	1
Južná Kórea	6	97		1		4

(pokračovanie tabuľky 5)

Krajina	počet žiakov	body	1. cena	2. cena	3. cena	č. uzn.
Kanada	6	123		1	3	2
Kolumbie	6	119		1	2	3
Kuba	6	69			1	3
Kuwait	6	31				
Luxemburg	3	65		1	1	
Maďarsko	6	175		4	1	1
Maroko	6	63			1	3
Mexiko	6	79			1	3
NDR	6	216	3	2	1	
Nórsko	4	64			1	2
Nový Zéland	6	69			2	2
NSR	6	187	1	3	2	
Peru	6	51				3
Poľsko	6	157		3	3	
Portugalsko	6	39				4
Rakúsko	6	111		2	1	1
Rumunsko	6	223	2	4		
Singapúr	6	143			4	2
Španielsko	6	61			1	4
Švédsko	6	73			2	1
Taliansko	6	124		1	2	3
Thajsko	6	54			1	2
Tunis	6	81		1		2
Turecko	6	133		1	4	1
USA	6	207	1	4	1	
Veľká Británia	6	122		2	1	2
Venezuela	4	6				
Vietnam	6	183	2	1	3	
ZSSR	6	217	3	2	1	

Každý súťažiaci mohol získať maximálne 42 bodov. 1. cena bola udeľovaná za 38—42 bodov (20 úč.)., 2. cena za 30—37 bodov (55 úč.) a 3. cena za 18—29 bodov (72 úč.), čestné uznanie za vyriešenie aspoň jedného príkladu za 7 bodov.

Hodnotenie československej účasti:

Československé družstvo tvorili *Tomáš Brodský* zo 4. roč. Gymnázia na tr. kpt. Jaroša v Brne, *Petr Čížek* zo 4. roč. Gymnázia W. Piecka v Prahe, *Petr Hliněný* z 3. roč. Gymnázia v Bílovci, *Vladimír Komár* z 3. roč. Gymnázia na Šmeralovej ulici v Košiciach, *Ondrej Šuch* z 3. roč. Gymnázia A. Markuša v Bratislave a *Marek Velešík* zo 4. roč. Gymnázia na Konevovej v Brne. V. Komár sa zúčastnil namiesto I. Martišovitša, ktorý tesne pred odchodom ochorel.

Vedúcim delegácie bol *doc. RNDr. Leo Boček, CSc.*, z MFF UK v Prahe, zástupcom vedúceho *doc. RNDr. Tomáš Hecht, CSc.*, z MFF UK v Bratislave.

Výsledky jednotlivých žiakov vidno z tabuľky:

Tabuľka 6

Meno	úl. 1	úl. 2	úl. 3	úl. 4	úl. 5	úl. 6	súčet	cena
Brodský	1	7	0	7	7	7	29	3.
Čížek	7	7	7	7	7	7	42	1.
Hliněný	7	7	1	7	7	7	36	2.
Komár	7	7	0	0	7	6	27	3.
Šuch	7	7	7	7	7	6	41	1.
Velešík	6	0	0	7	7	7	27	3.

Je to náš najlepší výsledok za posledné roky. V neoficiálnom hodnotení družstiev sme skončili na peknom 6. mieste (za

Čínou, Rumunskom, ZSSR, NDR a USA). Získali sme 2 zlaté medaily, pričom P. Čížek získal plný počet bodov. Ukázali sa výsledky systematickej prípravy študentov na MMO (2 sústredenia, korešpondenčné semináre, príprava v triedach so zameraním na matematiku, rôzne pomocné akcie, široká báza olympiády). Treba však povedať, že vybrané úlohy našim žiakom »sadli«, boli to témy tradične sa vyskytujúce v domácej súťaži, resp. precvičované na sústredeniach. Dobrý výsledok je zároveň záväzkom do budúcnosti.

Texty súťažných úloh

1. Dokážte, že množina $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ sa dá napísať ako zjednotenie po dvoch disjunktných množín $A_1, A_2, \ldots, A_{117}$ tak, že sú splnené nasledujúce podmienky:
   (1) každá z množín A_i má práve 17 prvkov,
   (2) súčet všetkých čísel z množiny A_i je pre všetky $i \in \{1, 2, \ldots, 117\}$ rovnaký.
2. Osi vnútorných uhlov pri vrcholoch A, B, C ostrouhlého trojuholníka ABC pretínajú jemu opísanú kružnicu po rade v bodoch A_1, B_1, C_1. Priamka AA_1 pretína osi vonkajších uhlov pri vrcholoch B, C trojuholníka ABC v bode A_0. Analogicky sú určené body B_0, C_0. Dokážte, že
   a) $S_{A_0B_0C_0} = 2\, S_{AC_1BA_1CB_1}$,
   b) $S_{A_0B_0C_0} \geqq 4\, S_{ABC}$,
   kde $S_{A_0B_0C_0}$, $S_{AC_1BA_1CB_1}$, S_{ABC} značia obsahy trojuholníka $A_0B_0C_0$, šesťuholníka $AC_1BA_1CB_1$ a trojuholníka ABC.

3. Nech n, k sú prirodzené čísla ($n \geqq k$) a S je množina n bodov roviny s týmito vlastnosťami:

(i) žiadne tri body množiny S neležia na priamke,

(ii) ku každému bodu $P \in S$ existuje v S aspoň k navzájom rôznych bodov rovnako vzdialených od bodu P.

Potom $k < 1/2 + \sqrt{2n}$. Dokážte!

4. Pre strany AB, AD a BC konvexného štvoruholníka $ABCD$ platí $|AB| = |AD| + |BC|$. Vo vnútri tohto štvoruholníka existuje bod P tak, že $|AP| = h + |AD|$ a $|BP| = h + |BC|$, kde h je vzdialenosť bodu P od priamky CD. Dokážte, že

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqq \frac{1}{\sqrt{|AD|}} + \frac{1}{\sqrt{|BC|}}.$$

5. Ku každému prirodzenému číslu n existuje n za sebou idúcich prirodzených čísel tak, že žiadne z nich nie je mocninou prvočísla s celočíselným exponentom. Dokážte!

6. Permutáciu $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ čísel $1, 2, \ldots, 2n$ nazveme peknou, ak platí $|x_i - x_{i+1}| = n$ pre aspoň jedno $i \in \{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$. Dokážte, že pre každé n je viac ako polovica permutácií pekných.

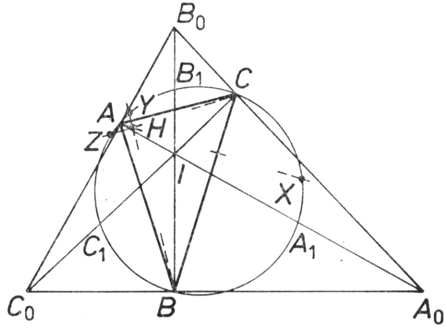
Riešenia úloh

1. Problém úlohy spočíva v tom, že 17 je nepárne číslo. Nebol by napr. žiadny problém rozdeliť množinu $\{1, 2, \ldots, \ldots, 1000\}$ do 50 dvadsaťprvkových množín predpísaným spôsobom, vytvorili by sme totiž 500 dvojčiat $\{k, 1001 - k\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, 500\}$ a do každej z 50 množín by sme dali po 10 dvojčiat. Túto myšlienku využijeme aj v riešení našej úlohy. Rozdelíme množinu $\{1, 2, \ldots, 351\}$ do 117 (disjunktných) trojprvkových množín s rovnakým súčtom. Potom rozdelíme množinu $\{352, 353, \ldots, 1989\}$ do 117 štrnásťprvkových množín s rovnakým súčtom metódou »dvojčiat« $\{k, 2341 - k\}$, $k \in \{352, 353, \ldots, 1170\}$. Zjednotením vždy jednej trojprvkovej a jednej 14-prvkovej množiny získame požadovanú 17-prvkovú množinu. Zostáva popísať rozdelenie množiny $\{1, 2, \ldots, 351\}$. To vidno z nasledujúceho predpisu:

$$
\begin{array}{cc}
\{1, 176, 351\} & \{60, 118, 350\} \\
\{2, 177, 349\} & \{61, 119, 348\} \\
\{3, 178, 347\} & \{62, 120, 346\} \\
\vdots & \vdots \\
\{58, 233, 237\} & \{116, 174, 238\} \\
\{59, 234, 235\} & \{117, 175, 236\}
\end{array}
$$

2. a) Označme I priesečník osí (vnútorných) uhlov (obr. 37). Potom $|IA_1| = |A_1 A_0|$. Vyplýva to napr. z toho, že A_0A, B_0B, C_0C sú výšky trojuholníka $A_0B_0C_0$, teda kružnica opísaná trojuholníku ABC je kružnica deviatich bodov (Feuerbachova kružnica) pre trojuholník $A_0B_0C_0$, to znamená, že rozpoľuje úsečku IA_0. (Iný dôkaz: $|IA_1| = |A_1B|$, lebo $|\sphericalangle A_1IB| \cong$ $\cong |\sphericalangle IBA_1|$ a $|A_1B| \cong |A_1A_0|$ zo zhodnosti príslušných uhlov v trojuholníku A_0A_1B.) Z tohoto dostaneme

$$\text{obsah} \triangle IA_1B = \text{obsah} \triangle A_0A_1B.$$



Obr. 37

Ak tento argument zopakujeme postupne pre všetkých 6 trojuholníkov s vrcholom I a rovnosti sčítame, dostaneme a).

b) Označme H priesečník výšok trojuholníka ABC, X obra bodu H v osovej súmernosti podľa priamky BC, Y podľa priamky AC a Z podľa priamky AB. Potom X, Y, Z ležia na kružnici opísanej trojuholníku ABC (pretože $|\sphericalangle CXB| = |\sphericalangle CHB| = 180 - \alpha$). Pretože A_1 je stred oblúka BC, je obsah $\triangle BA_1C \geqq$ obsah $\triangle BXC$. Potom $S_{AC_1BA_1CB_1} \geqq S_{AZBXCY} = 2(S_{BHC} + S_{CHA} + S_{AHB}) = 2S_{ABC}$, čo dokazuje naše tvrdenie.

3. Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme $k \geqq 1/2 + \sqrt{2n}$. Ku každému bodu $P \in S$ existuje najmenej $\binom{k}{2}$ dvojíc bodov A, B, pre ktoré $|AP| = |BP|$. Teda máme aspoň $n.(k|2)$ dvojíc bodov A, B, pre ktoré na osi úsečky AB leží aspoň jeden bod z množiny S. Počítajme:

$$n \cdot \binom{k}{2} = n\frac{k(k-1)}{2} \geqq \frac{n}{2}\left(\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{2n} - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= n \cdot \left(n - \frac{1}{8}\right) > 2\binom{n}{2}$$

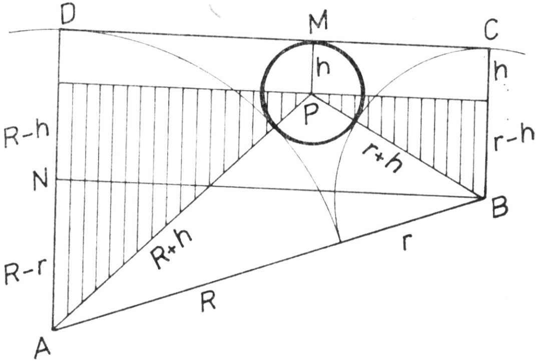
Pretože máme len $\binom{n}{2}$ rôznych dvojíc bodov A, B $(A, B \in S)$, tak musí existovať dvojica bodov A, B, ktorá je započítaná aspoň trikrát, t.j. na osi úsečky AB ležia aspoň 3 rôzne body z S. To je však spor s predpokladom.

4. Uvažujme štvoruholník $ABCD$ s vlastnosťami (i) a (ii) pre rôzne hodnoty h. Označme $|AD| = R$, $|BC| = r$. Skonštruujme trojuholník ABP so stranami $R + r$, $R + h$, $r + h$. Ďalej skonštruujme kružnice $k_1 = (A, R)$, $k_2 = (B, r)$, $k_3 = (P, h)$. Body C a D ležia po rade na kružniciach k_1, k_2 a CD je dotyčnicou ku k_3. Z toho plynie, že h nadobúda maximálnu hodnotu vtedy, keď CD je zároveň spoločnou dotyčnicou ku kružniciam k_1, k_2. Ukážeme, že v tomto prípade

$$\frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{|AD|}} + \frac{1}{\sqrt{|BC|}},$$

z čoho plynie okamžite dokazovaná nerovnosť. Označme M pätu kolmice spustenej z bodu P na priamku CD (obr. 38), N pätu kolmice spustenej z bodu B na priamku AD. Z pravouhlého trojuholníka ABN dostaneme:

$$|CD| = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$



Obr. 38

Ďalej

$$|CD| = |CM| + |MD| = \sqrt{(r+h)^2 - (r-h)^2} + \\ + \sqrt{(R+h)^2 - (R-h)^2} = 2\sqrt{rh} + 2\sqrt{Rh}$$

Odtiaľ dostaneme:

$$\sqrt{Rr} = \sqrt{rh} + \sqrt{Rh}$$

a po predelení $\sqrt{Rrh}$ požadovaný vzťah.

$$\frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{R}}$$

5. Číslo nie je mocninou prvočísla práve vtedy, keď je deliteľné aspoň dvoma rôznymi prvočíslami. To využijeme v dôkaze. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa

n. Pre $n = 1$ tvrdenie platí, stačí napr. vziať číslo 6. Predpokladajme, že čísla $a + 1, a + 2, \ldots, a + n$ tvoria n za sebou idúcich prirodzených čísel, z ktorých žiadne nie je mocninou prvočísla. Nech $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sú všetky prvočísla, ktoré sa vyskytujú v ich rozkladoch a p_{k+1}, p_{k+2} sú prvočísla, rôzne od $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Ďalej označme $M = p_1, p_2, \ldots, p_k$. Zrejme

$$p_i \mid c \Leftrightarrow p_i \mid c + M \text{ pre } i = 1, 2, \ldots, k, c \in N. \qquad (^*)$$

Teraz nájdeme $s \in N$ tak, aby číslo $a + n + 1 + sM$ bolo deliteľné p_{k+1} (to ide, pretože čísla p_{k+1} a M sú nesúdeliteľné). Označme $P = M . p_{k+1}$. Nájdime ešte $t \in N$ tak, aby číslo $a + n + 1 + sM + t . P$ bolo deliteľné p_{k+2} (dá sa to, pretože čísla p_{k+2} a P sú nesúdeliteľné). Označme ešte $Q = a + sM + tP$. Potom čísla $Q + 1, Q + 2, \ldots, Q + n + 1$ tvoria $n + 1$ čísel požadovanej vlastnosti — prvých n je deliteľných aspoň dvomi prvočíslami z množiny $p_1, p_2, \ldots, p_k$ na základe indukčného predpokladu $(^*)$ a číslo $Q + n + 1$ je deliteľné $p_{k+1} . p_{k+2}$, čo dokazuje tvrdenie.

6. Nech číslo n je dané pevne. Nahraďme po rade čísla $n + 1, n + 2, \ldots, 2n$ číslami $1, 2, \ldots, n$. Potom možno úlohu preformulovať takto:

Máme n dvojičiek $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$ a z týchto $2n$ čísel budeme vytvárať $2n$-členné postupnosti. Ktorých postupností je viac: tých, ktoré obsahujú vedľa seba rovnaké čísla, alebo takých, čo ich neobsahujú?

Postupnosť $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ je typu A, ak sa vedľa seba nevyskytujú rovnaké čísla, typu B, ak sa rovnaké čísla vedľa seba vyskytujú. Označme A_n počet $2n$-členných postupností typu A a B_n počet $2n$-členných postupností typu B. Z postupnosti typu A s členmi $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$ možno pridaním dvojice $n + 1$, $n + 1$ $\binom{2n+1}{2}$ spôsobmi vyrobiť postupnosť typu A (čísla vložíme do rôznych medzier medzi členmi pôvodnej postupnosti) a $2n + 1$ spôsobmi postupnosť typu B (čísla $n + 1$, $n + 1$ vložíme do tej istej medzery). Z postupnosti typu B na $2n$-prvkovej množine možno vyrobiť postupnosť typu A nanajvýš $2n$ spôsobmi (jedným číslom $n + 1$ oddelíme rovnaké čísla, druhé vložíme do niektorej zo zvyšných $2n$ medzier, avšak ak je vedľa seba viac dvojičiek, tak spôsobov je menej) a aspoň $2n + 1 + \binom{2n}{n}$ spôsobmi postupnosť typu B (čísla $n + 1$, $n + 1$ vložíme do tej istej medzery alebo do rôznych medzier, avšak neporušíme existujúcu dvojičku). Z týchto úvah vyplývajú vzťahy:

$$A_{n+1} \leqq n(2n + 1) A_n + 2n B_n$$
$$B_{n+1} \geqq (2n + 1) A_n + (2n^2 + n + 1) B_n$$

Teraz už vidíme, že ak $B_n \geqq A_n > 0$, tak $B_{n+1} > A_{n+1}$. Naozaj:

$$B_{n+1} = (2n^2 + 3n + 2) B_n - (2n + 1)(B_n - A_n) >$$
$$> (2n^2 + 3n) B_n - (2n^2 + n)(B_n - A_n) = A_{n+1}$$

K dôkazu si teraz stačí uvedomiť, že $A_1 = 0$, $B_1 = 1$. Bude teda $B_n > A_n$ aj pre všetky $n \geqq 2$. Postupností typu B je teda ozaj viac ako polovica, čo sme mali dokázať.