39. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategorie Z7

In: Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 39. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1989/90. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1992. pp. 59–74.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404917

Kategorie Z7

ÚLOHY I. KOLA

(Řešení úloh na str. 62)

Z7 – I – 1

Nahraďte hvězdičky takovými čísly, aby se součty libovolných tří po sobě jdoucích čísel postupně zvětšovaly o 8.

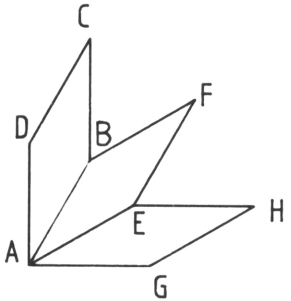
$$*,\ *,\ 835,\ *,\ *,\ *,\ 829,\ *,\ *,\ *,\ *,\ *,\ *,\ 843$$

Z7 – I – 2

Najděte všechna čísla menší než 344, která mají právě čtyři dělitele.

Z7 – I – 3

Určete velikost úhlu, který svírají přímky DC a GH (obr. 17, str. 60), jestliže úhel DAG je pravý a čtyřúhelníky $ABCD$, $AEFB$ a $AGHE$ jsou shodné kosočtverce (ale ne čtverce).



Obr. 17

Z7 – I – 4

V šesticiferném čísle 523 *** jsou zatajeny poslední tři číslice. Zjistěte tyto číslice, jestliže víte, že dané číslo je dělitelné 7, 8 a 9. Najděte všechna řešení.

Z7 – I – 5

Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$) s vnitřním úhlem $\alpha = 60°$. Úhlopříčka AC je osou úhlu α. Obsah lichoběžníku je roven $78\,\mathrm{cm}^2$. Vypočítejte obsah trojúhelníku ACD.

Z7 – I – 6

Čísla v řádcích tabulky udávají délky úseček a, b, c vyjádřené v milimetrech.

a	b	c
60	17	9
61	19	14
62	21	19
63	23	24
⋮	⋮	⋮

Zjistěte, ve kterých řádcích tabulky udávají čísla délky stran některého trojúhelníku. Najděte všechny možnosti.

ÚLOHY II. KOLA

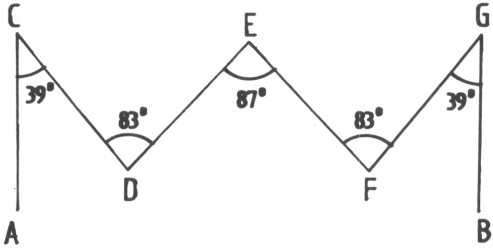
(Řešení úloh na str. 71)

Z7 – II – 1

Najděte oba násobky čísla 6, které mají právě 10 dělitelů.

Z7 – II – 2

Zjistěte, zda jsou přímky AC a BG rovnoběžné nebo různoběžné, obr. 18.



Obr. 18

Z7 - II - 3

Je dána následující posloupnost čísel

400, 130, 391, 130, 382, 130, 373, 130, ..., 130, 4, 130.

Kolikrát se v této posloupnosti vyskytují vedle sebe tři čísla, která jsou délkami stran rovnoramenného trojúhelníku?

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA

Řešení úlohy Z7–I–1 (str. 59)

V dané posloupnosti nahradíme hvězdičky písmeny.

$$a,\ b,\ 835,\ c,\ d,\ e,\ 829,\ f,\ g,\ h,\ i,\ j,\ k,\ 843. \qquad \text{(P)}$$

Označíme-li libovolná čtyři po sobě jdoucí čísla v posloupnosti (P) písmeny v, x, y, z, pak pro ně platí: součet $x+y+z$ je o 8 větší než součet $v+x+y$, tj.

$$v + x + y + 8 = x + y + z.$$

Odečteme-li na obou stranách součet $x + y$, dostaneme

$$v + 8 = z.$$

To znamená, že v každé čtveřici po sobě jdoucích čísel je poslední číslo o 8 větší než první číslo. Postupujeme-li v posloupnosti (P) od čísla 835 podle šipek doprava

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] a, & b, & 835, \arrow[rrr, bend left, "+8"] & c, & d, & e, \arrow[rrr, bend left, "+8"] & 829, & f, & g, \arrow[rrr, bend left, "+8"] & h, & i, & j, & k, & 843, \end{tikzcd}$$

můžeme vypočítat $e = 843$, $g = 851$, $j = 859$. Postupujeme-li podobně od čísla 829 postupně doleva i doprava, vypočítáme $c = 821$, $a = 813$, $h = 837$, $k = 845$. Podobně z čísla 843 při postupu doleva dostaneme $i = 835$, $f = 827$, $d = 819$, $b = 811$. Posloupnost (P) má tedy tvar

$$\begin{gathered} 813,\ 811,\ 835,\ 821,\ 819,\ 843,\ 829, \\ 827,\ 851,\ 837,\ 835,\ 859,\ 845,\ 843. \end{gathered}$$

Pomocná úloha

Odhadněte pravidla, podle kterých se v daných posloupnostech mění čísla. Nahraďte hvězdičky čísly a napište vzorec pro n-tý člen. (Řešení na str. 70.)

a) 1, 4, 9, *, *, 36, ...
b) 2, 5, 8, 11, *, *, ...
c) 1, 1, 2, 3, 5, 8, *, *, 34, ...
d) *, *, 10, 18, 33, 56, *, 155, *, ...

Řešení úlohy Z7–I–2 (str. 59)

Snadno zjistíme, že číslo (označme ho n) má právě čtyři dělitele, když má buď tvar

$$n = p^3, \qquad \text{kde } p \text{ je prvočíslo,} \qquad \text{(A)}$$

nebo tvar

$$n = p \cdot q, \qquad \text{kde } p,\ q \text{ jsou různá prvočísla.} \qquad \text{(B)}$$

Čísla tvaru (A) mají právě tyto dělitele: 1, p, p^2, p^3. Čísla tvaru (B) mají právě tyto dělitele 1, p, q, $p \cdot q$.

Všechna hledaná čísla se čtyřmi děliteli, která jsou menší než 344, najdeme postupně. Čísla tvaru (A) jsou

$$8 = 2^3,\ 27 = 3^3,\ 125 = 5^3,\ 343 = 7^3.$$

Číslo 343 je tedy největší z hledaných čísel. Čísla ve tvaru (B) jsou

2·3	2·5	2·7	2·11	2·13	2·17	.....	2·167	(38 čísel)
	3·5	3·7	3·11	3·13	3·17	.....	3·115	(28 čísel)
		5·7	5·11	5·13	5·17	.....	5· 67	(16 čísel)
			7·11	7·13	7·17	.....	7· 47	(11 čísel)
				11·13	11·17	.....	11· 31	(6 čísel)
					13·17	13·19	13· 23	(3 čísla)
							17· 19	(1 číslo)

Čísel tvaru (B) je dohromady 103. Všech hledaných čísel je 107.

Pomocná úloha

Najděte všechny dělitele čísel:

$$16 = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2, \qquad 100 = 2^2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5,$$
$$1\,400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

Přesvědčte se, že číslo 16 má 5 dělitelů, číslo 100 má $3 \cdot 3 = 9$ dělitelů a číslo 1 400 má $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ dělitelů. Zjistěte, jak tyto počty souvisejí s rozklady daných čísel na prvočísla. (Odpověď na poslední úkol najdete na str. 70).

Řešení úlohy Z7–I–3 (str. 59)

Vyznačíme přímky, na kterých leží strany AB, CD a AE, GH (obr. 19 na str. 66). Vznikly dvě dvojice souhlasných úhlů α, β a β, γ, které mají stejné velikosti:

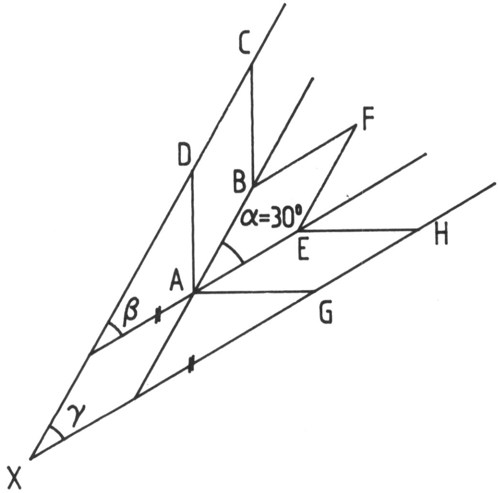
$$\alpha = \beta, \qquad \beta = \gamma$$

Proto je $\gamma = \alpha$.

Protože $ABCD$, $AEFB$ a $AGHE$ jsou shodné kosočtverce a úhel DAG je pravý, musí mít všechny tři kosočtverce při vrcholu A úhel velikosti 30°, tzn. $\alpha = 30°$, a tedy i $\gamma = 30°$. Přímky DC a GH svírají tedy úhel velikosti 30°.

Pomocná úloha

Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Určete úhel, který svírají přímky AB a CD. Opakujte úlohu pro pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$.



Obr. 19

Řešení úlohy Z7–I–4 (str. 60)

Hledané číslo

$$523{*}{*}{*}$$

má být dělitelné sedmi, osmi i devíti. Protože čísla 7, 8, 9 jsou nesoudělná, musí být hledané číslo násobkem jejich součinu $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$.

Dělením čísla 523 000 číslem 504 dostaneme

$$523\,000 : 504 = 1\,037 \qquad \text{(zbytek 352)}$$

neboli $523\,000 = 504 \cdot 1\,037 + 352$. Chceme-li dostat k číslu 523 000 nejblíže větší násobek 504, musíme k němu přičíst rozdíl $504 - 352 = 152$. Tedy nejblíže větší násobek 504 k číslu 523 000 je 523 125. Další násobky 504 dostaneme postupným přičítáním 504.

$$523\,152 \xrightarrow{+\,504} 523\,656 \xrightarrow{+\,504} 524\,160 \xrightarrow{+\,504} \dots$$

Dané úloze vyhovují jen první dvě čísla.

Pomocné úlohy

1. Najděte nejmenší číslo, které je násobkem čísel 5, 8, 11.

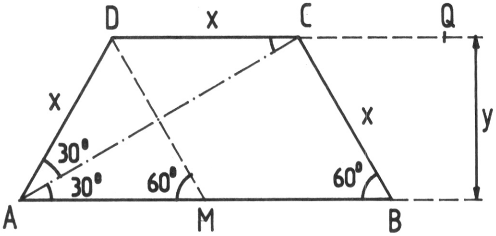
2. Najděte všechny násobky čísla 27, které jsou větší než 1 500 a menší než 1 700.

Řešení úlohy Z7–I–5 (str. 60)

Lichoběžník $ABCD$ znázorníme na obr. 20. Délky ramen označíme x. Na obrázku je znázorněna úsečka DM rovnoběžná s ramenem CB. Vznikl rovnostranný trojúhelník AMD (má 2 úhly velikosti 60°). Proto je $|AM| = x$.

Protože úhly BAC a DCA jsou střídavé, je velikost úhlu DAC rovna 30°. Trojúhelník ACD je rovnoramenný (má 2 úhly velikosti 30°). Odtud je vidět, že základna DC lichoběžníku $ABCD$ má délku rovnou x. Z rovnoběžníku $MBCD$ plyne i $|MB| = x$. Protože $|AM| = |MB| = x$, je M středem základny AB.

Doplníte-li na obrázku 20 úsečku MC (proveďte sami), zjistíte, že lichoběžník $ABCD$ je úsečkami MC a MD rozdělen na tři shodné rovnostranné trojúhelníky. Jejich obsahy se tedy rovnají třetině obsahu daného lichoběžníku.



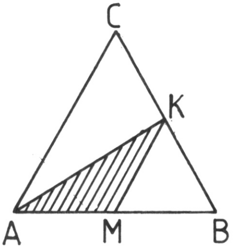
Obr. 20

Obsah trojúhelníku ACD se rovná polovině obsahu kosočtverce $AMCD$, tj. obsahu trojúhelníku AMD. Odtud vypočítáme, že obsah S trojúhelníku ACD je roven třetině obsahu lichoběžníku $ABCD$, tzn.

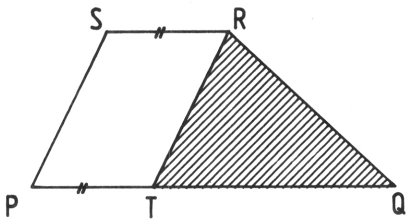
$$S = \frac{1}{3}\,78\,\mathrm{cm}^2 = 26\,\mathrm{cm}^2.$$

Pomocná úloha

Zapište, jak velké části trojúhelníku ABC a lichoběžníku $PQRS$ jsou na obrázku 21a, b vyšrafovány, jestliže platí:



Obr. 21a



Obr. 21b

$$|AB| = |BC| = |AC|, \quad |AM| = |MB| = |BK|,$$
$$|PQ| = 3\,|PT|.$$

Řešení úlohy Z7–I–6 (str. 60)

V tabulce očíslujeme řádky čísly $n = 0, 1, 2, \ldots$ a vyjádříme čísla a, b, c v závislosti na n.

$$a = 60 + n, \quad b = 17 + 2n, \quad c = 9 + 5n \qquad \text{(T)}$$

Aby čísla a, b, c udávala délky stran některého trojúhelníku, musí splňovat tři trojúhelníkové nerovnosti:

a)
$$\begin{aligned} a &< b + c \\ 60 + n &< (17 + 2n) + (9 + 5n) \\ 34 &< 6n \\ 5\frac{2}{3} &< n \end{aligned}$$

Protože n je celé číslo, musí být $6 \leqq n$.

b)
$$\begin{aligned} b &< a + c \\ 17 + 2n &< (60 + n) + (9 + 5n) \\ -52 &< 4n \\ -13 &< n \end{aligned}$$

Tato nerovnost je splněna pro všechna nezáporná n ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

c)
$$c < a + b$$

$$9 + 5n < (60 + n) + (17 + 2n)$$
$$2n < 68$$
$$n < 34$$

Vidíme, že musí být

$$6 \leqq n < 34.$$

Pro tato n udávají čísla (T) délky stran trojúhelníků. Těchto trojúhelníků je 28.

Řešení pomocné úlohy ze str. 63

n-tý člen posloupnosti a_n vypočítáme:

a) $a_n = n^2$
b) $a_n = 3n - 1$
c) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (tj. součet dvou předcházejících členů)
d) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 5$ (tj. součet dvou předcházejících členů zvětšený o 5)

Řešení pomocné úlohy ze str. 65

Nechť p, q, r jsou navzájem různá prvočísla. Potom čísla

$n = p^a$ mají $(a+1)$ dělitelů
$n = p^a q^b$ mají $(a+1)(b+1)$ dělitelů
$n = p^a q^b r^c$ mají $(a+1)(b+1)(c+1)$ dělitelů
atd.

Proto například číslo $16 = 2^4$ má 5 dělitelů, číslo $100 = 2^2 5^2$ má $3 \cdot 3 = 9$ dělitelů a číslo $1\,400 = 2^3 5^2 7$ má $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ dělitelů.

Řešení úlohy Z7–II–1 (str. 61)

Hledané číslo x musí být dělitelné čísly 2 a 3. V prvočíselném rozkladu čísla x je tedy jedna nebo více dvojek a jedna nebo více trojek. Nechť je v tomto rozkladu m dvojek a n trojek. Číslo x je tedy násobek 2^m $(m \geqq 1)$ a také násobek 3^n $(n \geqq 1)$.

Číslo 2^m má $m + 1$ dělitelů; jsou to:

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^m. \tag{M}$$

Číslo 3^n má $n + 1$ dělitelů:

$$1,\ 3,\ 3^2,\ \ldots,\ 3^n. \tag{N}$$

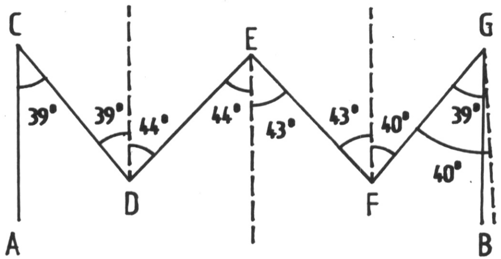
Součin čísel 2^m, 3^n má $(m + 1)(n + 1)$ dělitelů, jsou to součiny čísel z posloupností (M) a (N). Číslo $x = 2^m \cdot 3^n$ má právě 10 dělitelů, je-li $(m+1)(n+1) = 10$. Proto je buď $m = 1$ a $n = 4$, nebo $m = 4$ a $n = 1$. Tedy

$$x = 2^4 \cdot 3 = 48 \quad \text{nebo} \quad x = 2 \cdot 3^4 = 162.$$

Ukážeme, že jiné číslo už úloze nevyhovuje. Je-li číslo x například součinem tří mocnin různých prvočísel $2^m \cdot 3^n \cdot p^r$, pak má $(m + 1)(n + 1)(r + 1)$ dělitelů (viz řešení pomocné úlohy k úloze Z7–I–2 na str. 65).Toto číslo je součin tří čísel větších než 1. Ale hledaná čísla mají mít 10 dělitelů a 10 lze rozložit jen na 2 činitele větší než 1. Podobně nevyhovuje ani žádné číslo, které je součinem čtyř a více různých prvočísel.

Řešení úlohy Z7–II–2 (str. 61)

Body D, E, F, G vedeme rovnoběžky s přímkou AC, na obrázku 22 jsou znázorněny čárkovanými čarami. Nyní využijeme toho, že vzniklé střídavé úhly musí mít stejné velikosti. Zapíšeme je postupně do obrázku (zleva doprava).



Obr. 22

Střídavé úhly při vrcholech F, G mají velikost 40°. Protože velikost úhlu FGB je jen 39°, nemohou být přímky AC a BG rovnoběžné.

Řešení úlohy Z7–II–3 (str. 62)

V dané posloupnosti

$$400, 130, 391, 130, 382, 130, 373, 130, \ldots, 130, 4, 130 \qquad (P)$$

stojí na lichých místech čísla

$$400,\ 391,\ 382,\ 373,\ \ldots,\ 4.$$

Sousední čísla mají rozdíl 9. Napíšeme-li je v opačném pořadí, dostaneme čísla

$$4,\ 13,\ 22,\ 31,\ \ldots,\ 373,\ 382,\ 391,\ 400,$$

tj. čísla tvaru $4 + 9n$, kde $n = 0, 1, 2, \ldots, 44$ (přesvědčte se). Zjistíme, zda mezi nimi není číslo 130, neboť v takovém případě by mezi rovnoramennými trojúhelníky byl i rovnostranný trojúhelník o stranách délky 130.

$$\begin{aligned} 4 + 9n &= 130 \\ n &= 14 \end{aligned}$$

Pro $n = 14$ dostáváme skutečně číslo $4 + 9n = \underline{130}$. V jeho okolí má posloupnost (P) (napsaná v opačném pořadí) tvar

$$\ldots,\ 112,\ 130,\ 121,\ 130,\ \underline{130},\ 130,\ 139,\ 130,\ 148,\ \ldots$$

Ramena rovnoramenných trojúhelníků mají délku 130. Proto délka základny musí být menší než $2 \cdot 130 = 260$. Délky základen tedy mohou být jen čísla tvaru $4 + 9n$, pro něž platí

$$\begin{aligned} 4 + 9n &< 260 \\ n &< 28\,\frac{4}{9}, \end{aligned}$$

tedy čísla, která dostaneme, když do výrazu $4+9n$ dosadíme za $n = 0, 1, 2, \ldots, 28$. Těchto čísel je 29. Tedy 29 rovnoramenných trojúhelníků, mezi nimiž je i jeden rovnostranný trojúhelník. Jsou to trojúhelníky:

$$130,\ 4,\ 130, \quad 130,\ 13,\ 130, \quad 130,\ 22,\ 130,\ \ldots$$
$$\ldots,\ 130,\ 256,\ 130$$

Ramena jsou čísla 130, která stojí v posloupnosti (P) ob jedno číslo tvaru $4 + 9n$. Zbývají ještě dva rovnoramenné trojúhelníky, jejichž délky ramen jsou v posloupnosti (P) hned vedle sebe. Jsou to trojúhelníky s délkami stran

$$121,\ 130,\ 130 \quad \text{a} \quad 130,\ 130,\ 139.$$

Celkem je tedy 31 rovnoramenných trojúhelníků, z nichž jeden je rovnostranný.