39. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie C

In: Leo Boček (editor); Jiří Binder (editor); Vladimír Burjan (editor); Karel Horák (editor); Pavel Töpfer (editor): 39. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1989/90. 31. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1992. pp. 45–61.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404902

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Čtverec 100×100 je rozdělen na 10 000 jednotkových čtverců. Do nich jsou libovolným způsobem vepsána čísla 1 až 10 000 (do různých čtverců různá čísla). Dokažte, že pak existují dva sousední čtverce, v nichž jsou čísla lišící se aspoň o 51. Čtverce považujeme za sousední, mají-li společnou stranu.

C – I – 2

Nechť n je přirozené číslo a $a_n = 888\ldots8$ je n-místné přirozené číslo zapsané v desítkové soustavě n osmičkami. Dokažte, že pro počty $d(n)$, $d(a_n)$ dělitelů čísel n, a_n platí $d(a_n) \geqq 8d(n) - 8$.

C – I – 3

Na kružnici je napsáno 108 přirozených čísel, přičemž součet libovolných dvaceti vedle sebe stojících čísel se rovná 1 990. Dále víme, že na 37. místě stojí číslo 158, na 66. místě číslo 1 a na 83. místě číslo 200. Jaké číslo stojí na 40. místě?

C – I – 4

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC se stranou délky a. Na straně AC je dán bod L tak, že $|AL| < \frac{a}{2}$. Na stranách AB, BC, CA sestrojíme po řadě body M, N, P tak, aby $LM \parallel BC$, $MN \parallel AC$, $NP \parallel AB$. Vypočítejte obvod a obsah čtyřúhelníku $LMNP$. Při které volbě bodu L je jeho obsah největší?

C – I – 5

V rovině jsou dány shodné kružnice $k_1(P, r)$, $k_2(Q, r)$ a délka d, přičemž kružnice k_1, k_2 nemají společný bod. Najděte všechny dvojice bodů X, Y takové, že $|XY| = d$, bod X leží na kružnici k_1, bod Y leží na kružnici k_2 a přímka XY prochází středem úsečky PQ.

C – I – 6

Je dáno přirozené číslo s lichým počtem číslic. Dokažte, že jednu z jeho číslic lze škrtnout tak, aby číslo, které vznikne, mělo na sudých i na lichých místech stejný počet sedmiček.

C – S – 1

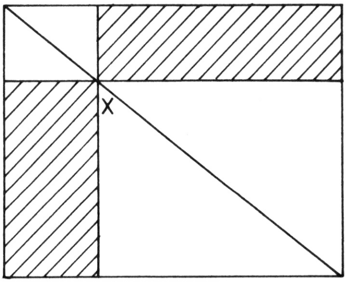
Najděte nejmenší přirozené číslo k, pro které mají součiny $384 \cdot k$, $2\,592 \cdot k$ stejný počet dělitelů.

C – S – 2

Určete číslice a, b tak, aby číslo, jež je v desítkové soustavě zapsáno ve tvaru $a0b5$, bylo druhou mocninou přirozeného čísla.

C – S – 3

Na úhlopříčce obdélníku se stranami délek 4 cm a 3 cm je zvolen bod X. Při které poloze bodu X (obr. 1) je obsah vyšrafované části největší? Svou odpověď zdůvodněte.



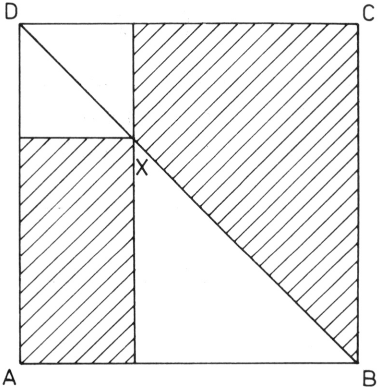
Obr. 1

C – II – 1

Najděte všechna přirozená čísla n, pro která má číslo n v množině přirozených čísel právě tři dělitele a číslo $n + 32$ právě pět dělitelů.

C – II – 2

Na úhlopříčce BD čtverce $ABCD$ je zvolen bod X. Při které poloze bodu X je obsah vyšrafované části na obr. 2 největší? Svou odpověď zdůvodněte.



Obr. 2

C – II – 3

Dokažte, že číslo 111...1222...225, ve kterém se číslice 1 vyskytuje k-krát a číslice 2 $(k+1)$-krát, je druhou mocninou přirozeného čísla. Určete toto číslo.

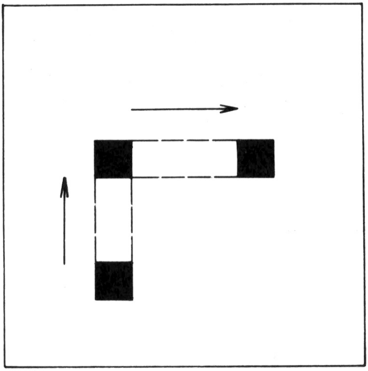
C – II – 4

Je dána čtvercová síť se stranou délky 1, přirozené číslo r a v rovině sítě kružnice k o poloměru r se středem ve vrcholu některého čtverce sítě. Dokažte, že kružnice k neprochází středem žádného čtverce sítě.

Řešení úloh

C – I – 1

V některém políčku je napsáno číslo 1, v jiném číslo 10 000. Od prvního k druhému políčku se dostaneme například tak, že půjdeme nejdříve svisle (nahoru nebo dolů), až se dostaneme do stejného řádku, v jakém je druhé pole (obr. 3). Pak přejdeme vodorovně do tohoto druhého pole.



Obr. 3

Jsou-li obě uvažovaná pole v témže řádku, jdeme jen vodorovně. Jsou-li obě políčka v témže sloupci, jdeme pouze svisle. V každém případě obsahuje naše cesta nejvýše 100 políček z téhož sloupce a nejvýše dalších 99 políček v řadě.

Přejdeme tedy nejvýše 198krát z jednoho políčka do políčka sousedního. Kdyby byl rozdíl čísel v sousedních políčkách vždy nejvýše 50, mohlo by se číslo v posledním políčku naší cesty rovnat nejvýše číslu $1 + 198 \cdot 50 = 9\,901$. Protože tam však stojí číslo $10\,000$, musí se na naší cestě objevit aspoň jednou přírůstek větší než 50.

C – I – 2

Je zřejmě $a_n = 8 \cdot 111\ldots11$, kde je $b_n = 111\ldots11$ n-místné číslo zapsané n jedničkami. Je to číslo liché, takže není dělitelné dvěma, tím méně čtyřmi nebo osmi. Proto má číslo a_n právě čtyřikrát více dělitelů než číslo b_n. Je-li totiž číslo p dělitelem čísla b_n, jsou děliteli čísla a_n čísla p, $2p$, $4p$ a $8p$. A také platí, že každý dělitel čísla a_n se rovná některému z čísel p, $2p$, $4p$, $8p$, kde p je dělitel čísla b_n. Stačí tedy zabývat se počtem dělitelů čísla b_n. Jestliže přirozené číslo k dělí číslo n, je

$$b_n = \underbrace{111\ldots11}_{n} = \underbrace{11\ldots1}_{k}\underbrace{11\ldots1}_{k}\ldots\underbrace{11\ldots1}_{k} =$$
$$= 11\ldots1 \cdot (1 + 10^k + \ldots + 10^{n-k}) = b_k \cdot c_k,$$

kde je c_k přirozené číslo. Je-li $k = 1$, je $b_k = 1$, $c_k = b_n$. Při $k = n$ je $c_n = 1$. Je-li $1 < k < n$, končí číslo c_k dvojčíslím 01 a nerovná se tedy žádnému z čísel b_n. Vidíme tudíž, že děliteli čísla b_n jsou čísla 1, b_n a též čísla b_k, c_k pro ta čísla k, která dělí číslo n. Má-li tedy číslo n kromě 1 a n ještě $d(n) - 2$ netriviálních dělitelů, má číslo b_n kromě 1 a b_n ještě aspoň $2[d(n) - 2]$ dalších dělitelů, celkem tudíž aspoň

$2d(n) - 2$ dělitelů. Číslo a_n pak má aspoň $4[2d(n) - 2] = 8d(n) - 8$ dělitelů, což jsme měli dokázat. Tvrzení platí i pro $n = 1$, kdy je $b_n = 1$.

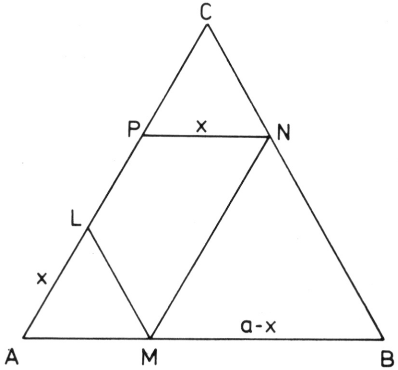
Poznamenejme, že šlo o úlohu náročnou, která vyžadovala od řešitelů nejdříve rozbor několika konkrétních případů.

C – I – 3

Součet každých 20 vedle sebe stojících čísel je vždy 1 990. Také součet každých 108 vedle sebe stojících čísel je stejný, rovná se prostě součtu p všech čísel umístěných na kružnici. Zvolme nyní osm vedle sebe stojících čísel. Ostatních 100 čísel tvoří pět skupin po dvaceti vedle sebe stojících číslech, proto se součet zvolených osmi čísel rovná $p - 5 \cdot 1\,990$, je tedy také stejný pro každých osm čísel stojících vedle sebe. To pak platí také pro 16 čísel. A když je stejný součet každých dvaceti a rovněž každých šestnácti vždy vedle sebe stojících čísel, platí to i pro každá čtyři vedle sebe stojící čísla. Pak to však znamená, že se čísla vždy po čtyřech opakují, páté se rovná prvnímu, šesté druhému atd. Součet každých čtyř vedle sebe stojících čísel je $1\,990 : 5 = 398$. Na 37. místě stojí číslo 158, na 38. místě stojí stejné číslo jako na 66. místě, neboť $66 = 38 + 7 \cdot 4$, tedy číslo 1. Dále je $39 = 83 - 11 \cdot 4$, takže na 39. místě stojí číslo 200. Proto na 40. místě stojí číslo $398 - 158 - 1 - 200 = 39$.

C – I – 4

Označme $x = |AL|$. Trojúhelníky AML, MBN a PNC jsou rovnostranné (obr. 4) se stranami délek x, $a - x$, x. Proto je $|PL| = a - 2x$ a obvod lichoběžníku $MNPL$ je $a -$



Obr. 4

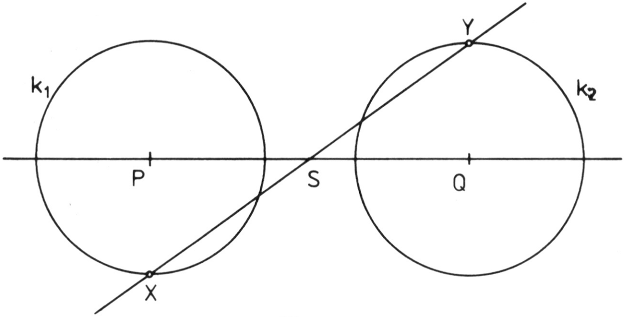
$-2x+x+a-x+x = 2a-x$, jeho obsah je $\frac{1}{2}(a-x+a-2x)v$ kde v je jeho výška. Ta se rovná též výšce v trojúhelníku AML, takže $v = \dfrac{x}{2}\sqrt{3}$. Obsah lichoběžníku je $\dfrac{\sqrt{3}}{4}x(2a - 3x)$, výsledek upravíme na tvar $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left[-3\left(x-\dfrac{a}{3}\right)^2+\dfrac{a^2}{3}\right]$.

Vidíme, že tento obsah je největší pro $x = \dfrac{a}{3}$, kdy se rovná

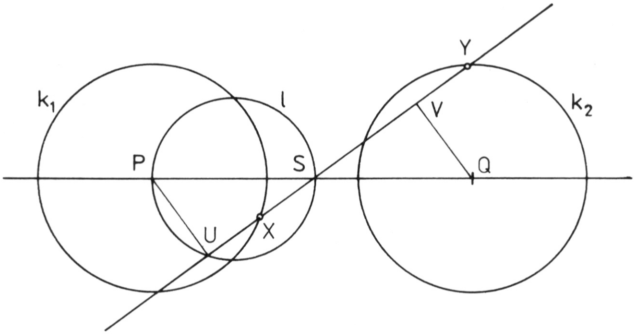
$$\frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

C – I – 5

Označme S střed úsečky PQ a předpokládejme, že body X, Y splňují podmínky úlohy. Pak jsou možné pouze dva případy, buď jsou body X, Y souměrně sdružené podle bodu S (obr. 5), nebo tomu tak není (obr. 6).



Obr. 5



Obr. 6

Uvažujme nejdříve první případ. Je pak $|XS| = |YS| = \frac{d}{2}$, takže bod X leží na průniku kružnic k_1 a $k\left(S, \frac{d}{2}\right)$. Je-li obráceně X společným bodem těchto kružnic, leží bod

Y k němu souměrně sdružený podle bodu S na kružnici k_2 a dvojice X, Y je řešením úlohy. Počet řešení je v tomto případě 2, 1 nebo 0 podle toho, mají-li kružnice k_1, k dva, jeden nebo žádný společný bod. Přitom dva společné průsečíky mají uvažované kružnice právě tehdy, je-li $|SP| - r < \frac{d}{2} < |SP| + r$, tj. $|PQ| - 2r < d < |PQ| + 2r$. Jeden společný bod mají kružnice k, k_1 právě tehdy, je-li $d = |PQ| - 2r$ nebo $d = |PQ| + 2r$. V ostatních případech nemají tyto kružnice žádný společný bod.

Přejděme k druhé možnosti. Body P, Q veďme kolmice k přímce XY, jejich paty označme U, V. Ze středové souměrnosti plyne $|YV| = |UX|$, takže $|XY| = |UV| = d$, $|SU| = \frac{d}{2}$. Bod U leží tedy na kružnici k a současně na Thaletově kružnici l nad průměrem SP, neboť úhel SUP je pravý. Přitom je bod U bodem vnitřní oblasti kružnice k_1, protože přímka XY je sečnou kružnice k_1 (má s kružnicí společný bod X a nemůže být tečnou, v tom případě by byly body X, Y souměrně sdružené podle bodu S). Je-li obráceně bod U průsečíkem kružnic k a l, je $\frac{d}{2} \leqq |SP|$ a U je bodem vnitřní oblasti kružnice k_1 právě tehdy, když je $|PU| < r$, kde $|PU| = \sqrt{|SP|^2 - \frac{d^2}{4}}$. Ke každému takovému bodu U sestrojíme dvě dvojice bodů X, Y, které jsou řešením úlohy, bod X je jedním nebo druhým průsečíkem přímky SU s kružnicí k_1. Je-li $0 < \sqrt{|PQ|^2 - d^2} < 2r$, dostaneme dva takové body U, a tedy čtyři řešení úlohy. Pro $d = |PQ|$ je $U = P$ a úloha má kromě nalezených řešení v první části ještě dvě řešení, pro která není bod S středem úsečky XY. Celkový počet řešení v závislosti na délce d můžeme přehledně vyčíst z této tabulky:

$d < \lvert PQ\rvert - 2r$	...	0 řešení
$d = \lvert PQ\rvert - 2r$	...	1 řešení
$\lvert PQ\rvert - 2r < d \leqq \sqrt{\lvert PQ\rvert^2 - 4r^2}$	...	2 řešení
$\sqrt{\lvert PQ\rvert^2 - 4r^2} < d < \lvert PQ\rvert$	...	6 řešení
$d = \lvert PQ\rvert$	...	4 řešení
$\lvert PQ\rvert < d < \lvert PQ\rvert + 2r$	...	2 řešení
$d = \lvert PQ\rvert + 2r$	...	1 řešení
$d > \lvert PQ\rvert + 2r$	...	0 řešení

C – I – 6

Vezměme libovolné číslo s lichým počtem číslic a označme p počet jeho sedmiček na lichých místech a q počet sedmiček na sudých místech v jeho zápisu v desítkové soustavě. Ubráním dvou sedmiček stojících vedle sebe nebo obráceně jejich přidáním se nezmění rozdíl $p - q$. Totéž platí při ubrání nebo přidání dvou číslic stojících vedle sebe, jestliže žádné z nich není sedmička. Budeme-li takto stále podle možnosti ubírat, dojdeme opět k číslu s lichým počtem číslic, v němž se budou střídat sedmičky s číslicemi různými od sedmičky. Může se ovšem stát, že na jeho prvním místě bude stát číslice 0. V takto získaném čísle pak stačí škrtnout prostřední číslici (je to sedmička, mělo-li původní číslo lichý počet sedmiček, jinak je to číslice různá od sedmičky), abychom dostali číslo se stejným počtem sedmiček na lichých a na sudých místech. K němu pak vrátíme ty dvojice čísel, které jsme předtím ubrali. Tím dostaneme vždy číslo požadovaných vlastností. Ukážeme si popsaný postup na příkladě čísla 12 375 707 727. Vynecháním dvojic 12, 77, pak 02 a pak opět 77 dostaneme číslo 375, z něhož vynecháme prostřední číslici 7. K výsledku 35 přidáme zpět ty dvojice, které jsme předtím vynechali. Konečným výsledkem je číslo 1 235 707 727.

Uvedeme ještě aspoň stručně jiný postup, který by si však vyžádal podrobnější diskusi. Obsahuje-li dané číslo lichý počet sedmiček, je zřejmé, že bude třeba vynechat některou sedmičku. Začněme první sedmičkou zleva. Nejdříve ukážeme, že pokud po jejím vynechání je více sedmiček na sudých místech, nebude tomu tak při vynechání poslední sedmičky. Pak ještě ukážeme, že počet sedmiček na sudých místech po vynechání některé sedmičky se nezmění, nebo se zvětší o 1, nebo se zmenší o 1, jestliže místo ní vynecháme hned sedmičku další. Jinými slovy, počet sedmiček na sudých místech po vyškrtnutí některé sedmičky se změní nejvýše o jednu, škrtneme-li místo ní tu, která je k ní nejblíž. Z toho pak plyne, že pro jednu sedmičku zbude po jejím vynechání stejný počet sedmiček na sudých a na lichých místech. Podobně bychom postupovali při sudém počtu sedmiček, kdy musíme vynechat některou číslici různou od sedmičky.

C – S – 1

Je $384 = 2^7 \cdot 3$, $2\,592 = 2^5 \cdot 3^4$. Položme $k = 2^a \cdot 3^b \cdot c$, kde c není dělitelné dvěma ani třemi. Pak je $384 \cdot k = 2^{a+7} \cdot 3^{b+1} \cdot c$, počet dělitelů tohoto čísla je $(a+8)(b+2)d$, kde d je počet dělitelů čísla c. Počet dělitelů druhého součinu je $(a+6)(b+5)d$. Jelikož k má být nejmenší, je $c = d = 1$ a pro a, b má platit $(a+8)(b+2) = (a+6)(b+5)$, tedy $2b = 3a + 14$. Nejmenší k dostaneme při $a = 0$, $b = 7$, je tedy $k = 3^7 = 2\,187$.

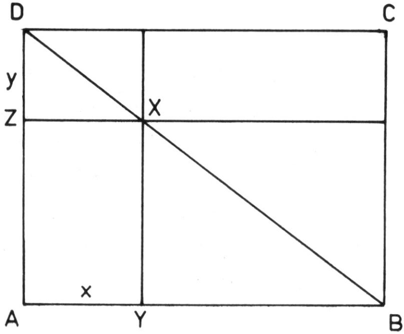
C – S – 2

Končí-li druhá mocnina přirozeného čísla pětkou, končí i základ pětkou. Druhá mocnina čísla končícího pětkou končí dvojčíslím 25, je tedy nutně $b = 2$. Kromě toho je $(10n+5)^2 = 25 + 100n(n+1)$. Hledáme tedy přirozené číslo n tak, aby číslo $n(n+1)$ bylo dvojmístné a násobkem deseti. Jediná řešení jsou $n = 4$, 5 nebo 9, tedy $a = 2$, 3 nebo 9. Řešením úlohy jsou právě tyto dvojice (a, b): $(2, 2)$, $(3, 2)$ a $(9, 2)$.

C – S – 3

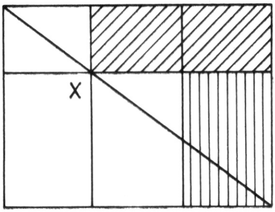
Označme $x = |AY|$, $y = |DZ|$ (obr. 7). Je $y : x = 3 : 4$, obsah vyšrafované části je $x(3-y) + y(4-x)$. Po dosazení za y a úpravě dostaneme výraz $6 - \frac{3}{2}(x-2)^2$. Proto je obsah největší při $x = 2$, kdy je bod X středem úhlopříčky.

Úloha navazovala na úlohu C–I–4, avšak zcela jiný, velmi jednoduchý postup zvolil žák *Michal Kružhak* z I. ročníku gymnázia v Námestove. Podal toto jednoduché řešení:

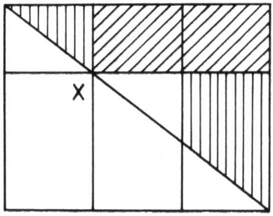


Obr. 7

Je-li X středem úhlopříčky, rovná se obsah vyšrafované části polovině obsahu obdélníku. Není-li bod X středem úhlopříčky, rovná se obsah vyšrafované části nejdříve obsahu vyšrafované části na obr. 8 a ten pak obsahu vyšrafované části na obr. 9, který je menší než polovina obsahu obdélníku.



Obr. 8



Obr. 9

C – II – 1

Číslo $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \ldots$ má právě $(a+1)(b+1)(c+1)\ldots$ dělitelů. Má-li číslo n právě tři dělitele, je nutně $n = p^2$ pro nějaké prvočíslo p. Jelikož číslo $n + 32$ má mít právě 5 dělitelů, musí být $n + 32 = q^4$, kde q je rovněž prvočíslo. Pak je $32 = q^4 - p^2 = (q^2 - p)(q^2 + p)$. Rozložíme proto číslo 32 na součin dvou přirozených čísel. Rozklady $32 = 1 \cdot 32$ a $32 = 4 \cdot 8$ nevedou k žádnému výsledku. Položíme-li $q^2 - p = 2$, $q^2 + p = 16$, dostaneme $q = 3$, $p = 7$. Jediné řešení je $n = 49$.

C – II – 2

Označíme-li x vzdálenost bodu X od přímky AD, je obsah vyšrafované části $2x(a - x) + \frac{1}{2}(a - x)^2 = \frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{2}(x - \frac{1}{3}a)^2$. Obsah je tedy největší pro $x = \frac{1}{3}a$, kde a je strana čtverce. Bod X je dán například podmínkou $|BX| = 2|DX|$.

C – II – 3

Jelikož $1\,225 = 35^2$, $112\,225 = 335^2$, docházíme k domněnce, že hledaným číslem je číslo $333\ldots35$, ve kterém se počet trojek rovná číslu k. Domněnku dokážeme užitím známého vztahu z úlohy C–S–2 $(10n + 5)^2 = 100n(n + 1) + 25$. Stačí ukázat, že součin čísla $333\ldots3$ (k trojek) s číslem o 1 větším se rovná číslu $111\ldots1222\ldots2$, které obsahuje k jedniček a stejný počet dvojek. To však plyne ihned z rovnosti $333\ldots34 \cdot 3 = 1000\ldots02$.

Velmi pěkné a zcela korektní řešení podal žák I. ročníku gymnázia v Dolním Kubíně *František Mala*. Ukázal, že se dané číslo dá napsat ve tvaru

$$\frac{10^k-1}{9}\cdot 10^{k+2}+\frac{10^{k+1}-1}{9}\cdot 2\cdot 10+5,$$

což po jednoduchých algebraických úpravách dává

$$\left(\frac{10^{k+1}+5}{3}\right)^2.$$

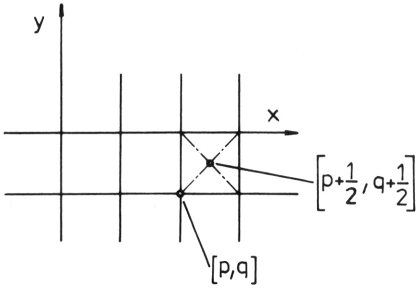
Stačí nyní ukázat, že $\frac{10^{k+1}+5}{3}$ je přirozené číslo, tedy že je číslo $10^{k+1}+5$ dělitelné třemi. To však plyne ihned z toho, že jeho ciferný součet je 6, a tudíž dělitelný třemi. A číslo je dělitelné třemi, právě když je dělitelný třemi jeho ciferný součet.

C – II – 4

Podle Pythagorovy věty se vzdálenost středu některého čtverce sítě od vrcholu libovolného čtverce sítě rovná

$$\sqrt{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\left(q+\frac{1}{2}\right)^2},$$

kde p, q jsou celá čísla. Můžeme si totiž představit, že jsme počátek soustavy souřadnic zvolili v uvažovaném vrcholu (obr. 10) čtverce sítě a osy soustavy souřadnic jsou prodloužením stran tohoto čtverce. Uvažovaný střed pak má souřadnice $[p+\frac{1}{2}, q+\frac{1}{2}]$, kde p, q jsou celá čísla. Druhá mocnina zkoumané vzdálenosti, a tedy ani vzdálenost sama není celé číslo, nemůže se tudíž rovnat přirozenému číslu r.



Obr. 10