40. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategória Z5

In: Milan Koman (editor); Jiří Binder (editor); Vladimír Repáš (editor): 40. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1990/1991. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1993. pp. 84–99.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404946

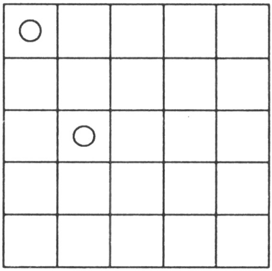
Kategória Z5

ÚLOHY I. KOLA

(Riešenia úloh na str. 88)

Z5 – I – 1

Na šachovnici 5×5 sú už položené dve figúrky (obr. 41). Na šachovnicu budeme klásť ďalšie figúrky, ale tak, aby žiadne dve figúrky nestáli na susedných poliach (t. j. poliach so spoločnou stranou). Figúrky kladieme dovtedy, kým je možné umiestniť ďalšiu figúrku. Koľko najmenej a koľko najviac figúrok môže byť na šachovnici?



Obr. 41

Z5 – I – 2

Hviezdičky nahraďte číslicami tak, aby platilo naznačené násobenie.

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & * & * \\
\cdot & & * & 7 \\
\hline
 & 2 & 2 & * \\
* & * & * & \\
\hline
* & * & 2 & *
\end{array}
$$

Z5 – I – 3

Ktorých trojciferných čísel je viac? Tých, ktoré pri delení číslom 7 dávajú zvyšok 3, alebo tých, ktoré dávajú pri delení číslom 7 zvyšok 6. O koľko?

Z5 – I – 4

Na obrázku 42 je 5 bodov. Podľa toho, ako ich spojíme, dostaneme rôzne päťuholníky. Nájdite aspoň 8 riešení. Môže mať úloha 10 riešení?

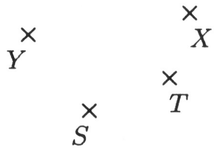
Obr. 42

Z5 – I – 5

Štyria chlapci majú spolu 157 guľôčok. Každý z nich, okrem najmladšieho, má o 5 guľôčok menej, ako majú jeho mladší kamaráti spolu. Koľko guľôčok má každý chlapec?

Z5 – I – 6

Dané sú štyri body S, T, X, Y (obr. 43). Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C, ak viete, že body X, Y ležia na priamke BC, bod S leží na priamke AC, bod T leží na priamke AB a dĺžka strany BC je 4 cm.



Obr. 43

ÚLOHY II. KOLA

(Riešenia úloh na str. 98)

Z5 – II – 1

Jurko si na krajčírskom metri (150 cm) vyfarbil všetky čísla deliteľné 5, ktoré neboli deliteľné 3.

Miško si na svojom krajčírskom metri vyfarbil všetky čísla, ktoré pri delení siedmymi dávajú zvyšok 6.

Kto z nich vyfarbil viac čísel?

Z5 – II – 2

Hviezdičky nahraďte číslicami tak, aby platilo naznačené násobenie

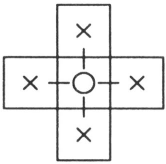
$$\begin{array}{r} ** \\ \cdot \quad *9 \\ \hline 11* \\ *** \\ \hline **5* \end{array}$$

Z5 – II – 3

Danka si z plastikových obalov vystrihla dva štvorce s obsahmi 16 cm^2 a 36 cm^2. Preložila ich cez seba tak, že sa prekrývali v štvorci. Vzniknutý osemuholník mal o 20 cm väčší obvod ako obvod štvorca, ktorý vznikol prekrytím. Určite rozmer prekrytého štvorca.

Riešenie úlohy Z5–I–1 (str. 84)

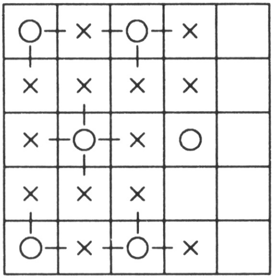
Ak je vnútri šachovnice jedna figúrka, tak ďalšiu nemôžeme položiť na políčka vedľa nej — teda táto figúrka „obsadzuje" akýsi päťpolíčkový kríž (obr. 44).



Obr. 44

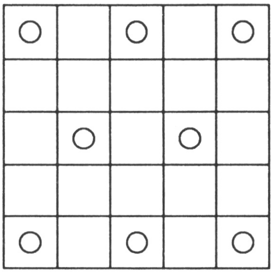
Figúrky označujeme O a políčka, na ktoré už nemôžeme klásť ďalšie figúrky, ×. Takže každá figúrka obsadzuje najviac 5 miest — kde stojí plus najviac štyri okolo.

Na šachovnici by bolo najmenej figúrok, ak by sa nám podarilo pokryť celú šachovnicu neprekrývajúcimi sa krížmi. To sa nám nemôže podariť (skúste si to). Pokúšame sa teda pokrývať šachovnicu tak, aby bolo čo najmenej prekrývajúcich sa obsadených miest. Takéto optimálne pokrytie je na obr. 45.



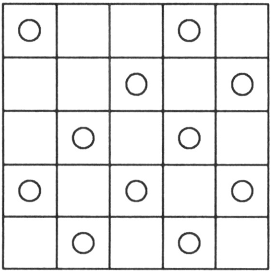
Obr. 45

Tomu odpovedá riešenie (obr. 46):



Obr. 46

Ak chceme na šachovnicu umiestniť čo najviac figúriek, musíme ich umiestňovať tak, aby sa obsadzované políčka čo najviac prekrývali. Teda kladieme ich na všetky „biele“, resp. „čierne“ políčka. Tomu odpovedá riešenie na obr. 47.



Obr. 47

Na šachovnicu môžme za daných podmienok položiť najmenej 8, najviac 11 figúrok.

Pomocná úloha

Riešte túto úlohu na prázdnej šachovnici.

Riešenie úlohy Z5–I–2 (str. 85)

Ak z tohto súčinu vyberieme násobenie 7, dostaneme:

$$\begin{array}{r} * * \\ \cdot \quad 7 \\ \hline 2\,2\,* \end{array}$$

To ale znamená, že číslo 22$*$ musí byť deliteľné číslom 7. Vyskúšaním zistíme, že vyhovuje jedine číslo 224, lebo $224 = 32 \cdot 7$. Po dosadení do zadania dostávame:

$$\begin{array}{r} 3\,2 \\ \cdot \quad * 7 \\ \hline 2\,2\,4 \\ * * \bullet \\ \hline * * 2\,4 \end{array}$$

Zrejme na mieste • musí byť 0. Potom ale * v druhom činiteli (pri 7) musí byť 5, lebo je to jediná nenulová cifra, ktorá po násobení 2 dáva číslo končiace nulou. Z toho už je zrejmé riešenie:

$$\begin{array}{r} 32 \\ \cdot\ 57 \\ \hline 224 \\ 160 \\ \hline 1824 \end{array}$$

Pomocné úlohy

Úlohy Z4-I-2 a Z5-II-2.

Riešenie úlohy Z5–I–3 (str. 85)

Vypíšeme si niekoľko najmenších a najväčších čísel z oboch skupín: Pri delení siedmymi dávajú

zvyšok 3: 101, 108, 115, 122, , 976, 983, 990, 997

zvyšok 6: 104, 111, 118, 125, , 979, 986, 993.

1. riešenie. Vidíme, že po čísle jednej skupiny veľkosťou nasleduje vždy číslo druhej skupiny (je o tri väčšie). Teda trojciferných čísel, ktoré pri delení siedmymi dávajú zvyšok 3, je o jedno viac ako trojciferných čísel, ktoré pri delení siedmymi dávajú zvyšok 6.

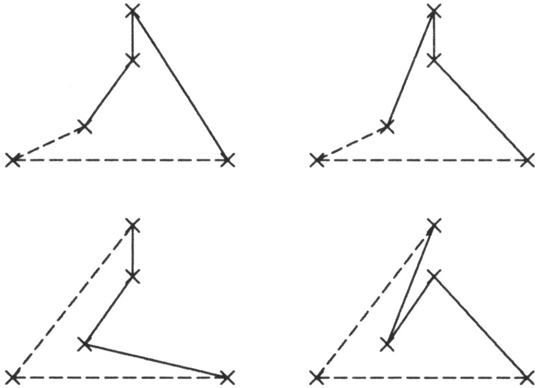
2. riešenie. Najmenšie trojciferné číslo, ktoré pri delení siedmymi dáva zvyšok 3, je 101, najväčšie je číslo 997. Tieto čísla sú v poradí vždy o 7 väčšie, teda ich spolu je $(997 - 101) : 7 + 1$ (rozmyslite si prečo!), čo je 129. Podobne pri zvyšku 6 je najmenšie také číslo 104, najväčšie 993, teda takýchto čísel bude $(993 - 104) : 7 + 1 = 128$.

Pomocná úloha

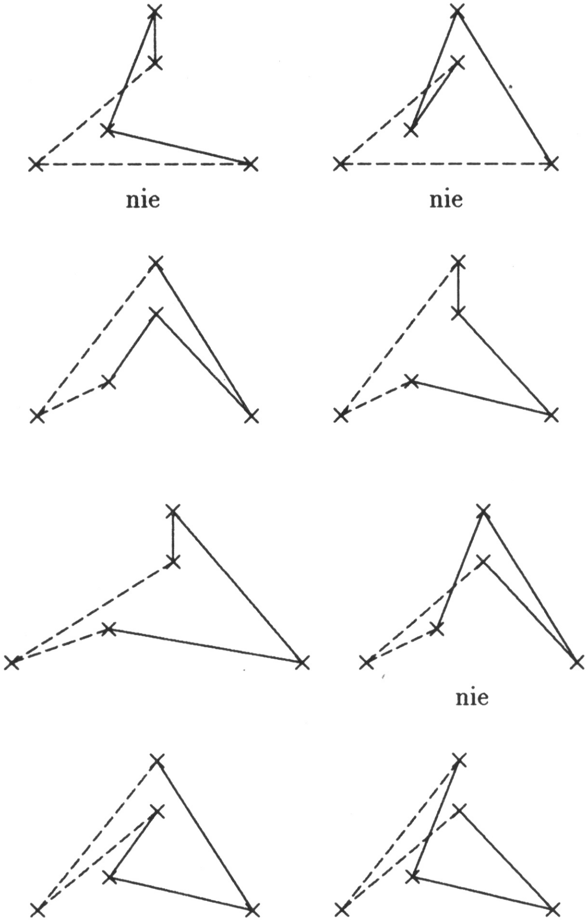
Koľko je čísel menších ako 1 000, ktoré sú deliteľné a) 2, b) 3, c) 7.

Riešenie úlohy Z5–I–4 (str. 85)

Úlohu riešime skusmo, ale aby sme mali istotu s odpoveďou na druhú otázku, musíme nájsť nejaký systém, ako budeme tvoriť päťuholníky. Napríklad z ľavého dolného bodu vychádzajú dve strany. Je práve 6 možností, ako tieto strany pôjdu. Potom už zostávajú len dva nespojené body. Tie môžme spojiť s koncovými bodmi vytvorenej (dvoj)lomenej čiary práve dvomi spôsobmi. Teda teoreticky by bolo 12 možností, ale niektoré z nich netvoria päťuholníky. Je teda práve 8 možností nájdenia päťuholníka, teda 10 takých päťuholníkov neexistuje. (Riešenie je na obr. 48a, 48b).



Obr. 48a



Obr. 48b

Pomocná úloha

Narysujte všetky päťuholníky, ktorých vrcholy sú v bodoch na obr. 49.

Obr. 49

Riešenie úlohy Z5–I–5 (str. 86)

Ak by mal najstarší chlapec o 5 guľôčok viac, mal by toľko ako ostatní spolu. Všetci by potom mali $157 + 5 = 162$ guľôčok, takže najstarší by mal $162 : 2 = 81$, avšak má o 5 menej, teda má 76 guľôčok.

Ak by mal druhý najstarší o 5 guľôčok viac, mal by rovnako ako dvaja mladší spolu, všetci traja by potom mali $81 + 5 = 86$ guľôčok, teda druhý najstarší by mal $86 : 2 = 43$ guľôčok, má však o 5 menej, teda má 38 guľôčok. Poslední dvaja teda majú spolu 43 guľôčok, starší z nich má o 5 guľôčok menej ako najmladší, teda má $(43 - 5) : 2 = 19$ guľôčok. Najmladší potom má 24 guľôčok.

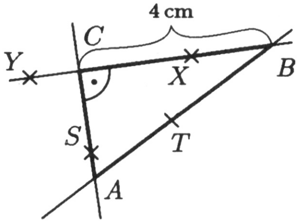
Chlapci majú v poradí od najstaršieho 76, 38, 19, 24 guľôčok.

Pomocná úloha

Úloha Z4 - I - 4.

Riešenie úlohy Z5–I–6 (str. 86)

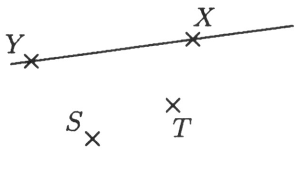
Načrtnime si obrázok, ako by úloha už bola vyriešená (obr. 50).



Obr. 50

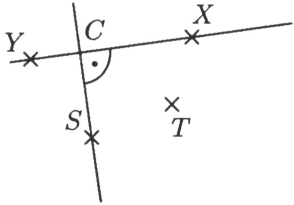
Ak sa pozrieme na obrázok, vidíme, že máme vlastne narysovať priamky, prechádzajúce nejako (podľa zadania) danými bodmi S, T, X, Y.

Budeme postupovať tak, že urobíme vždy to, čo vieme. Teda najskôr priamku prechádzajúcu bodmi X, Y (obr. 51).



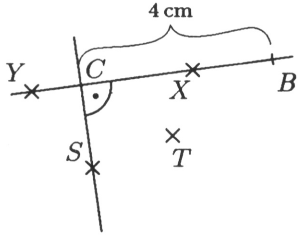
Obr. 51

Potom kolmicu na túto priamku prechádzajúcu bodom S. Priesečník týchto dvoch priamok je bod C (obr. 52).

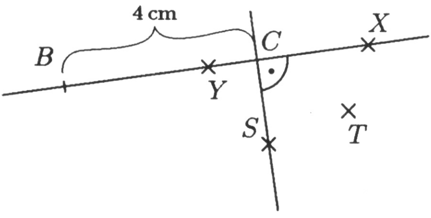


Obr. 52

Potom nanesieme na priamke 4 cm od bodu C (to môžme urobiť dvoma spôsobmi), dostaneme bod B (obr. 53a, b).

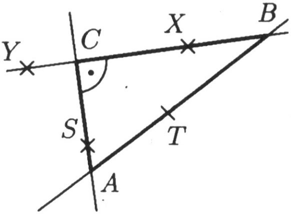


Obr. 53a

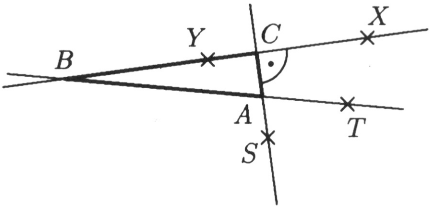


Obr. 53b

Teraz už len spojíme bod B s bodom T a vyznačíme bod A. Dostali sme pravoúhly trojuholník ABC (obr. 54a, b).



Obr. 54a



Obr. 54b

Úloha má dve riešenia.

Pomocná úloha

Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC, ak sú dané body A, X, Y tak, že bod X leží na priamke AB a Y leží na priamke BC.

Obr. 55

RIEŠENIA ÚLOH II. KOLA

Riešenie úlohy Z5–II–1 (str. 87)

Čísel deliteľných piatimi je $150 : 5 = 30$. Jurkovi nepočítame čísla deliteľná 3, teda čísla deliteľná číslom 15. Tých je 10. Spolu teda Jurko vyfarbí 20 čísel.

Miško vyfarbí všetky čísla, ktoré pri delení siedmymi dávajú zvyšok 6. Teda vyfarbí každé siedme číslo od čísla 6 po číslo 146 včítane. Takých čísel je $(146 - 6) : 7 + 1 = 21$. Takže Miško vyfarbí 21 čísel.

Miško vyfarbil viac čísel.

Riešenie úlohy Z5–II–2 (str. 87)

$$\begin{array}{r} \ast\ast \\ \cdot \quad \ast 9 \\ \hline 11\bullet \\ \ast\ast\ast \\ \hline \ast\ast 5 \ast \end{array}$$

• musí byť 7, lebo len 117 je deliteľné deviatimi. $117 : 9 = 13$, teda prvý činiteľ súčinu je 13.

$$\begin{array}{r} 13 \\ \cdot \quad \ast 9 \\ \hline 117 \\ \ast\ast\bullet \\ \hline \ast\ast 57 \end{array}$$

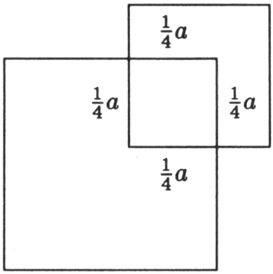
• je isto 4, teda cifra na mieste desiatok v druhom činiteli je 8.

$$\begin{array}{r} 13\\ \cdot\ \ {*}9\\ \hline 117\\ {*}{*}4\\ \hline {*}{*}57 \end{array}$$

Teraz už len dopočítame a zapíšeme vypočítané hodnoty na miesta hviezdičiek.

$$\begin{array}{r} 13\\ \cdot\ \ 89\\ \hline 117\\ 104\\ \hline 1157 \end{array}$$

Riešenie úlohy Z5–II–3 (str. 87)



Obr. 56

Obvod vzniknutého osemuholníka je $4 \cdot 4 + 4 \cdot 6 - a = 40 - - a$, kde a je obvod štvorca, ktorý vznikne prekrytím. Teda rozdiel obvodov je $40 - a - a = 40 - 2a$, čo je podľa zadania 20. Z toho $40 - 2a = 20$, $2a = 20$. Teda obvod štvorca je 10 cm. Strana štvorca je 2,5 cm.