38. ročník matematické olympiády na základních školách

Vybrané úlohy z korespondenčních seminářů a dalších soutěží

In: Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 38. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1988/89. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. pp. 138–157.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404895

Vybrané úlohy z korespondenčních seminářů a dalších soutěží

Snad v každém kraji a často i v okresech se konaly ve školním roce 1988/89 korespondenční soutěže pro všechny zájemce o řešení zajímavých matematických úloh. Korespondenční semináře jsou dobrou školou pro všechny mladé matematiky. Pro všechny účastníky je cenné zejména to, že organizátoři jim vracejí opravené úlohy často i s komentáři, jaké udělali chyby. Nejlepší z řešitelů jsou zpravidla zváni na několikadenní soustředění.

Kromě korespondenčních seminářů se pro mladé matematiky pořádají vedle oficiální matematické olympiády i další matematické soutěže. Například v Západočeském kraji je to nástavbová soutěž — 3. kolo matematické olympiády pro kategorie Z5 až Z7. Na matematické olympiádě je naproti tomu nezávislá soutěž »Dejte hlavy dohromady« pořádaná pražskou pobočkou JČSMF pro talentované žáky 6. ročníků.

Věříme, že vybrané úlohy z těchto akcí přijmou se zájmem především ti mladí matematici, kteří nemají příležitost se podobných akcí zúčastnit. Zároveň věříme, že zveřejnění těchto úloh může inspirovat i další organizátory k pořádání podobných akcí.

A

V Praze pořádá KV MO spolu s gymnáziem W. Piecka (od roku 1990 gymnázium Korunní tř.) již 3. ročník Pikomatu pro žáky 8. roč. ZŠ. Hlavním organizátorem je *prof. J. Zhouf*. Přinášíme tyto vybrané úlohy:

1. Určete největšího společného dělitele čísel
$$m = 1.2.3.\ldots.25.26 \text{ a } n = 10^{10}.$$

2. Kůň a mezek, oba těžce naloženi, šli jeden vedle druhého. Kůň si stěžoval na svůj těžký náklad. »Na co si stěžuješ?« zeptal se ho mezek. »Vždyť kdybych si vzal jeden z tvých pytlů, byl by můj náklad dvakrát těžší než tvůj, ale kdybys ty vzal jeden pytel z mých zad, měli bychom oba stejně těžké náklady.« Kolik pytlů nesl kůň a kolik mezek?

3. Zjistěte, zda lze do čtverce o straně 1 umístit navzájem se nepronikající kruhy tak, aby součet jejich poloměrů byl větší než 1 989.

4. Nejvýše kolik čísel lze vybrat z čísel 1, 2, 3, ..., 99, 100, aby mezi nimi nebyla žádná dvě, jejichž poměr je mocnina dvou?

5. Může mít lichoběžník strany dlouhé 5 cm, 5 cm, 6 cm, 8 cm? Které z těchto hodnot jsou pak délkami jeho základen? Najděte všechna řešení.

6. Na kružnici je n bodů ($n \geqq 1$, celé). Označte je postupně proti smyslu hodinových ručiček čísly 1, 2, 3, ..., $n - 1$, n. V bodě 1 sedí blecha, která začne skákat. Skočí do bodu 2,

z něj do bodu 4, pak do bodu 7 atd. Tzn. při i-tém skoku přeskočí bod $i - 1$. Dokažte, že pro lichá n vždy existuje bod, na který blecha neskočí. (Mimo soutěž: Jak je to pro sudá n?)

B

V Jihočeském kraji se uskutečnil 3. ročník Pikomatu, který pod vedením *dr. Sokola* připravili pracovníci gymnázia v Jírovcově ul. v Českých Budějovicích a pracovníci katedry matematiky Pedagogické fakulty v Českých Budějovicích. Korespondenční seminář měl 5 kol a zúčastnilo se ho 107 žáků 6. až 8. ročníků.

Ukázky úloh

1. Šesticiferné číslo, které lze zapsat ve tvaru $1k\,31k4$, je dělitelné 12, ale není dělitelné 9. Určete číslici k.

2. Každý z 9 účastníků a záložníků mistrovského fotbalového celku dal v sezóně alespoň jeden gól a všichni dohromady dali 47 gólů. Dokažte, že alespoň dva z nich dali stejný počet gólů, jestliže víme, že jeden z hráčů dal 12 gólů.

3. Máme 2 000 čtverců se stranami délek 1, 2, 3, ..., 2 000 centimetrů. Dokažte, že je můžeme rozdělit do dvou skupin po 1 000 čtvercích tak, že součet obsahů čtverců v obou skupinách je stejný.

4. Najděte všechny pythagorejské trojúhelníky, jejichž jedna strana má délku 15.

5. Na tabuli byl narýsován lichoběžník $ABCD$, v něm střední příčka EF. Pak sestrojili průsečík O úhlopříček a vedli jím kolmici OK k základně AB ($K \in AB$). Nakonec obrázek umazali tak, že zůstaly jen úsečky EF a OK. Navrhněte, jak je možno sestrojit původní lichoběžník. (Návod: Zkoumejte středy úseček rovnoběžných s AB, které mají krajní body na ramenech lichoběžníku.)

6. Převedeme-li výraz

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1},$$

kde p je prvočíslo větší než 2, na stejného jmenovatele, dostaneme zlomek, jehož čitatel je dělitelný p. Dokažte to.

C

Ve Východočeském kraji připravili korespondenční seminář pro žáky ZŠ společně gymnázium J. K. Tyla v Hradci Králové, KPÚ v Hradci Králové a pracovníci katedry matematiky Pedagogické fakulty v Hradci Králové. Vybrali jsme pro vás tyto úlohy:

1. Je číslo $2^{10} + 5^{12}$ prvočíslo?

2. Napíšeme-li všechna přirozená čísla od 1 do 99 999 za sebou na dlouhý pás, dostaneme číslo

$$123456789101112\ldots999979999899999.$$

a) Určete ciferný součet tohoto čísla.

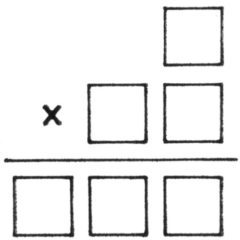
b) Kolikrát se v zápise čísla opakuje číslice 7?

3. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC, je-li dána přepona $c = AB$, přičemž délka těžnice t_c příslušné k přeponě je rovna geometrickému průměru obou odvěsen a, b (tzn. $t_c = \sqrt{a.b}$).

D

Ze Severomoravského kraje uvedeme ukázky úloh z 3. korespondenčního semináře pro 4. ročník, který vedla *dr. Bachelová* z OPS ve Frýdku-Místku. Soutěže se zúčastnilo 1 248 žáků okresu Frýdek-Místek.

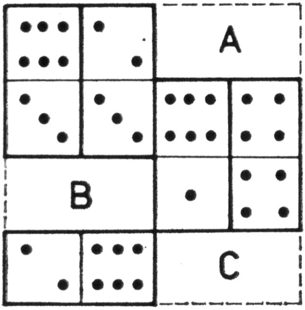
1. Do čtverců vepište číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby číslo v horním čtverci vynásobené číslem v prostředních dvou čtvercích dalo výsledek v dolních třech čtvercích (obr. 60). Napište svou úvahu.



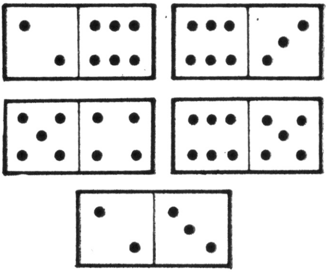
Obr. 60

2. Rozdělte čísla 3, 6, 9, 12, 18, 21, 24, 27 do dvou skupin tak, aby pro obě skuiny platilo: Rozdíl libovolných čísel z téže skupiny už do této skupiny nesmí patřit. (Například když 9 a 3 patří do jedné skupiny, nesmí do této skupiny už patřit jejich rozdíl $9 - 3 = 6$. Tedy 6 patří do druhé skupiny.)

3. Na místa *A*, *B*, *C* (obr. 61a) vložte tři z pěti hracích kostek na obrázku 61b tak, abyste vodorovně, svisle i úhlopříčně dostali vždy součet 16. Zdůvodněte své řešení.



Obr. 61a



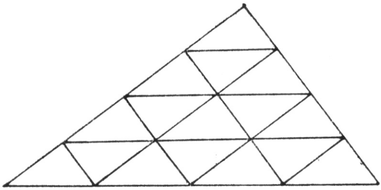
Obr. 61b

4. Stáří otce a syna je dohromady 80 let. Před 8 lety byl otec třikrát starší než syn. Kolik let je každému z nich?

E

Již dlouholetou tradici má korespondenční seminář známý pod názvem Kominár, který pod vedením *dr. P. Černeka* organizuje skupina bratislavských matematiků. Úlohy jsou v posledních letech pravidelně otiskovány v časopise Zenit pionerov*). Úlohy jsou podle obtížnosti odstupňovány pro 4. až 6. ročníky. Přinášíme ukázky pro 6. ročník.

1. Na obrázku 62 je znázorněna deska ve tvaru trojúhelníku. Na desce je vyznačeno 16 shodných trojúhelníků o stranách 5 cm, 4 cm a 3 cm. Máte rozřezat desku na dvě části tak, aby na obarvení stran obou částí bylo potřeba stejné množství barvy. Přitom je dovoleno řezat jen po vyznačených čárách. Najděte všechny možnosti. Dvě možnosti považujeme za shodné, jestliže po rozřezání vzniknou shodné části.



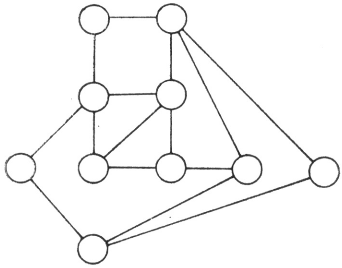
Obr. 62

2. V městě jsou tři autobusové linky. Síť těchto linek i se zastávkami je na obrázku 63. Označíme zastávky písmeny A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. Autobusy zastávky nevynechávají. Autobus č. 1 stojí postupně na zastávkách H, G, A, J, B. Autobus č. 2 stojí postupně na zastávkách G, C, J, A, H, I, B. Autobus č. 3 stojí postupně na zastávkách J, F, D, E, I, A.

---

*) Od roku 1990 jen Zenit.

Zkuste z těchto zadání najít na obrázku 63 správné označení zastávek.



Obr. 63

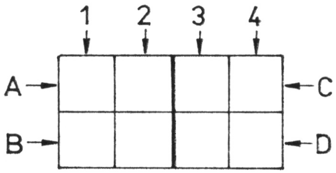
3. Postupným vynásobením deseti dvojek dostaneme číslo 1 024. Kdybychom postupně vynásobili 400 dvojek, dostali bychom obrovské číslo, které má více než 100 číslic. Kdybychom postupně vynásobili 240 trojek, dostali bychom opět obrovské číslo s více než 100 číslicemi. Zjistěte, které z těchto dvou čísel je větší, aniž byste čísla vypočítali. Svůj výsledek odůvodněte.

4. Karel a Ivan si napsali několik čísel. Karel je vypsal podle pravidelnosti: 30, 60, 90, 120, 150, ... Ivan zase vypsal čísla: 1, 2, 2, 3, 4, 6, 9, 14, 22, ... Představte si, že oba napsali 99 čísel, která pak sčítali. Kdo z nich dostal větší číslo? Odpověď odůvodněte.

F

Pro žáky 6. tříd s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů z Prahy a Středočeského kraje se pořádal již 4. ročník soutěže Dejte hlavy dohromady. Soutěž je určena čtyřčlenným družstvům, která řeší společně zadané úlohy. Úlohy pro tento ročník připravili *dr. V. Dřízal*, *doc. dr. M. Koman, CSc.*, a *dr. Jiří Mída.*

1. Křížovka: a) Řešte křížovku (obr. 64). Do každého pole se píše jen 1 číslice.



Obr. 64

Vodorovně

A: Násobek 7.
B: Prvočíslo menší než 20.
C: Součet tří jednociferných prvočísel.
D: Násobek 6.

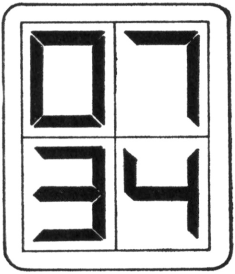
Svisle

1. Násobek 3.
2. Prvočíslo s ciferným součtem 17.
3. Dělitel čísla 231.

4. Poslední 2 číslice nejmenšího trojciferného násobku čísla 9.

b) V křížovce je tajenka — významné datum. Napište toto datum a uveďte jeho význam.

2. Digitální hodiny: Hančiny digitální hodinky ukazují hodiny a minuty (obr. 65).



7 hodin

34 minuty

Obr. 65

Hodiny udávají čísla 00, 01, . . ., 23

Minuty udávají čísla 00, 01, . . ., 59

Sečtěte všechny časové úseky jednoho dne, kdy může Hanka spatřit na hodinkách aspoň jednu 0.

3. Plán cest: V okolí našeho města vedou 4 turistické cesty značené červenou, modrou, zelenou a žlutou barvou. Cesty spojují tyto turistické zajímavosti: Borek (B), Milíře (M), Náhon (N), Rokle (R) a Viklan (V). Cesty jsou vedeny takto:

Červená: M — R — N	Zelená: B — N — L
Modrá: V — M — L	Žlutá: V — R — L

Všechny cesty se sbíhají nebo kříží jen v uvedených místech. Žádné dvě cesty nemají nikde společný úsek.

Načrtněte zjednodušený plánek těchto cest. V něm vyznačte okružní cestu (odkud vyjdete, tam se vrátíte), na které se vystřídají značky všech 4 barev. Přitom po žádném úseku nesmíte jít dvakrát. Může být na plánu více okružních cest, které se liší aspoň v jednom úseku? Svou odpověď odůvodněte.

4. Ciferný součet

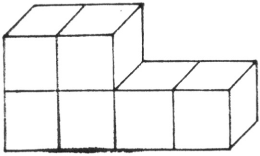
a) — Lukáš zvolil číslice 3, 5, 7.
— Vytvořil z nich všechna možná trojciferná čísla.
— Vytvořená čísla sečetl.
— Součet dělil součtem daných číslic (3 + 5 + 7).
— Vyšlo mu číslo $\boxed{}$.
Vypočtěte i vy toto číslo:

b) Zvolte sami tři různé číslice a postupujte jako Lukáš.

c) Pokud jste dobře počítali, dostali jste stejný výsledek jako Lukáš. Dovedete vysvětlit proč?

5. Povrch staveb: Ze shodných krychlí stavíme modely staveb. Povrch stavby na obrázku 66a tvoří 20 čtverců (stěny krychlí, které leží na podložce, do povrchu nepočítáme). Na obrázku 66b je plán této stavby.

Nakreslete plány všech dalších staveb, jejichž
— povrch tvoří 20 čtverců,
— plán má tvar obdélníku nebo čtverce.



Obr. 66a

2	2	1	1

Obr. 66b

Poznámka. Stavby postavené např. podle plánů na obrázku 67 jsou shodné.

2	2	1	1

1	1	2	2

Obr. 67

6. Největší prvočíslo: V roce 1988 bylo do známé Guinnesovy (čti Ginesovy) knihy rekordů zapsáno největší v té době známé prvočíslo, které má 65 020 číslic. Je možné ho zapsat ve tvaru

$$2^{216\,091} - 1.\text{*)}$$

Zjistěte jeho poslední číslici.

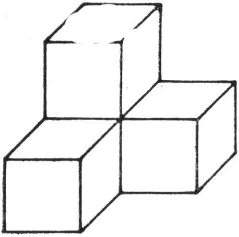
7. Síť tělesa: a) Narýsujte na čtverečkovaný papír zmenšenou síť tělesa sestaveného ze 4 shodných krychlí o hraně $a = 3$ cm (obr. 68).

*) Zápis $2^{216\,091}$ značí součin 216 091 dvojek, tzn.

$$2^{216\,091} = \underbrace{2.2.2. \ \dots \ .2 \dots}_{216\,091\text{krát}}$$

Je to tzv. mocnina čísla 2 s exponentem 216 091.

b) Síť narýsujte ve skutečné velikosti na velkou čtvrtku papíru, vystřihněte a slepte z ní nakreslené těleso.



Obr. 68

8. Hrací kostka: Petr hází obyčejnou hrací kostkou. Pavel mu dal úlohu: »Tady máš další kostku, která má však ještě prázdné stěny. Doplň na jejích stěnách oka tak, aby při házení obou kostek mohl být součet ok, která padnou, libovolné číslo od 1 do 12.« Petr však Pavla překvapil: »To znám. Já to umím dokonce tak, že kterýkoli ze součtů může padnout právě třemi způsoby.«

Nakreslete síť takové neobvyklé hrací kostky.

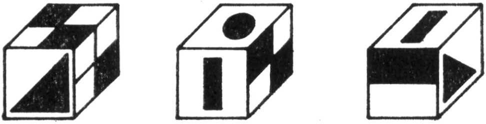
G

Podobně jako v Praze i v Opavě se uskutečnila týmová soutěž pro žáky 6. ročníků s názvem Dejte hlavy dohromady. Soutěž připravila *dr. L. Hozová.* Na ukázku uvedeme tři z pěti zadaných úloh.

1. Objevte princip, podle kterého jsou vytvářeny následující posloupnosti čísel. V každé posloupnosti doplňte následující dvě čísla a určete číslo, které je napsáno na padesátém místě.

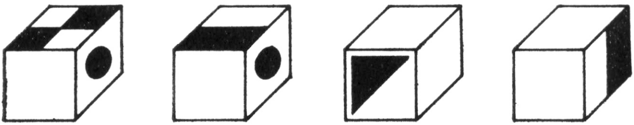
a) 1, 6, 11, 16, 21, ...
b) 2, 5, 10, 17, 26, ...
c) 1, 3, 6, 10, 15, ...
d) 1, 4, 9, 7, 7, 9, 13, 10, ...

2. Na obrázku 69 jsou tři pohledy na jedinou krychli



Obr. 69

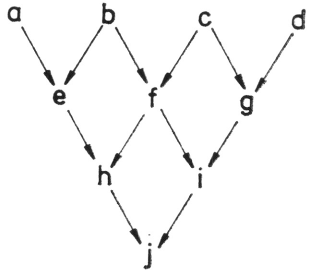
Doplňte na dalším obrázku 70 prázdné stěny tak, aby vznikly další pohledy na tuto krychli.



Obr. 70

3. Nahraďte písmena na obrázku 71 navzájem různými přirozenými čísly tak, aby každé číslo bylo součtem dvou čísel bezprostředně nad ním (šipky naznačují způsob sčítání).

Ale aby úloha nebyla tak lehká, přidáme další podmínku: nejspodnější číslo musí být co nejmenší. Kolik schémat s nejmenší hodnotou »j« dokážete vyplnit?



Obr. 71

H

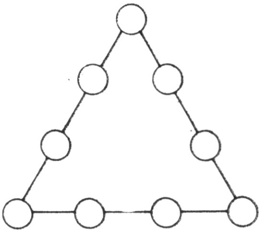
V Západočeském kraji navazuje na celostátní soutěž MO ještě krajská soutěž, kterou pořádá pod vedením *dr. M. Ausbergerové* kabinet matematiky pro ZŠ a SOU Krajského pedagogického ústavu v Plzni.

Pro kategorii Z4 pořádají podobně jako na Slovensku školní a okresní kolo. Úlohy mají však vlastní. Pro kategorie Z5 a Z7 pořádají jako v jediném kraji v ČSFR kromě školního a okresního kola ještě své vlastní krajské kolo. Ve všech krajských kolech zařazují po pěti úlohách, tj. o dvě více než v okresních kolech. Této skutečnosti přizpůsobují i obtížnost úloh. Jako ukázky uvedeme ze závěrečných kol všech čtyř kategorií Z4 až Z7 po dvou úlohách.

Okresní kolo Z4

1. Má být napsáno 10 000 adres. Stačí je napsat 5 lidí za 2 dny, trvá-li napsání jedné adresy jednu minutu? Počítáme osmihodinovou pracovní dobu.

2. Do kroužků v trojúhelníku (obr. 72) vepište čísla 1, 2, 3, ..., 9 tak, aby jejich součet na každé straně trojúhelníku byl 21.

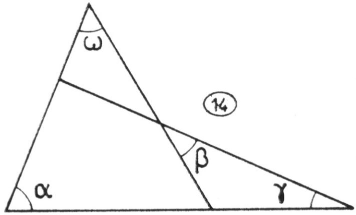


Obr. 72

Krajské kolo Z5 (27 soutěžících, z toho 22 úspěšných)

1. Silnice se klikatí mezi poli a lesy, pěšina vede přímo. Silnice je o 7,5 km delší než pěšina. Po silnici jel cyklista, po pěšině šel chodec. Cyklistova rychlost byla čtyřikrát větší než rychlost chodce, ale každému z nich trvala cesta stejně dlouho. Jak dlouhá je pěšina?

2. Určete velikost úhlu ω na obrázku 73, jestliže $\alpha = 70°$, $\beta = 50°$, $\gamma = 30°$.

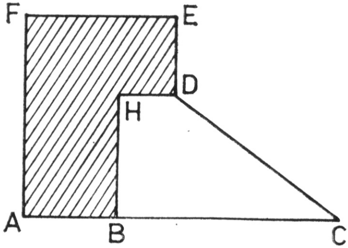


Obr. 73

Krajské kolo Z6 (31 soutěžících, z toho 19 úspěšných)

1. Jirka vynásobil čtyři za sebou jdoucí prvočísla a k součinu přičetl 266. Výsledek dělil 627 a dostal 627. Urči, která prvočísla to byla.

2. Vyšrafovaná plocha i čtyřúhelník $BCDH$ mají stejný obsah a platí $|AB| = |DE| = 3$ cm, $|EF| = 5$ cm, $|BC| = 6$ cm. (Obr. 74.) Vypočtěte délku úsečky AF.



Obr. 74

Krajské kolo Z7 (42 soutěžících, z toho 26 úspěšných)

1. V dílně zhotovují denně 125 výrobků z materiálu v ceně 17 Kčs za jeden kilogram. Zlepšovatel navrhl způsob, jak při změně použitého materiálu snížit hmotnost výrobků o 10 %, musel by se však používat materiál, který je o 1 korunu za 1 kg dražší. Celkem by se denně ušetřilo na materiálu 140 Kčs. Jakou hmotnost má jeden výrobek?

2. Objem tří nádob je v postupném poměru 3 : 2 : 1. Největší nádoba byla ze tří čtvrtin naplněna vodou. Dvě třetiny této vody byly přelity do druhých dvou nádob tak, že nejmenší nádoba byla zcela naplněna a do prostřední nádoby bylo nalito zbývajících 13 litrů vody. Kolik litrů vody zbylo v největší nádobě?

I

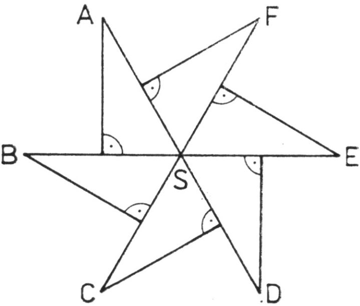
Ve Východočeském kraji organizuje *J. Trejbal* pro žáky z tříd s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů každoroční soutěž Víkend s matematikou. V roce 1989 vydalo OPS v Hradci Králové sbírku jeho úloh pro žáky 6. tříd.

Ukázky úloh

1. Řešte algebrogram:

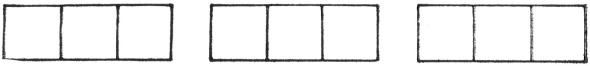
$$\begin{array}{cccc} J & E & D & E \\ V & L & A & K \\ J & A & K & O \\ \hline D & R & A & K \end{array}$$

2. Narýsujte podle obrázku 75 větrník složený ze šesti shodných pravoúhlých trojúhelníků; $|SA| = 6$ cm. Vypočtěte jeho obsah.



Obr. 75

3. Napište do čtverečků všechny číslice od 1 do 9 tak, aby součin tří vzniklých trojciferných čísel byl co největší. (Obr. 76.) Tento součin vypočtěte.



Obr. 76

4. Honza se vypravil na boj s drakem, který měl tři hlavy a tři ocasy. Čaroděj Dobroděj ho vyzbrojil kouzelným mečem a řekl mu: »Jednou ranou můžeš drakovi useknout jednu hlavu, nebo dvě hlavy, nebo jeden ocas, nebo dva ocasy. Nic jiného. Pamatuj však, že když usekneš hlavu jednu,

vyrostou mu hned dvě nové. Když mu usekneš jeden ocas, narostou mu hned dva nové. Když mu usekneš dva ocasy, vyroste mu hlava. Pouze když mu usekneš dvě hlavy, nic mu nenaroste.«

Kterým nejmenším počtem ran mohl Honza zabít draka, tzn. useknout mu všechny hlavy i všechny ocasy?