40. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie C

In: Leo Boček (editor); Jiří Binder (editor); Karel Horák (editor); Václav Sedláček (editor); Pavel Töpfer (editor): 40. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1990/1991. 32. mezinárodní matematická olympiáda. 3. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1993. pp. 38–52.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404928

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Kolik je čtyřciferných čísel s touto vlastností: Jestliže v něm škrtneme kteroukoliv číslici, nedostaneme číslo dělitelné třemi.

C – I – 2

Najděte nejmenší přirozené číslo k, pro které mají součiny $384k$ a $2\,592k$ stejný počet dělitelů.

C – I – 3

Tři fotbalová družstva hrají turnaj systémem, v němž každé družstvo hraje s každým k zápasů. Po skončení turnaje se zjistilo, že družstva získala *různý počet bodů*. Vítězem turnaje se nestalo družstvo, které získalo nejvíce výher, ani družstvo, které mělo nejméně proher. Určete nejmenší číslo k, pro které mohla uvedená situace nastat.

C – I – 4

Rozhodněte, zda existuje tětivový čtyřúhelník s těmito vlastnostmi:

a) Úhlopříčky ho dělí na čtyři pythagorejské trojúhelníky.

b) Čtyřúhelník není osově souměrný.

(Pythagorejský trojúhelník je pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými délkami stran.)

C – I – 5

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, $|AB| = 9\,\text{cm}$, $|BC| = 6\,\text{cm}$, $|CD| = 5{,}5\,\text{cm}$, $|DA| = 4{,}5\,\text{cm}$, $|BD| = 9\,\text{cm}$. Najděte množinu všech bodů, pro které paty kolmic z tohoto bodu na všechny čtyři strany čtyřúhelníku leží na obvodě čtyřúhelníku $ABCD$. Hledanou množinou je jistý n-úhelník. Zjistěte velikosti jeho vnitřních úhlů.

C – I – 6

Strany čtyřúhelníku mají délky 5, 5, 5, 3. Dokažte, že jeho obsah je větší než $2\sqrt{6}$, a je-li čtyřúhelník konvexní, je jeho obsah větší než 12.

C – S – 1

Čtyřúhelník má tři strany stejně dlouhé, délka čtvrté strany se rovná délce jedné i druhé úhlopříčky. Určete velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku. Jaký je to čtyřúhelník?

C – S – 2

Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré číslo n^2+1 delí číslo n^3-8n^2+2n.

C – S – 3

V oboru nezáporných reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x+y+z&=a,\\ x+y-z&=b,\\ x-y+z&=c,\\ x-y-z&=d, \end{aligned}$$

jestliže množina $\{a,b,c,d\}$ je totožná s množinou $\{4,8,12,16\}$.

C – II – 1

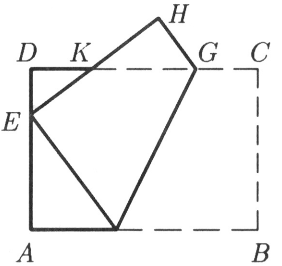
Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je číslo n^6-n^2 deliteľné dvatsiatimi.

C – II – 2

Obdélníkový list papíru $ABCD$ o rozměrech $|AB|=30\,\mathrm{cm}$, $|BC|=21\,\mathrm{cm}$ je přeložen tak, že bod B přejde do bodu E na úsečce AD a $|AE|=15\,\mathrm{cm}$ (obr. 1). Vypočtěte velikosti $|KH|$ a $|GH|$.

C – II – 3

Daný je pravouhlý trojuholník APM s pravým uhlom pri vrchole P. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so



Obr. 1

základňou AB tak, aby bod M bol stredom strany BC a P bol pätou výšky na túto stranu.

C – II – 4

Ve fotbalovém turnaji tří družstev A, B, C hrálo každé družstvo s každým družstvem dvakrát. Ve výsledné tabulce, která u každého mužstva udává počet výher, počet nerozhodných zápasů a počet proher, známe následující údaje:

A	0		
B	1		1
C		3	

Doplňte zbývajících pět čísel tabulky. Svůj postup zdůvodněte.

C – I – 1

Použijeme známé tvrzení, že zbytek při dělení čísla třemi je stejný jako při dělení třemi ciferného součtu toho čísla. Například v případě čtyřciferného čísla m o číslicích a, b, c, d je $m = 1\,000a + 100b + 10c + d = 3(333a + 33b + 3c) + (a + b + c + d)$, odkud vidíme, že rozdíl čísla m a jeho ciferného součtu $a+b+c+d$ je dělitelný třemi. Má-li číslo m požadovanou vlastnost, nesmějí žádné tři jeho číslice dávat při dělení třemi stejný zbytek. Jinak by byl jejich součet dělitelný třemi, a tím by bylo dělitelné třemi i číslo, jež bychom dostali z čísla m vynecháním zbývající, čtvrté číslice. Ze stejného důvodu nesmějí žádné tři číslice čísla m dávat při dělení třemi navzájem různé zbytky. Zbývá tedy pouze možnost, že dvě číslice dávají stejný zbytek a zbývající dvě rovněž, avšak různý od prvního. Dávají-li například dvě číslice zbytek 1 a zbývající dvě zbytek 2, není součet žádných tří z nich dělitelný třemi. Ty dvě číslice se zbytkem 1 můžeme ze čtyř číslic vybrat celkem šesti způsoby, přitom každá z nich se může rovnat 1, 4 nebo 7. Zbývající dvě číslice se mohou nezávisle rovnat 2, 5 nebo 8. Máme tedy celkem $6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 486$ možností. Podobně je tomu u zbytků 0 a 1 nebo 0 a 2. Avšak číslice se zbytkem 0 při dělení třemi se může rovnat 0, 3, 6 nebo 9 (4 možnosti), proto dostáváme nyní dvakrát $6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 864$, tedy 1 728 možností. Z nich však musíme vynechat ty případy, v nichž je na prvním místě 0, nebylo by to číslo čtyřciferné. Je-li na prvním místě 0, je ještě na jednom místě číslice dělitelná třemi, tedy 0, 3, 6, 9, na dalších dvou místech pak číslice 1, 4 nebo 7 nebo 2, 5, 8. Musíme tedy vyloučit $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 216$ případů. Výsledek úlohy je $486 + 1\,728 - 216 = 1\,998$.

C - I - 2

Je $384 = 2^7 \cdot 3$, $2\,592 = 2^5 \cdot 3^4$. Položme například $k = 2^r \cdot 3^s \cdot 5^t$, pak je

$$384k = 2^{r+7} \cdot 3^{s+1} \cdot 5^t, \qquad 2\,592k = 2^{r+5} \cdot 3^{s+4} \cdot 5^t.$$

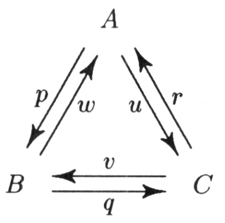
První z nich má $(r+8)(s+2)(t+1)$, druhé $(r+6)(s+5)(t+1)$ dělitelů. Má tedy platit

$$(r+8)(s+2) = (r+6)(s+5), \qquad \text{tj. } 2s = 3r + 14.$$

Protože hledáme nejmenší k, položíme $r = 0$, $s = 7$ a $t = 0$. Podobně bychom dostali, že i u dalších prvočísel v rozkladu čísla k by byl exponent nulový. Řešením úlohy je tedy číslo $k = 3^7$.

C - I - 3

Vítězné mužstvo označme A a nechť více vítězných zápasů než A mělo mužstvo B. Kdyby toto mužstvo mělo méně proher než A, nemohlo by být A vítězem turnaje. Proto méně proher než A mělo třetí družstvo C. Označme p, q, r po řadě počet vítězných zápasů mužstva A nad B, mužstva B nad C a mužstva C nad A. Podobně označíme u, v, w počet vítězných zápasů mužstva A nad C, mužstva C nad B a mužstva B nad A, viz přiložené schéma (obr. 2).



Obr. 2

Mužstvo A vyhrálo $p+u$ zápasů a prohrálo $r+w$ zápasů, B vyhrálo $q+w$ utkání, C prohrálo $q+u$. Podle předpokladu je $p+u < q+w$, $r+w > q+u$. Přitom mužstvo A získalo $2(p+u)+2k-(p+w+r+u) = 2k+(p+u)-(r+w)$ bodů, mužstvo B získalo $2k+(q+w)-(p+v)$ bodů a bodový zisk mužstva C byl $2k+(r+v)-(q+u)$, kde k značí počet kol turnaje. Jelikož A získalo nejvíce bodů, je

$$p+u-(r+w) > q+w-(p+v),$$
$$p+u-(r+w) > r+v-(q+u),$$

sečtením dostaneme

$$p+u > r+w.$$

Máme tedy

$$q+w > p+u > r+w > q+u.$$

Protože jde o celá čísla, je

$$q+w \geqq p+u+1,$$
$$p+u \geqq r+w+1,$$
$$r+w \geqq q+u+1,$$

odkud

$$q \geqq r + 2 \text{ (sečtením prvních dvou nerovností)},$$
$$p \geqq q + 2 \text{ (sečtením posledních dvou nerovností)},$$
$$w \geqq u + 3 \text{ (sečtením všech tří nerovností)}.$$

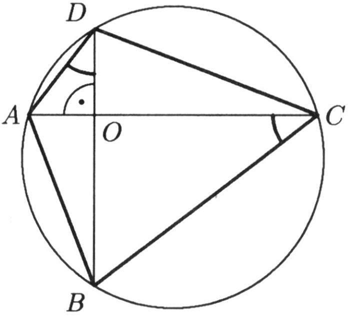
Z odvozených tří nerovností zase plyne jejich sečtením

$$p + w \geqq r + u + 7.$$

Čísla r, u jsou nezáporná, proto mužstva A a B sehrála mezi sebou aspoň 7 utkání, je tedy $k \geqq 7$. Ukážeme, že $k = 7$ vyhovuje. Je pak nutně $r = u = 0$, $p = 4$, $w = 3$, $q = 2$ a pro v máme podmínku $0 < v < 3$, takže $v = 1$ nebo $v = 2$. Všechna utkání mezi A a C skončila nerozhodně, mezi A a B neskončilo žádné utkání remízou. Mužstvo A získalo 15 bodů, zbývající dvě mužstva 13 a 14 bodů.

C – I – 4

Představme si, že čtyřúhelník $ABCD$ (obr. 3) má požado-



Obr. 3

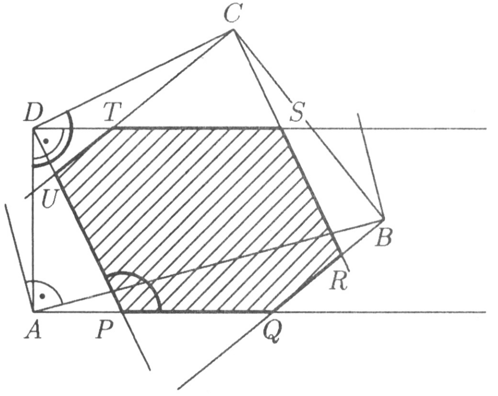
vané vlastnosti, označme O průsečík jeho úhlopříček. Protože to má být čtyřúhelník tětivový, musí být $|\sphericalangle ADO| = |\sphericalangle BCO|$, takže trojúhelníky ADO a BCO jsou podobné (při vrcholu O mají pravý úhel) a pythagorejské. Jeden z pythagorejských trojúhelníků má strany 3, 4, 5, zkusme tedy zvolit přirozená čísla k, l tak, aby $|AO| = 3k, |DO| = 4k$, $|BO| = 3l$, $|CO| = 4l$. Pak stačí, aby k, l byly délky odvěsen pythagorejského trojúhelníku. Pokud by však bylo $k : l = 3 : 4$ nebo $k : l = 4 : 3$, byl by čtyřúhelník $ABCD$ osově souměrný, což nechceme. Vzpomeňme si na pythagorejský trojúhelník o odvěsnách 5 a 12 a položme $k = 5$, $l = 12$, takže $|AO| = 15$, $|DO| = 20$, $|BO| = 36$, $|CO| = 48$. Tyto délky naneseme od průsečíku O dvou kolmých přímek a dostaneme tak čtyřúhelník požadovaných vlastností.

C – I – 5

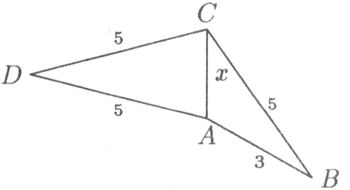
Body A, D vedeme kolmice k straně AD, hledaná množina M bodů je částí rovinného pásu ohraničeného těmito dvěma kolmicemi. Podobně postupujeme u dalších stran čtyřúhelníku. Množina M je průnikem čtyř rovinných pásů, v našem případě je M šestiúhelník $PQRSTU$ (obr. 4). Protože $PU \perp DC$, $QP \perp AD$, je $|\sphericalangle QPU| = |\sphericalangle ADC|$. Podobně bychom určili velikosti ostatních úhlů šestiúhelníku M pomocí velikostí úhlů čtyřúhelníku $ABCD$.

C – I – 6

Uvažujme nejdříve čtyřúhelník $ABCD$ s danými délkami stran, který není konvexní, (obr. 5) a označme $x = |AC|$.



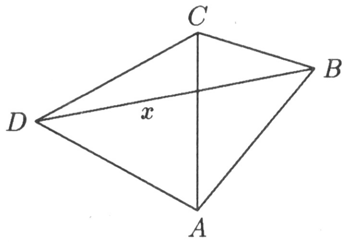
Obr. 4



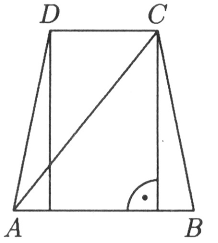
Obr. 5

Podle trojúhelníkové nerovnosti je $2 < x$. Přitom je rovnoramenný trojúhelník ACD ostroúhlý, jinak by bylo $x \geqq 5\sqrt{2}$. Protože však bod A leží uvnitř trojúhelníku CBD, je $x < 5$. Ostroúhlý rovnoramenný trojúhelník o ramenech 5, 5 a základně $x > 2$ má větší obsah než stejný trojúhelník o základně 2. Poslední má obsah $2\sqrt{6}$, proto je obsah trojúhelníku ACD, a tím spíše obsah čtyřúhelníku $ABCD$ větší než $2\sqrt{6}$.

Dále se budeme zabývat čtyřúhelníky konvexními

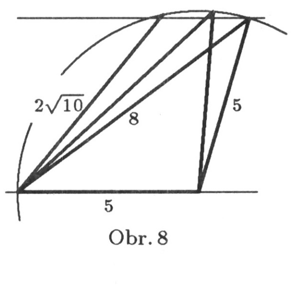


Obr. 6



Obr. 7

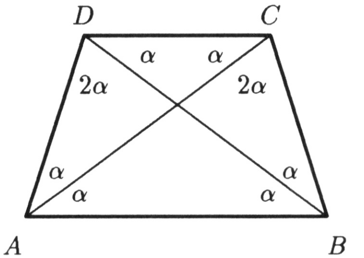
(obr. 6). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $|AC| \geqq |BD|$, jinak bychom zaměnili označení bodů D, A a současně B, C. Pro $x = |AC|$ tedy platí $x < < 8$ a zároveň $x \geqq 2\sqrt{10}$, neboť $2\sqrt{10}$ je délka úhlopříček v rovnoramenném lichoběžníku o stranách 5, 5, 5, 3 (obr. 7). Obsah trojúhelníku ACD je pro všechna $x \in \langle 2\sqrt{10}, 8)$ větší než 12 (obr. 8).



Obr. 8

C – S – 1

Má-li čtyřúhelník $ABCD$ požadované vlastnosti, můžeme označení jeho vrcholů zvolit tak, že $|AD| = |DC| = |CB|$ a $|AB| = |AC| = |BD|$ (obr. 9).



Obr. 9

Trojúhelníky ABC, BAD jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky souměrně sdružené podle osy úsečky AB. Čtyřúhelník je proto rovněž osově souměrný podle této osy, takže je to rovnoramenný lichoběžník. Označíme-li $\alpha = |\sphericalangle CAB|$, je také $\alpha = |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle DCA|$. Trojúhelníky ACD, BDC jsou rovněž rovnoramenné, proto je $\alpha = |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DBC|$, $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB| = 2\alpha$. Z trojúhelníku ABC pak plyne rovnost $5\alpha = 180°$, takže velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku jsou $2\alpha = 72°$, $72°$, $3\alpha = 108°$ a $108°$.

C – S – 2

Jelikož

$$n^3 - 8n^2 + 2n = (n-8)(n^2+1) + n + 8,$$

je toto číslo dělitelné číslem n^2+1 právě tehdy, když je jím dělitelné číslo $n+8$. Pro $n = 1$ a $n = 3$ to splněno není, pro $n = 2$ to splněno je. Je-li $n \geqq 4$, je $(n - \frac{1}{2})^2 \geqq \frac{49}{4}$, takže

$n^2 - n \geqq 12$, $n^2 + 1 \geqq n + 11 > n + 8$. Větší číslo nemůže dělit menší, je tedy $n = 2$ jediným řešením úlohy.

C – S – 3

Má-li mít daná soustava řešení v oboru nezáporných čísel, musí být $a \geqq b$, $a \geqq c$, $b \geqq d$, $c \geqq d$, takže $a \geqq b \geqq c \geqq d$ nebo $a \geqq c \geqq b \geqq d$. Musí tedy být $a = 16$, $d = 4$ a dále $b = 12$, $c = 8$ nebo $b = 8$, $c = 12$. V prvním případě vyjde $x = 10$, $y = 4$, $z = 2$, v druhém případě $x = 10$, $y = 2$, $z = 4$.

C – II – 1

Je

$$n^6 - n^2 = n^2(n-1)(n+1)(n^2+1).$$

Je-li n sudé, je n^2 dělitelné čtyřmi, v opačném případě jsou čísla $n - 1, n + 1$ sudá a čtyřmi je dělitelný součin $(n - 1)(n + 1)$. Není-li žádné z čísel n, $n - 1$, $n + 1$ dělitelné pěti, je $n = 5k + 2$ nebo $n = 5k + 3$, kde k je celé. Pak je ale $n^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5$ nebo $n^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10$, takže $n^2 + 1$ je dělitelné pěti. Tím je dokázáno, že dané číslo $n^6 - n^2$ je vždy dělitelné čísly 4 a 5, a tudíž dvaceti.

Jiný důkaz dělitelnosti čísla $n^6 - n^2$ číslem pět podala *Anna Váňčová, žákyně I. ročníku gymnázia v Považské Bystrici.* Ví, že součin pěti po sobě jdoucích přirozených čísel $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$ je jistě dělitelný pěti. Přitom je

$$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) = n(n^4-5n^2+4) = n^5-5n^3+4n$$

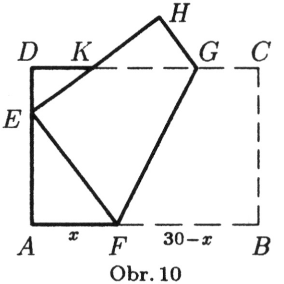
a

$$n^6 - n^2 = n(n^5 - 5n^3 + 4n) + 5(n^4 - n^2).$$

Jelikož jsou oba sčítance dělitelné pěti, je pěti dělitelný i jejich součet $n^6 - n^2$.

C – II – 2

Označme $x = |AF|$ (obr. 10), kde F je průsečík úsečky AB a osy úsečky BE. Je $|FE| = |FB| = 30\,\text{cm} - x$. Užitím Pythagorovy věty na trojúhelník AFE dostaneme $x = \frac{45}{4}\,\text{cm}$. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků KDE a EAF plyne $|EK| = 10\,\text{cm}$, takže $|KH| = 11\,\text{cm}$. Z podobnosti trojúhelníků KDE a KHG plyne $|HG| = \frac{33}{4}\,\text{cm}$.

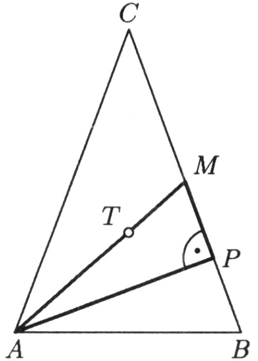


Obr. 10

C – II – 3

Sestrojíme nejdříve těžiště T trojúhelníku ABC (obr. 11), leží na úsečce AM, kterou dělí v poměru $2 : 1$ ($|AT| : |TM| = 2 : 1$). Protože má platit $|AC| = |BC|$, musí také platit $|AT| = |BT|$. Leží tedy bod B na kružnici k

o středu T a poloměru $|TA|$, jež protíná přímku PM ve dvou bodech, každý z nich můžeme vzít za bod B. Bod C dostaneme jako průsečík přímky PM s osou úsečky AB, nebo také jako bod souměrně sdružený k bodu B podle bodu M. Úloha má dvě řešení.



Obr. 11

C – II – 4

Protože B má jednu prohru a A žádnou výhru, muselo B prohrát s C, takže C má aspoň jednu výhru. Více však mít nemohlo, protože sehrálo jen 4 utkání, takže nemělo žádnou prohru. Jednu prohru mělo mužstvo A (prohrálo nutně s B). Mužstvo A pak mělo tři a B dva nerozhodné zápasy. Výsledná tabulka byla tedy takováto:

A	0	3	1
B	1	2	1
C	1	3	0