40. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie B

In: Leo Boček (editor); Jiří Binder (editor); Karel Horák (editor); Václav Sedláček (editor); Pavel Töpfer (editor): 40. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1990/1991. 32. mezinárodní matematická olympiáda. 3. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1993. pp. 53–64.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404929

Kategorie B

Texty úloh

B - I - 1

V oboru reálných čísel řešte rovnici $3x^3 - [x] = 3$, kde $[x]$ značí celou část čísla x.

B - I - 2

Na straně AB trojúhelníku ABC jsou dány body K, L tak, že $|AK| = |KL| = |LB|$, podobně na straně CB body M, N tak, že $|CM| = |MN| = |NB|$. Průsečík úseček AN a KM označme P, průsečík přímek LP a AC je bod Q. Určete obsah čtyřúhelníku $CQPM$, jestliže se obsah trojúhelníku ABC rovná 18.

B - I - 3

V rovině je dáno 7 bodů, z nichž některé jsou spojeny úsečkou. Přitom jsou splněny podmínky:

a) z každé trojice bodů jsou aspoň dva spojeny úsečkou,

b) počet úseček je minimální.

Kolik úseček obsahuje útvar, který splňuje tyto podmínky? Nakreslete příklad takového útvaru.

B – I – 4

Sestrojte trojúhelník, jestliže je dán poloměr r kružnice mu vepsané, poměr poloměru R kružnice mu opsané a strany a se rovná 2 a poměr velikostí β, γ úhlů přilehlých k straně a se rovná 3.

B – I – 5

Pro reálná čísla a, b, c ($ac \neq 0$) má rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ reálný kořen r, rovnice $ax^2 - bx - c = 0$ má reálný kořen s. Dokažte, že rovnice $ax^2 - 2bx - 2c = 0$ má reálný kořen, který leží mezi r a s.

B – I – 6

Dokažte, že pro velikosti α, β, γ úhlů v trojúhelníku platí

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \leqq \frac{3}{8}\sqrt{3}.$$

B – S – 1

Dokažte, že rovnice

$$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$$

má pro každou trojici reálných čísel a, b, c reálné řešení.

B – S – 2

Najděte aspoň jednu dvojici celých čísel a, b tak, aby pro každé celé číslo x platilo

$$\left[\frac{x+a}{5}\right]+\left[\frac{x+b}{5}\right]=\left[\frac{2x}{5}\right].$$

($[x]$ značí celou část čísla x, tj. největší celé číslo, které není větší než číslo x.)

B – S – 3

Na uhlopriečke AC rovnobežníka $ABCD$ sú dané body K a L také, že $|AK| : |KL| : |LC| = 4 : 5 : 3$. Označme P priesečník priamok AB, DK a Q priesečník priamok CD a BL. Vypočítajte pomer $|PR| : |QR|$, kde R je priesečník uhlopriečky AC a priamky PQ.

B – II – 1

Dokažte, že funkce $f(x) = kx - [x]$ definovaná na množině $\mathbf{R}$ všech reálných čísel není pro $k > \frac{1}{2}$ prostá.

B – II – 2

Ukážte, že rovnica

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = 0$$

nemá riešenie v množine reálnych čísel.

B - II - 3

V rovine je daných sedem bodov, z ktorých niektoré sú spojené úsečkou. Pritom v každej štvorici bodov sú aspoň dve dvojice spojené úsečkou a počet úsečiek je minimálny. Zistite, koľko úsečiek takýto útvar obsahuje, a nakreslite príklad.

B - II - 4

Je dán obdélník $ABCD$ a na jeho stranách AB, CD jsou zvoleny body E, F tak, že trojúhelníky AEG, GHF a HCF mají stejný obsah (G a H označují průsečíky úhlopříčky AC s přímkami EF a BF). Určete poměr obsahu trojúhelníku AEG a obsahu daného obdélníku.

Řešení úloh

B - I - 1

Označme $[x] = n$, takže $n \leqq x < n + 1$. Funkce $y = x^3$ je rostoucí, takže

$$n^3 \leqq x^3 < (n+1)^3.$$

Vynásobíme-li tuto nerovnost třemi a odečteme n, dostaneme

$$3n^3 - n \leqq 3x^3 - [x] < 3n^3 + 9n^2 + 8n + 3.$$

Splňuje-li x danou rovnici, je nutně

$$3n^3 - n \leqq 3 < 3n^3 + 9n^2 + 8n + 3,$$

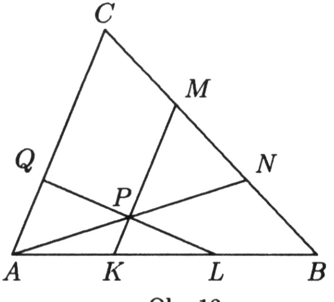
tedy

$$n(3n^3-1) \leqq 3 \quad \text{a současně} \quad 0 < n(3n^2+9n+8).$$

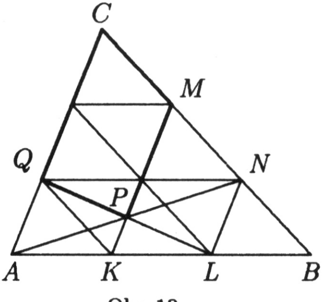
Druhá nerovnice není splněna pro žádné $n \leqq 0$, protože $3n^2+9n+8 > 0$ pro každé n. Z přirozených čísel splňuje první nerovnici pouze číslo $n = 1$, takže řešená rovnice může mít řešení pouze v intervalu $\langle 1, 2)$. Pro takové řešení pak platí $3x^3 - 1 = 3$, tedy $x = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$. Tato hodnota je z uvedeného intervalu a je jediným řešením úlohy.

B – I – 2

Z podobnosti trojúhelníků ABC, KBM (obr. 12) plyne



Obr. 12



Obr. 13

$|KM| = \frac{2}{3}|AC|$, z podobnosti trojúhelníků ANC, PNM plyne $|MP| = \frac{1}{2}|AC|$, takže $|PK| = |KM| - |MP| = \frac{1}{6}|AC|$. Úsečka PK je střední příčkou v trojúhelníku ALQ, takže $|AQ| = 2|PK| = \frac{1}{3}|AC|$, neboli $|CQ| = \frac{2}{3}|AC|$. Čtyřúhelník $CQPM$ je lichoběžník se základnami

CQ a MP a výškou $\frac{1}{3}v$, kde v je výška trojúhelníku ABC na stranu AC. Hledaný obsah je tedy

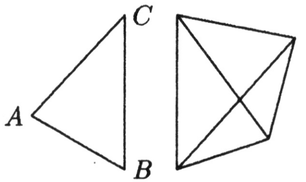
$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)|AC|\cdot\frac{1}{3}v=\frac{7}{36}|AC|v=7,$$

neboť $\frac{1}{2}|AC|v=18$.

Jiné řešení. Body M, N vedeme rovnoběžky s přímkou AB i s přímkou AC (obr. 13), body K a L vedeme rovnoběžky s přímkou BC. Tím se trojúhelník ABC rozdělí na 9 shodných trojúhelníků, každý z nich má obsah 2. Čtyřúhelník $CQPM$ je složen z 3,5 těchto trojúhelníků, jeho obsah je tedy 7.

B – I – 3

Jestliže z některého z daných bodů (označme ho A) nevychází žádná úsečka, musejí být každé dva ze zbývajících 6 bodů spojeny, jinak by tyto dva body tvořily spolu s bodem A trojici, která by nesplňovala podmínku a). Šest bodů určuje $\binom{6}{2}=15$ úseček. Nechť z některého bodu A vychází pouze jedna úsečka, její druhý krajní bod označme B. Každé dva ze zbývajících pěti bodů musejí být opět spojeny úsečkou, je tedy v tomto případě třeba aspoň 11 úseček. Nechť z některého bodu A vycházejí pouze dvě úsečky (do bodů B, C). Každé dva ze zbývajících 4 bodů musejí být spojeny, to dává 6 úseček. Podmínka a) však bude splněna jen tehdy, bude-li každý z těchto 4 bodů spojen s B nebo s C (12 úseček) nebo budou-li spojeny body B, C (pak je třeba aspoň 9 úseček — obr. 14). Vycházejí-li z každého

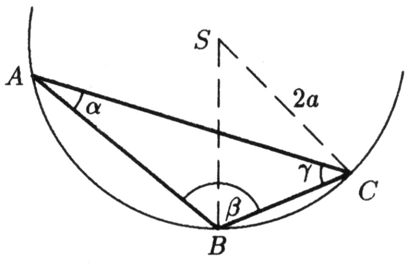


Obr. 14

bodu aspoň 3 úsečky, je jich celkem aspoň $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7$, tedy aspoň 11. Nejmenší možný počet úseček je tedy 9.

B – I – 4

Nejdříve sestrojíme trojúhelník ABC, který má všechny požadované vlastnosti kromě daného poloměru vepsané kružnice. Zvolíme libovolnou úsečku BC za stranu a a sestrojíme kružnici o poloměru $2a$, která prochází body B, C (obr. 15).



Obr. 15

Tím známe velikost úhlu $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, správněji dvě možné velikosti — podle toho, zvolíme-li A na větším, nebo na menším oblouku. Rozdíl $180° - \alpha$ rozdělíme graficky na 4 stejné díly, 1 díl je velikost úhlu γ, 3 díly tvoří velikost úhlu β. Úsečka BC spolu s β a γ už určují bod A. Takto obdržený trojúhelník musíme ovšem ještě stejnolehlostí zobrazit tak, aby se poloměr kružnice vepsané rovnal r. Za střed stejnolehlosti zvolíme například bod B. Označíme-li ϱ poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC, rovná se koeficient stejnolehlosti poměru $r : \varrho$.

B – I – 5

Je $ar^2 + br + c = 0$, $as^2 - bs - c = 0$. Kvadratická funkce $y = ax^2 - 2bx - 2c$ nabývá v bodě $x = r$ hodnoty $ar^2 - 2br - 2c = 3ar^2$, v bodě $x = s$ hodnoty $as^2 - 2bs - 2c = -as^2$. Jelikož $ars \neq 0$, mají čísla $3ar^2$, as^2 opačná znaménka, musí tedy mezi čísly r, s ležet číslo x, pro které je $ax^2 - 2bx - 2c = 0$.

Pěkně se úloha řeší též *graficky* pomocí grafu funkcí $y = ax^2$ (parabola), $y = bx + c$, $y = -bx - c$, $y = 2bx + 2c$ (vesměs přímky, které neprocházejí počátkem).

B – I – 6

Použijeme nejdříve nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, dostaneme

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \leqq \frac{1}{27}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^3,$$

dále postupujeme podle 57. svazku ŠMM, str. 27, anebo použijeme tzv. Jensenovu nerovnost, podle které pro α, β, $\gamma \in \langle 0, 2\pi \rangle$ platí

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \leqq \sin\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}.$$

Rovnost platí právě jen pro trojúhelník rovnostranný.

B – S – 1

Můžeme předpokládat, že $a \leqq b \leqq c$. Pro funkci

$$f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$$

je pak $f(a) \geqq 0$, $f(b) \leqq 0$, takže v případě $a = b$ je $f(a) = 0$ a v případě $a < b$ existuje nutně $x \in \langle a, b \rangle$, pro které platí $f(x) = 0$.

Mohli bychom ovšem také spočítat diskriminant kvadratického trojčlenu $f(x)$ a ukázat, že není záporný. To by se nám snadno podařilo, neboť je

$$\begin{aligned} D &= 4(a+b+c)^2 - 12(ab+bc+ca) = \\ &= 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2 + 2(c-a)^2. \end{aligned}$$

B – S – 2

Pro čísla a, b musí platit $\left[\frac{a}{5}\right] + \left[\frac{b}{5}\right] = 0$, což dostaneme z dané rovnosti pro $x = 0$. Zkusíme zvolit čísla $a \leqq b$ z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Dosadíme-li postupně $x = 1$, 2, 3, 4, vyjde

$$\left[\frac{a+1}{5}\right] + \left[\frac{b+1}{5}\right] = \left[\frac{a+2}{5}\right] + \left[\frac{b+2}{5}\right] = 0,$$

$$\left[\frac{a+3}{5}\right] + \left[\frac{b+3}{5}\right] = \left[\frac{a+4}{5}\right] + \left[\frac{b+4}{5}\right] = 1,$$

takže

$$\left[\frac{a+4}{5}\right]=0, \quad \left[\frac{b+3}{5}\right]=1, \quad \left[\frac{b+2}{5}\right]=0,$$

odkud vychází $a = 0$, $b = 2$. Pro tato dvě čísla je daná rovnice splněna pro každé $x \in \{0,1,2,3,4\}$. Je ovšem vidět, že daná rovnice je splněna pro x tvaru $x = 5k + x_0$ (k je celé), právě když je splněna pro x_0.

B - S - 3

Z podobnosti trojúhelníků $APK \sim CDK$, $ABL \sim CQL$ a $APR \sim CQR$ plynou rovnosti

$$\frac{|AP|}{|CD|}=\frac{|AP|}{|AB|}=\frac{|AK|}{|KC|}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{|CQ|}{|AB|}=\frac{|CL|}{|AL|}=\frac{1}{3},$$

takže

$$\frac{|PR|}{|QR|}=\frac{|AP|}{|CQ|}=\frac{3}{2}.$$

B - II - 1

Z grafu uvedené funkce zjistíme, že pro $k \geqq 1$ je $f(1) = k-1$ a rovněž $f(1-\frac{1}{k}) = k(1-\frac{1}{k}) = k-1$. Pro $k \in (\frac{1}{2}, 1)$ je $f(0) = 0$ a zároveň $f(\frac{1}{k}) = 0$, neboť číslo $\frac{1}{k}$ leží v intervalu $(1,2)$.

Jiné řešení. Uvedená funkce zobrazí interval $\langle 0,1)$ na interval $\langle 0,k)$ a interval $\langle 1,2)$ zobrazí na interval $\langle k-1, 2k-1)$. Přitom pro $k \geqq 1$ je zřejmě $0 \leqq k - 1 < k$ a pro $k \in \left\langle \frac{1}{2}, 1\right)$ zase $0 \leqq 2k-1 < k$, takže v obou případech je průnik intervalů $\langle 0, k)$, $\langle k-1, 2k-1)$ neprázdný, což znamená že daná funkce není prostá.

B – II – 2

Mnohočlen jednoduše upravíme na tvar

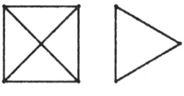
$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 &= \\ &= x^2(x^2 - 2x + 1) + 2(x^2 - 2x + 1) + 3 = \\ &= x^2(x-1)^2 + 2(x-1)^2 + 3, \end{aligned}$$

odkud je vidět, že pro každé reálné x je uvedený výraz kladný. Rovnice tedy nemá žádné reálné řešení.

B – II – 3

Kdyby mezi danými body existovala trojice, ve které by žádné dva body nebyly spojeny úsečkou, musel by každý ze zbývajících čtyř bodů být spojen aspoň se dvěma z těchto tří bodů. To je celkem 8 úseček. Tyto čtyři body jsou také spojeny aspoň dvěma úsečkami, takže celkově by takový útvar obsahoval aspoň 10 úseček.

Jsou-li naopak v každé trojici bodů aspoň dva spojeny úsečkou, víme z úlohy B–I–3, že útvar obsahuje aspoň 9 úseček (obr. 16). Takový útvar zřejmě vyhovuje požadavkům úlohy.



Obr. 16

B – II – 4

Z rovnosti obsahů trojúhelníků GHF a HCF plyne rovnost $|GH| = |HC|$. Protože trojúhelníky CFG a AEG jsou podobné a jejich obsahy jsou v poměru 2 : 1, je $|GC| = \sqrt{2}\,|AG|$, tj. $|AG| = \sqrt{2}\,|HC|$.

Z podobnosti trojúhelníků CFH, ABH plyne, že $|AB| : |CF| = 1 + \sqrt{2}$. Ve stejném poměru jsou i výšky v, w těchto trojúhelníků, takže

$$\frac{v}{|CB|} = \frac{v}{v+w} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}.$$

Protože obsah trojúhelníku CFH je $\frac{1}{2}\,|CF|\,v$ a obsah obdélníku $ABCD$ je $|AB|(v+w)$, je hledaný poměr

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}-4}{4}.$$