40. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie A

In: Leo Boček (editor); Jiří Binder (editor); Karel Horák (editor); Václav Sedláček (editor); Pavel Töpfer (editor): 40. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1990/1991. 32. mezinárodní matematická olympiáda. 3. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1993. pp. 65–90.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404930

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Pre každé prirodzené $n \geqq 6$ platí $n! \leqq \left(\frac{n}{2}\right)^n$. Dokážte.

A – I – 2

Pravidelný štvorboký antihranol $ABCDEFGH$ má dve štvorcové steny $ABCD$, $EFGH$ a osem stien tvaru rovnostranného trojuholníka ABE, BCF, CDG, DAH, EFB, FGC, GHD, HEA. Všetky hrany majú dĺžku a. Vypočítajte objem daného antihranola.

A – I – 3

V rovině je dáno devět bodů, z nichž některé jsou spojeny úsečkou. Přitom jsou splněny následující podmínky:

a) v každé trojici daných bodů jsou aspoň dva spojeny úsečkou,

b) počet úseček je minimální.

Kolik úseček obsahuje útvar, který tyto dvě podmínky splňuje? Načrtněte příklad takového útvaru.

A – I – 4

Každý mnohoúhelník M (ne nutně konvexní) lze rozřezat na trojúhelníky s vrcholy ve vrcholech M. Dokažte.

A – I – 5

Nájdite taký mnohočlen p s celočíselnými koeficientami, pre ktorý platí

$$p(1) = 1, \quad p(2) = 3, \quad p(3) = 15$$

a ktorý má najmenší súčet absolútnych hodnôt svojich koeficientov. Zmení sa odpoveď, ak budeme uvažovať mnohočleny p s ľubovoľnými reálnymi koeficientami?

A – I – 6

Je dána funkce f spojitá na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a s hodnotami $f(0) = f(1) = 1$, jež pro každá dvě čísla $x \leqq y$ z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ splňuje rovnici

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{2}{3} f(x) + \frac{1}{3} f(y).$$

Určete $f(\frac{1}{7})$.

A – S – 1

Nech a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka. Dokážte nerovnosť

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

A – S – 2

Dokažte, že pro každé celé $k \geqq 2$ existují celá nezáporná čísla $a > b$ taková, že hodnota mnohočlenu $x^a - x^b$ je dělitelná číslem k pro každé celé číslo x.

A – S – 3

Je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož hrany DA, DB, DC jsou navzájem kolmé a mají délky a, b, c. Vypočtěte velikost výšky v daného čtyřstěnu, jež přísluší stěně ABC. Dokažte, že při dané hodnotě v má čtyřstěn nejmenší objem, právě když $a = b = c$.

A – II – 1

Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla p a q platí nerovnost

$$(pq)! \geqq (p!)^q (q!)^p .$$

A – II – 2

Daný je trojuholník ABC, v ktorom pre priesečník výšok O platí $|OC| = |AB|$. Zistite, akú veľkosť môže mať uhol ACB.

A – II – 3

Nájdite najmenšie prirodzené číslo n, ku ktorému existuje polynóm p s celočíselnými koeficientami tvaru $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ taký, že $p(k)$ je delitelné ôsmimi pre všetky celé k.

A – II – 4

Uvažujme funkci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která je ostře rostoucí a pro každá dvě přirozená čísla m, n splňuje rovnost

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

Určete $f(30)$, víte-li, že $f(2) = 4$.

A – III – 1

Dokážte, že pre reálne čísla p, q, r, φ platí

$$p\cos^2\varphi + q\sin\varphi\cos\varphi + r\sin^2\varphi \geqq$$
$$\geqq \frac{1}{2}\left(p + r - \sqrt{(p-r)^2 + q^2}\right).$$

A – III – 2

Vnitřní prostory muzea mají tvar mnohoúhelníku (ne nutně konvexního) s $3n$ vrcholy. Dokažte, že v něm můžeme rozestavit n hlídačů tak, aby viděli celý prostor muzea.

A – III – 3

Pro libovolnou permutaci p množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ označme $d(p)$ součet

$$|p(1) - 1| + |p(2) - 2| + \ldots + |p(n) - n|$$

a $i(p)$ počet inverzí permutace p, tj. počet všech dvojic i, j takových, že $1 \leqq i < j \leqq n$ a $p(i) > p(j)$. Dokažte, že $d(p) \leqq 2i(p)$.

A - III - 4

Dokažte, že všechny trojúhelníky ABC, jejichž úhel při vrcholu A je dvakrát větší než úhel při vrcholu B, mají stejný poměr vzdáleností bodu C od bodu A a od osy úsečky AB.

A - III - 5

Ak v skupine matematikov je každý s niekým spriatelený (predpokladáme, že priateľstvo je symetrická relácia), pak medzi nimi existuje taký matematik, že priemerný počet priateľov všetkých jeho priateľov nie je menší než priemerný počet priateľov všetkých členov uvedenej skupiny. Dokážte.

A - III - 6

Množina $\mathbb{N}$ všetkých prirodzených čísel je zjednotením troch podmnožín A_1, A_2, A_3. Dokážte, že aspoň jedna z nich má nasledujúcu vlastnosť: Existuje také kladné číslo m, že pre každé k môžeme v tejto množine nájsť čísla $a_1, a_2, \ldots, a_k$, pre ktoré platí $0 < a_{j+1} - a_j \leqq m$ $(1 \leqq j \leqq k-1)$.

Řešení úloh

A - I - 1

Pro $n = 6$ tvrzení skutečně platí $(720 < 729)$. Dále se pokusíme o důkaz indukcí. Předpokládejme tedy, že tvrzení platí pro nějaké $n \geqq 6$ přirozené. Potom

$$(n+1)! = n!(n+1) \leqq (n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n;$$

přitom nerovnost

$$(n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n \leqq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$$

platí, právě když

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqq 2.$$

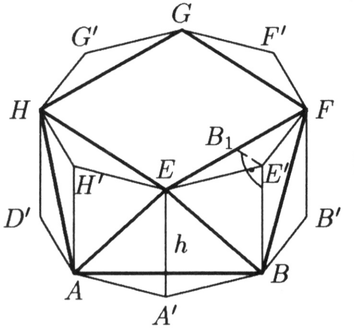
K důkazu poslední nerovnosti potřebujeme znát binomickou větu, ze které snadno dostaneme požadovaný odhad.

Poznámka. Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem poskytne horší odhad $\sqrt[n]{n!} \leqq \frac{n+1}{2}$.

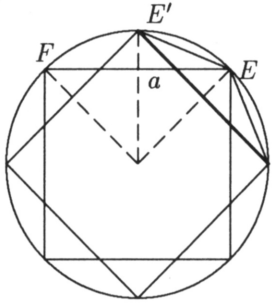
A – I – 2

Hledaný objem vypočítáme nejjednodušeji tak, že daný antihranol doplníme na pravidelný osmiboký hranol $AA'BB'CC'DD'EE'FF'GG'HH'$. Ten sestrojíme tak, že každým vrcholem antihranolu vedeme novou hranu kolmou k oběma základnám (obr. 17). Přitom tento osmiboký hranol vznikne z původního antihranolu přidáním osmi shodných čtyřstěnů, jejichž objem stejně jako objem výsledného osmibokého hranolu není těžké určit.

Označíme-li P obsah trojúhelníku $EE'F$, S obsah pravidelného osmiúhelníku $EE'FF'GG'HH'$ a h výšku daného



Obr. 17



Obr. 18

antihranolu (a tedy i osmibokého hranolu), bude pro objem V daného antihranolu platit $V = Sh - \frac{8}{3}hP$, kde $S = a^2 + 4P$ (obr. 18) a $P = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}-1}{2}a^2$. Výšku h vypočítáme podle Pythagorovy věty z trojúhelníku BB_1E', vyjde

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3 - \left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt[4]{8}.$$

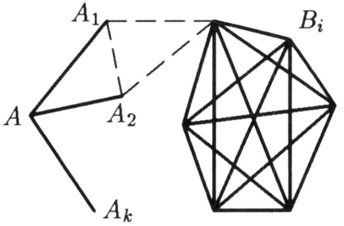
Pro objem V pak dostaneme

$$V = \left(a^2 + \frac{4}{3}P\right)h = \frac{1}{2}\sqrt[4]{8}a^3\left(1 + \frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)\right)$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt[4]{8}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a^3.$$

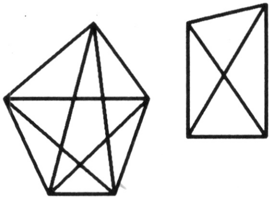
Jiná možnost, jak uvedený objem vypočítat, je použít vzorec $V = \frac{1}{6}h(P_1 + P_2 + 4M)$, kde P_1, P_2 jsou obsahy obou podstav, M je obsah řezu antihranolu rovinou, která je rovnoběžná s oběma podstavami a má od nich stejnou vzdálenost, a h je jeho výška. Důkaz najdete v řešení úlohy 41 ve sbírce Horák–Vrba: Úlohy MMO.

A – I – 3

Mějme nějakou konfiguraci n bodů splňujících podmínku a) úlohy. Pokud existuje bod A, z něhož vychází právě $k \leqq \frac{1}{2}n$ úseček, musí být každé dva z ostatních $n-k-1$ bodů spojeny úsečkou. Uvažujme dále libovolnou dvojici bodů spojených s A úsečkou (např. A_1, A_2 — obr. 19). Uvažovaná dvojice bodů A_1, A_2 je buď spojena úsečkou, anebo ke každému z bodů $B_1, B_2, \ldots, B_{n-k-1}$, jež s A spojeny nejsou, existuje aspoň jedna úsečka, která jej spojuje s jedním z bodů uvažované dvojice. V takovém případě zvolené dvojici odpovídá aspoň $n-k-1$ úseček, přičemž každou takovou úsečku pak počítáme nejvýše $(k-1)$krát (koncový bod A_i úsečky A_iB_j se vyskytuje v $k-1$ dvojicích A_iA_l, $1 \leqq l \leqq k$, $l \neq i$). Protože pro $k \leqq \frac{1}{2}n$ je $\dfrac{n-k-1}{k-1} \geqq 1$, dostaneme tak pro každou z $\binom{k}{2}$ dvojic aspoň 1 úsečku, celkem tedy dostaneme nejméně $\binom{n-k-1}{2} + \binom{k}{2} + k = \binom{n-k-1}{2} + \binom{k+1}{2} \geqq \binom{m}{2} + \binom{n-m}{2}$ úseček, kde $m = [n/2]$.



Obr. 19



Obr. 20

Pokud by ovšem z každého bodu vycházelo více než $\frac{1}{2}n$ úseček, dostali bychom celkem více než $\frac{1}{4}n^2$ úseček, což je více než v předchozím případě, jak zjistíme výpočtem. Pro $n = 9$ vyjde nejmenší počet úseček pro $k = 4$ (obr. 20). Odpovídající útvar obsahuje $\binom{5}{2} + \binom{4}{2} = 16$ úseček.

Jiné řešení. Označme A bod, z nějž vychází minimální kladný počet, řekněme k úseček. Z každého bodu, který je s A spojen úsečkou, vychází aspoň k úseček. Uvedených $k+1$ bodů je tedy spojeno aspoň $\frac{1}{2}k(k+1)$ úsečkami. Zbývajících $n-k-1$ bodů musí být pospojováno navzájem. Kdyby tomu tak nebylo, daly by nespojené dva z těchto bodů s bodem A trojici, v níž není ani jedna úsečka. Tím by byla porušena podmínka a).

Počet p všech úseček množiny tedy můžeme odhadnout zdola hodnotou $p(k)$, která závisí na čísle k:

$$
\begin{aligned}
p \geqq p(k) &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(n-k-1)(n-k-2)}{2} = \\
&= \frac{2k^2 - 2k(n-2) + (n-1)(n-2)}{2} = \\
&= k^2 - 2k\,\frac{n-2}{2} + \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 - \\
&\quad - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + \frac{2(n-1)(n-2)}{4} = \\
&= \left(k - \frac{n-2}{2}\right)^2 + \frac{n(n-2)}{4}.
\end{aligned}
$$

Odtud je vidět, že nejmenší počet 16 úseček dostaneme pro $k = 3$ nebo $k = 4$.

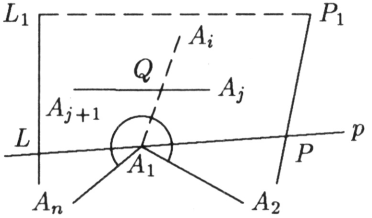
Úlohu lze samozřejmě řešit i rozborem jednotlivých konkrétních možností (viz řešení úlohy B–I–3).

A – I – 4

Tvrzení úlohy se může na první pohled zdát triviální. Pro konvexní n-úhelník je opravdu zřejmé — úhlopříčkou daný mnohoúhelník M rozdělíme na dva mnohoúhelníky s menším počtem vrcholů, takže můžeme použít matematickou indukci. Musíme však dokázat, že i v nekonvexním mnohoúhelníku M vždycky existuje taková úhlopříčka (tj. úsečka spojující dva jeho vrcholy), která leží celá v M.

Mějme tedy n-úhelník $\mathsf{M} = A_1A_2\dots A_n$, který má nekonvexní úhel např. při vrcholu A_1. Vrcholem A_1 veďme přímku p takovou, že s ní žádná ze stran M není rovnoběžná, a přitom oba sousední vrcholy A_2 a A_n leží ve stejné polorovině určené přímkou p.

Označme L a P body, v nichž přímka p poprvé protne hranici M (LP leží celá v M), a L_1, resp. P_1 ten vrchol strany obsahující bod L, resp. P, který leží v polorovině opačné k pA_2 (obr. 21). Uvažujme teď vrchol $A_i \neq A_1$, který leží ve čtyřúhelníku LPP_1L_1 a má od přímky p nejmenší vzdálenost (takový bod jistě existuje, protože první vlastnost má např. bod L_1).



Obr. 21

Ukážeme, že zmíněný vrchol A_i je spojen s vrcholem A_1 úhlopříčkou, která leží celá v M. Kdyby úsečka A_1A_i neležela celá v M, musela by v nějakém vnitřním bodě Q protínat hranici uvažovaného mnohoúhelníku v nějaké jeho straně A_jA_{j+1}. Strana A_jA_{j+1} není rovnoběžná s p, neprotíná žádnou ze stran L_1L, LP, PP_1, a proto některý její krajní bod leží uvnitř LPP_1L_1 blíže k p než bod A_i. To je ve sporu s volbou bodu A_i.

A – I – 5

Uvažujme kvadratický mnohočlen q, pro který platí $q(1) = 1, q(2) = 3, q(3) = 15$. Ten je uvedenými třemi hodnotami jednoznačně určen; pro jeho koeficienty dostaneme tři rovnice o třech neznámých a vyjde $q(x) = 5x^2 - 13x + 9$. Tento mnohočlen má součet absolutních hodnot koeficientů 27.

Každý mnohočlen třetího stupně, který splňuje uvedené podmínky, se dá psát ve tvaru

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 13x + 9 + k(x-1)(x-2)(x-3) = \\ &= kx^3 + (5-6k)x^2 + (11k-13)x + (9-6k), \end{aligned}$$

kde k je celé číslo. Vcelku snadno odhadneme, že příslušný součet $|k| + |5-6k| + |11k-13| + |9-6k|$ je nejmenší pro $k = 1$ a je roven 7.

Každý mnohočlen vyššího stupně, který splňuje podmínky úlohy, můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} p(x) &= q(x) + (x-1)(x-2)(x-3)k(x) = \\ &= q(x) + (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)k(x) = \sum_{i=0}^{n+3} a_i x^i, \end{aligned}$$

kde $k(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ je mnohočlen s celočíselnými koeficienty. Porovnáním koeficientů vyjde

$$\begin{aligned}
a_0 &= -6b_0 + 9,\\
a_1 &= -6b_1 + 11b_0 - 13,\\
a_2 &= -6b_2 + 11b_1 - 6b_0 + 5,\\
a_3 &= -6b_3 + 11b_2 - 6b_1 + b_0,\\
a_4 &= -6b_4 + 11b_3 - 6b_2 + b_1,\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Nyní hledáme celá čísla $b_0, b_1, b_2, \ldots$ taková, aby součet $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots$ nebyl větší než 7. Protože $|a_2| + |a_3| + \ldots \geqq 1$, musí být $|a_0| = |9 - 6b_0| \leqq 6$, což dává dvě možnosti: $b_0 = 1$ nebo $b_0 = 2$.

Pro $b_0 = 1$ vyjde $|a_0| = 3$, a proto $|a_1| \leqq 3$, tj. $b_1 = 0$, $a_1 = -2$. Pak ale musí být $|a_2| \leqq 2$, tj. $b_2 = 0$, $a_2 = -1$, a $|a_3| \leqq 1$, tj. $b_3 = \ldots = b_n = 0$. Dostáváme tak mnohočlen $x^3 - x^2 - 2x + 3$, který má součet absolutních hodnot koeficientů rovný 7.

Pro $b_0 = 2$ postupujeme analogicky a zjistíme, že žádný další mnohočlen s uvedenou vlastností neexistuje.

Poznámka. Pokud uvažujeme mnohočleny s libovolnými reálnými koeficienty, najdeme mnohočlen s menším součtem absolutních hodnot koeficientů. Např. mnohočlen $f(x) = \frac{1}{11}(13x^3 - 23x^2 + 21)$, který dostaneme pro $k = \frac{13}{11}$, má příslušný součet $\frac{57}{11} < 7$.

A – I – 6

Hodnoty funkce f jsou jednoznačně určeny v bodech tvaru $\frac{k}{2^n}$ $(0 \leqq k \leqq 2^n)$. Protože

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8},$$

je

$$f\left(\frac{1}{7}\right) = f\left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) = \frac{2}{3} f\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{3} f\left(\frac{1}{4}\right).$$

Přitom z daného vzorce pro $x = 0$ indukcí snadno vypočteme, že pro libovolné $y \in \langle 0, 1\rangle$ a $n \geqq 0$ platí

$$f\left(\frac{y}{2^n}\right) = 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^n} f(y) \quad \text{a speciálně} \quad f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 1,$$

takže pro $f(\frac{1}{7})$ dostaneme vztah

$$f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} f\left(\frac{1}{7}\right)\right) + \frac{1}{3},$$

odkud vychází $f(\frac{1}{7}) = 1$.

A – S – 1

Jednoduchou úpravou dostaneme ekvivalentní nerovnost (čísla a, b, c jsou dle předpokladu kladná)

$$\begin{aligned} &a(a+c)(a+b) + b(b+c)(a+b) + c(b+c)(a+c) = \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3abc + a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) < \\ &< 2\big(a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc\big), \end{aligned}$$

neboli

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)-a^3-b^3-c^3+abc=$$
$$=a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)+abc>0,$$

která pro čísla splňující trojúhelníkovou nerovnost zřejmě platí.

A – S – 2

Uvažujme množinu $\mathbb{Z}_k$ zbytkových tříd mod k. Každý mnohočlen x^a představuje pro dané a přirozené zobrazení $\mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}_k$, ale takových zobrazení mezi dvěma konečnými množinami existuje jen konečně mnoho. Proto jistě existují dvě různá čísla $a > b$ taková, že

$$x^a \equiv x^b \pmod{k}$$

pro všechna celá čísla x. Je jasné, že mnohočlen $p(x) = x^a - x^b$ má požadovanou vlastnost.

Jiné řešení. Tvrzení můžeme také odvodit pomocí Eulerovy věty, která říká, že pro každé x nesoudělné s k platí $x^{\varphi(k)}-1 \equiv 0 \pmod{k}$, kde $\varphi(k)$ označuje počet přirozených čísel nejvýše rovných k a nesoudělných s k. Pro x soudělné s k uvažujme rozklad $k = k_1k_2$ čísla k takový, že k_1 je s x nesoudělné a k_2 obsahuje ve svém rozkladu na prvočinitele jen ta prvočísla, která dělí x. Protože funkce φ je multiplikativní, tedy $\varphi(k) = \varphi(k_1)\varphi(k_2)$, vidíme, že podle Eulerovy věty

$$x^{\varphi(k)} = \left(x^{\varphi(k_1)}\right)^{\varphi(k_2)} \equiv 1 \pmod{k_1},$$

takže stačí vzít $p(x) = x^{m(k)}\left(x^{\varphi(k)} - 1\right)$, kde $m(k)$ je nejvyšší exponent v prvočíselném rozkladu čísla k. Potom máme zaručeno, že $x^{m(k)}$ bude dělitelno číslem k_2, takže součin $x^{m(k)}\left(x^{\varphi(k)} - 1\right)$ je pak dělitelný součinem $k = k_1 k_2$. Můžeme tedy vzít $a = m(k) + \varphi(k)$, $b = m(k)$.

A – S – 3

Pro objem V daného čtyřstěnu $ABCD$ platí

$$V = \frac{1}{6}\,abc = \frac{1}{3}\,Sv, \tag{1}$$

kde S je obsah stěny ABC a v příslušná výška. Obsah S snadno spočteme podle Heronova vzorce, protože délky stran trojúhelníku ABC umíme vyjádřit pomocí a, b, c použitím Pythagorovy věty. Je tedy

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{4}\sqrt{\left(\left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2}\right)^2 - (a^2+c^2)\right)}\cdot \\
&\quad \cdot\sqrt{\left(a^2+c^2 - \left(\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{b^2+c^2}\right)^2\right)} = \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\left(2b^2 + 2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}\right)}\cdot \\
&\quad \cdot\sqrt{\left(2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2} - 2b^2\right)} = \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.
\end{aligned}$$

Ze vztahu (1) pro výšku v plyne

$$v = \frac{1}{2}\cdot\frac{abc}{S} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}}.$$

(Tento vzorec můžeme ovšem snadno získat přímo ze vzorce pro vzdálenost bodu D od roviny ABC, který známe z analytické geometrie prostoru.)

Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^3 \geqq \frac{3^3}{a^2b^2c^2},$$

tj.

$$abc \geqq \frac{3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right)^3},$$

dává odhad

$$V=\frac{1}{6}abc \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}v^3$$

s rovností právě jen pro $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}$, tj. pro $a=b=c$. Tím je důkaz hotov.

A – II – 1

Součin $(pq)!$ napíšeme jako

$$\begin{aligned}(pq)! = (1\cdot 2\cdot\ldots\cdot p)\big((p+1)(p+2)\cdot\ldots\cdot(p+p)\big)\cdot\ldots\cdot\\ \cdot\big((q-1)p+1)\big)\big((q-1)p+2\big)\ldots\big((q-1)p+p\big),\end{aligned}$$

přičemž součin v k-té závorce napravo $(0 \leqq k \leqq q-1)$ můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned}&(kp+1)(kp+2)\ldots(kp+p) =\\ &= (\underbrace{p+\ldots+p}_{k}+1)(\underbrace{p+\ldots+p}_{k}+2)\ldots(\underbrace{p+\ldots+p}_{k}+p).\end{aligned}$$

Po „roznásobení" všech závorek dostaneme $(k+1)^p$ sčítanců vesměs nejméně rovných $p!$. Je tedy

$$(kp+1)(kp+2)\dots(kp+p) \geqq (k+1)^p p!,$$

a

$$(pq)! \geqq 1^p p! \cdot 2^p p! \cdot \ldots \cdot q^p p! = (p!)^q (q!)^p .$$

Jiné řešení. Dokážeme nerovnost matematickou indukcí. Pro $p=1$ nerovnost triviálně platí pro libovolné přirozené číslo q. Předpokládejme, že uvažovaná nerovnost platí pro nějaké p přirozené a libovolné q. Potom je

$$\begin{aligned}\big((p+1)q\big)! = (pq+q)! &\geqq \\ &\geqq (p!)^q (q!)^p (pq+1)(pq+2)\dots(pq+q) \geqq \\ &\geqq (p!)^q (q!)^p (p+1)(2p+2)\dots(qp+q) = \\ &= (p!)^q (p+1)^q (q!)^{p+1} = \big((p+1)!\big)^q (q!)^{p+1} .\end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov.

Jiné řešení (podle Jiřího Fialy, G Liberec). Předpokládejme, že uvažovaná nerovnost platí pro nějaké p přirozené a libovolné q. Uvažujme tabulku $k \times q$. Je zřejmé, že počet k^q všech q-prvkových podmnožin, jež obsahují z každého z k sloupců tabulky právě jeden prvek, není menší než počet $\binom{kq}{q}$ všech q-prvkových podmnožin prvků tabulky. Pro $k = p+1$ tak dostáváme nerovnost $\big((p+1)q\big)! \geqq (p+1)^q q!(pq)!$. Podle indukčního předpokladu odtud plyne

$$\begin{aligned}\big((p+1)q\big)! \geqq (pq)!(p+1)^q q! &\geqq \\ &\geqq (p!)^q (q!)^p (p+1)^q q! = \big((p+1)!\big)^q (q!)^{p+1} .\end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov.

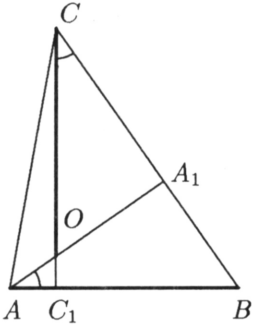
Jiné řešení (podle Oldřicha Audy, G, tř. kpt. Jaroše, Brno). Uvažujme tabulku $p \times q$ vyplněnou čísly $1, 2, \ldots, pq$. Mezi všemi takovými uspořádáními je právě $(p!)^q$ těch, které se od základního pořadí liší jen pořadím v jednotlivých řádcích, a právě $(q!)^p$ těch, jež se od základního pořadí liší jen pořadím čísel v jednotlivých sloupcích uvažované tabulky.

Uvažujme nyní všechny permutace čísel $1, 2, \ldots, pq$, jež vzniknou složením obou druhů permutací. (Je-li na k-tém místě jednoho pořadí číslo m $(1 \leqq m \leqq pq)$ a na m-tém místě druhého pořadí číslo n, bude na k-tém místě nové tabulky, odpovídající složení obou permutací, číslo n.) Počet všech permutací, jež takto dostaneme, je $(p!)^q(q!)^p$ a je nejvýše roven počtu všech různých uspořádání pq čísel v tabulce, kterých je $(pq)!$.

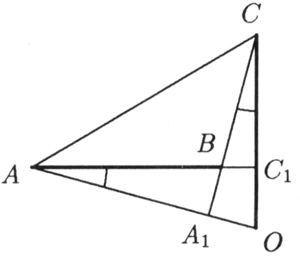
A – II – 2

Předpokládejme nejprve, že úhel ACB při vrcholu C je ostrý, a označme A_1, C_1 paty příslušných výšek. Protože (obr. 22) $|\sphericalangle A_1AB| = 90° - |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle C_1CB|$, jsou pravoúhlé trojúhelníky ABA_1 a COA_1 shodné, takže $|A_1A| = |A_1C|$ a trojúhelník AA_1C je rovnoramenný. Proto má úhel ACB velikost 45°.

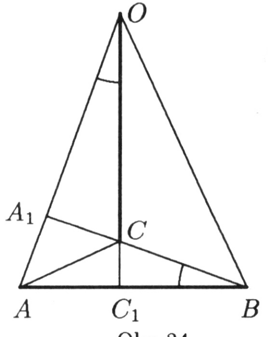
V tupoúhlém trojúhelníku ABC (s tupým úhlem při vrcholu B — případ tupého úhlu při vrcholu A dostaneme jednoduchou záměnou označení A a B) dostaneme obdobně (obr. 23) $|\sphericalangle A_1AB| = 90° - |\sphericalangle AOC| = |\sphericalangle C_1CB|$, takže znovu vychází, že úhel ACB má velikost 45°.



Obr. 22



Obr. 23



Obr. 24

Pokud úhel ACB je tupý (obr. 24), vyjde zase, že trojúhelníky ABA_1 a COA_1 jsou shodné, takže trojúhelník ACA_1 je rovnoramenný. Odtud plyne, že úhel ACB má velikost $135°$.

Konečně snadno ověříme, že pokud úhel ACB je pravý, nemohou být předpoklady úlohy splněny.

A - II - 3

Z čísel $x-1$, x, $x+1$, $x+2$ jsou dvě sudá a z nich aspoň jedno je dělitelné čtyřmi, takže součin $(x-1)x(x+1)(x+2)$ je dělitelný osmi. Odtud plyne, že pro $n=4$ je

$$x^4+2x^3-x^2-2x \equiv 0 \pmod 8.$$

Předpokládejme, že existuje mnohočlen třetího stupně, pro který platí

$$x^3+ax^2+bx+c \equiv 0 \pmod 8.$$

Pro $x \equiv 0$ pak vychází $c \equiv 0 \pmod 8$ a dosazením $x \equiv \pm 1 \pmod 8$ dostaneme dvě kongruence

$$1+a+b \equiv 0 \pmod 8,$$
$$-1+a-b \equiv 0 \pmod 8.$$

Jejich odečtením vyjde

$$2(1+b) \equiv 0 \pmod 8,$$

což dává $b \equiv -1 \pmod 4$, a jejich sečtením dostaneme $a \equiv$ $\equiv 0 \pmod 4$, zatímco pro $x \equiv 2 \pmod 8$ vyjde podmínka $4a+2b \equiv 0 \pmod 8$, neboli $b \equiv 0 \pmod 4$. To je ovšem ve sporu s předchozím výsledkem $b \equiv -1 \pmod 4$. Úplně stejně dokážeme, že neexistuje ani kvadratický nebo lineární mnohočlen, který by úloze vyhovoval.

Poznámka. Jestliže $8 \mid p(x)$ pro každé celé x, je osmi dělitelná i n-tá diference mnohočlenu p, tj. součet

$$p(x+n)-\binom{n}{1}p(x+n-1)+\binom{n}{2}p(x+n-2)+\ldots+$$
$$+(-1)^n p(x)=n!.$$

Odtud plyne, že $8 \mid n!$, tj. $n \geqq 4$.

A – II – 4

Z multiplikativní vlastnosti uvažované funkce f plyne, že je $f(30) = f(2)f(3)f(5)$. Nejdříve určíme hodnotu $f(3)$.

Díky monotonii funkce f platí

$$f(8) = 4^3 = 64 < f(9) = (f(3))^2, \quad \text{tj.} \quad 8 < f(3),$$

a dále

$$f(243) = (f(3))^5 < f(256) = 4^8 = 65\,536 < 10^5,$$

což dává $f(3) < 10$, musí tedy být $f(3) = 9$.

Podobně pro hodnotu $f(5)$ platí

$$f(24) = 9 \cdot 4^3 = 24^2 < f(25) = (f(5))^2, \quad \text{tj.} \quad 24 < f(5),$$

a

$$f(125) = (f(5))^3 < f(128) = 4^7 = 16\,384 < 17\,576 = 26^3,$$

takže vychází $24 < f(5) < 26$ a $f(5) = 25$.

Je tedy $f(30) = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$.

Jiné řešení (podle Jakuba Těšínského, G, Korunní, Praha). Zřejmě je $f(1) = 1$. Předpokládejme, že není $f(x) = x^2$, a označme x_0 nejmenší přirozené číslo, pro které existuje číslo q takové, že $f(x_0) = q < x_0^2$. Pak v intervalu $(\log_4 q, \log_4 x_0^2)$ existuje racionální číslo $\frac{m}{n}$, tj.

$$q^n < 4^m < x_0^{2n},$$

neboli

$$2^m < x_0^n.$$

Z vlastností funkce f plyne, že

$$f(x_0^n) = \big(f(x_0)\big)^n = q^n < 4^m = f(2)^m = f(2^m),$$

což odporuje předpokladu, že funkce f je rostoucí. Podobně dojdeme ke sporu, předpokládáme-li, že existuje přirozené číslo x_0, pro které $f(x_0) > x_0^2$. Je tedy $f(x) = x^2$ pro každé přirozené číslo x a $f(30) = 30^2 = 900$.

A - III - 1

Použitím známých vztahů mezi trigonometrickými funkcemi postupně dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(p-r)^2+q^2} \geqq \\
&\qquad \geqq p + r - 2(p\cos^2\varphi + q\sin\varphi\cos\varphi + r\sin^2\varphi) = \\
&\qquad = p - r - 2(p-r)\cos^2\varphi - q\sin 2\varphi = \\
&\qquad = (p-r)(1-2\cos^2\varphi) - q\sin 2\varphi = \\
&\qquad = -(p-r)\cos 2\varphi - q\sin 2\varphi,
\end{aligned}$$

která je vlastně snadným důsledkem Cauchyovy nerovnosti

$$\begin{aligned}
&-(p-r)\cos 2\varphi - q\sin 2\varphi \leqq \\
&\qquad\qquad \leqq \sqrt{(p-r)^2+q^2}\sqrt{\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi},
\end{aligned}$$

neboť $\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi = 1$.

A – III – 2

Předpokládejme, že příslušný mnohoúhelník je rozdělen na trojúhelníky s vrcholy ve vrcholech daného mnohoúhelníku (existence takovéto triangulace byla dokázána v úloze A–I–4), a očíslujme všechny vrcholy čísly 1, 2, 3 tak, aby každý z trojúhelníků triangulace obsahoval ve svých vrcholech každé z těchto čísel.

To lze udělat v každém n-úhelníku. Pro $n = 3$ to je zřejmé; pokud to jde udělat v k-úhelníku pro libovolné $k < n$, pak stačí uvažovaný n-úhelník rozdělit jednou ze stran zvolené triangulace na dva (triangulované) mnohoúhelníky, pro které podle indukčního předpokladu takové očíslování existuje. Nyní stačí v jednom z mnohoúhelníků očíslování změnit tak, aby se čísla v obou společných vrcholech shodovala. Dostaneme tak požadované očíslování všech vrcholů daného n-úhelníku.

Vezmeme-li takovéto očíslování v uvažovaném $3n$-úhelníku, vyskytne se jedno z čísel 1, 2, 3 nejvýše n-krát. Rozestavením hlídačů v těchto vrcholech budou podmínky úlohy splněny.

A – III – 3

Nerovnost dokážeme matematickou indukcí podle počtu inverzí v permutaci.

Tvrzení zřejmě platí, jestliže $i(p) = 0$, potom je p identická permutace, takže i $d(p) = 0$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každou permutaci s počtem inverzí $i(p) \leqq k$, a uvažujme permutaci p_0, která má $i(p_0) = k + 1$ inverzí. Protože p_0 není identická permutace, určitě existuje index

i takový, že $p_0(i) > p_0(i+1)$. Utvořme novou permutaci p', která bude mít o jednu inverzi méně: stačí položit $p'(i) = p_0(i+1)$, $p'(i+1) = p_0(i)$ a $p'(j) = p_0(j)$ pro všechna ostatní j, $i \neq j \neq i+1$. Potom $i(p') = k$ a podle indukčního předpokladu i $d(p') \leqq i(p') = 2k$.

Jednoduchým výpočtem dostáváme

$$
\begin{aligned}
d(p_0) - d(p') = {} & |p_0(i) - i| + |p_0(i+1) - i - 1| - \\
& - |p'(i) - i| - |p'(i+1) - i - 1| = \\
= {} & |p_0(i) - i| + |p_0(i+1) - i - 1| - \\
& - |p_0(i+1) - i| - |p_0(i) - i - 1| = \\
= {} & \big(|p_0(i) - i| - |p_0(i) - (i+1)|\big) + \\
& + \big(|p_0(i+1) - (i+1)| - |p_0(i+1) - i|\big) \leqq \\
\leqq {} & 2
\end{aligned}
$$

(s rovností právě jen pro $p_0(i+1) \leqq i < p_0(i)$), takže je

$$d(p_0) \leqq d(p') + 2 \leqq 2(k+1) = 2i(p_0).$$

A - III - 4

Pro vzdálenost d bodu C od osy úsečky AB platí

$$d = \frac{c}{2} - b\cos\alpha = \frac{c}{2} - b\cos 2\beta$$

(to platí i pro tupý úhel β). Zároveň z předpokladu $\alpha = 2\beta$ plyne podle sinové věty rovnost

$$
\begin{aligned}
c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{b\sin 3\beta}{\sin\beta} = b(3\cos^2\beta - \sin^2\beta) = \\
= b(4\cos^2\beta - 1),
\end{aligned}
$$

takže

$$d = \frac{b}{2}(4\cos^2\beta - 1) - b(2\cos^2\beta - 1) = \frac{b}{2}.$$

To znamená, že obě uvedené vzdálenosti jsou v poměru $b : d = 2$.

A – III – 5

Označme M množinu všech členů uvažované skupiny matematiků a n jejich počet. Dále označme $\mathsf{F}(m)$ množinu všech přátel matematika m a $f(m)$ jejich počet. Máme dokázat, že existuje matematik m_0, pro kterého platí

$$\frac{1}{f(m_0)} \sum_{m \in \mathsf{F}(m_0)} f(m) \geqq \frac{1}{n} \sum_{m \in \mathsf{M}} f(m).$$

Předpokládejme naopak, že pro žádného z členů skupiny taková nerovnost neplatí, tedy že pro každé m_0 z M je

$$n \sum_{m \in \mathsf{F}(m_0)} f(m) < f(m_0) \sum_{m \in \mathsf{M}} f(m).$$

Každý z matematiků $m \in \mathsf{M}$ se pro dané m_0 vyskytuje celkem v $f(m)$ množinách $\mathsf{F}(m_0)$, takže sečteme-li uvedené nerovnosti pro všechna $m_0 \in \mathsf{M}$, dostaneme

$$n \sum_{m \in \mathsf{M}} f(m)^2 < \Bigl(\sum_{m \in \mathsf{M}} f(m)\Bigr)^2.$$

To ale odporuje známé Cauchyově nerovnosti. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

A - III - 6

Zřejmě můžeme předpokládat, že dané množiny jsou navzájem disjunktní. Jestliže A_1 nemá požadovanou vlastnost, můžeme pro libovolné přirozené číslo m najít $k_1 > 0$ takové, že každých k_1 čísel $a_1 < a_2 < \ldots < a_{k_1}$ z množiny A_1 obsahuje mezeru m po sobě jdoucích čísel, která do ní nepatří $(a_{j+1} - a_j > m)$. Odtud plyne, že doplněk množiny A_1 v $\mathbb{N}$, tj. sjednocení množin $A_2 \cup A_3$, obsahuje libovolně dlouhou posloupnost po sobě jdoucích čísel.

Předpokládejme, že ani množina A_2 nemá požadovanou vlastnost. Pak tedy existuje $k_2 > 0$ takové, že každých k_2 čísel $a_1 < a_2 < \ldots < a_{k_2}$ z A_2 obsahuje mezeru m po sobě jdoucích čísel, které do ní nepatří. Podle předcházející úvahy v množině $A_2 \cup A_3$ existuje $k_2 m$ po sobě jdoucích čísel; pokud k_2 z nich patří do množiny A_2, obsahuje taková k_2-tice mezeru nejméně m po sobě jdoucích čísel, která leží v A_3. Je-li naopak jen nejvýše $k_2 - 1$ z nich z množiny A_2, rozdělí tato čísla vybraných $k_2 m$ čísel na nejvýše k_2 intervalů, z nichž aspoň jeden obsahuje nejméně m po sobě jdoucích čísel z A_3. To ovšem znamená, že i v takovém případě množina A_3 obsahuje libovolně dlouhou posloupnost po sobě jdoucích čísel. Pak ale množina A_3 má požadovanou vlastnost dokonce pro $m = 1$.