40. ročník matematické olympiády na základních školách

Příloha

In: Milan Koman (editor); Jiří Binder (editor); Vladimír Repáš (editor): 40. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1990/1991. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1993. pp. 110–138.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404948

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘE A TÝMOVÉ SOUTĚŽE

Jako v předcházejících letech i ve školním roce 1990/91 se mnoho žáků základních škol zúčastnilo různých korespondenčních seminářů. Lze je rozdělit do dvou hlavních skupin. Jedna je určena starším žákům ze 7. a 8. ročníků, druhá mladším žákům ze 4. až 6. ročníků.

Účastníci korespondenčních seminářů dostávají k řešení zpravidla ve více kolech a sériích úlohy, jejichž řešení zasílají pořadatelům. Ti je po opravě bodují a zašlou zpět řešitelům i se vzorovými řešeními. Vítězové korespondenčních seminářů bývají zváni na několikadenní soustředění a letní tábory, na které se účastníci vždy velmi těší. Na těchto akcích přednáší žákům vybraní učitelé matematiky ze základních, středních i vysokých škol. Program většinou spojuje vážnou matematiku s matematikou zábavnou, se sportem a dalšími hrami.

Ve školním roce se konaly dále uvedené korespondenční semináře. Ze seminářů označených hvězdičkou přinášíme v dalším textu ukázky. Všem autorům děkujeme za zaslané úlohy a za svolení k publikování ukázek úloh.

* PIKOMAT	*Gym., Korunní, Praha*	J. Zhouf	6.-8. roč.
* PIKOMAT	*ODDM, Kutná Hora*	K. Blažek	6.-8. roč.
KOVBOJ	*ODDM, Kutná Hora*	K. Blažek	4.-5. roč.
* PIKOMAT	*PF, České Budějovice*	P. Sokol	7.-8. roč.
PIKOMAT	*Gym., Kralupy*	J. Šimánek	4. roč.
PIKOMAT	*ZŠ, Plzeň*	S. Mrviková	4. roč.
* PIKOMAT	*Gym., Hradec Králové*	M .Kynterová a M. Tichý	7.-8. roč.
PIKOMAT	*PF, Hradec Králové*	E. Krejčová	4. roč.
PIKOMAT	*ODDM, Jihlava*	M. Krejčová	6.-8. roč.
* PIKOMAT	*OOPS, Svitavy*	H. Lišková	6.-8. roč.
* KOKOS	*Gym., Bílovec*	P. Kačenka a A. Kuběna	6.-8. roč.
* KOUMES	*Opava*	P. Czudek a L. Hozová	4. roč.
PIKOMAT	*OPS, Frýdek-Místek*	Z. Bachelová	4.-5. roč.
* PIKOMAT	*Iuventa, Bratislava*	P. Černek	7.-8. roč.
KOMINÁR	*Iuventa, Bratislava*	I. Vojtela	4.-6. roč.
PIKOMAT	*MFF KU, Bratislava*		7.-8. roč.
* KOVBOJ	*PF, Banská Bystrica*	B. Sivák	5.-8. roč.
PIKOMAT	*Gym., Považská Bystrica*	I. Bartko	7.-8. roč.
SPIKOMA	*TVŠDS, Žilina*	H. Bachratý	6.-8. roč.
PIKOMAT	*Gym., Dolný Kubín*	Š. Jány	6.-8. roč.
PIKOMAT	*PF, Přerov*	J. Duplák	
* MATIK	*PřF UPJŠ, Košice*	B. Vavrinčiková	7.-8. roč.
MALINÁR	*Gym., Šmerdova, Košice*		5.-6. roč.

Kromě korespondenčních seminářů se konaly dvě týmové soutěže pro čtyřčlenná družstva žáků 6. ročníků, obě pod společným názvem „Dejte hlavy dohromady“ (DHV).

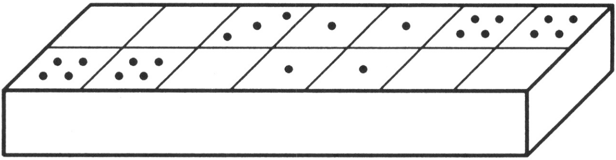
* DHV	*PO JČMF, Praha*	M. Koman	6. roč.
* DHV	*OPS Opava*	L. Hozová	6. roč.

Praha

Gymnázium v Praze 2, Korunní 2, pořádalo již čtvrtým rokem pod vedením dr. Jaroslava Zhoufa korespondenční seminář PIKOMAT pro žáky 7. a 8. ročníků. Soutěže se zúčastnilo 178 žáků, kteří v 5 kolech řešili celkem 30 úloh. V letošním roce, na rozdíl od předcházejících ročníků, se z finančních důvodů nepodařilo uskutečnit závěrečné soustředění.

Jako ukázku uvedeme úkoly 2. série.

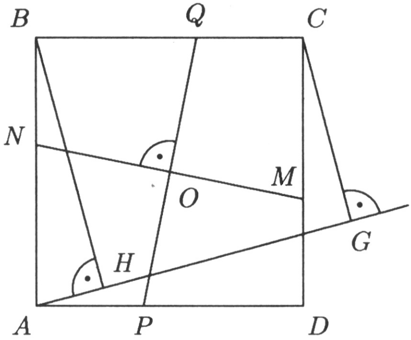
1. Na obrázku 63 je vidět plná krabička domina. Jak jsou rozděleny hrací kameny ve svrchní vrstvě?



Obr. 63

2. Gulliver se během svého pobytu v Laputě zabýval (mimo jiná dobrodružství) i finančním systémem země. Dozvěděl se, že se zde používají jedno-, dvou- a čtyřlaptiové mince, všechny z čistého zlata. Mince jsou kulaté a navíc mají tuto vlastnost: Položíme-li jednolaptii na dvoulaptii tak, aby její okraj procházel středem dvoulaptie, pak průsečíky okrajů mincí leží na průměru jednolaptie. Podobnou vlastnost mají i dvoulaptie a čtyřlaptie. Gulliver dále zjistil, že hmotnosti mincí jsou ve stejném poměru jako jejich hodnoty. Tloušťka jednolaptie je 1 mm. Určete tloušťku ostatních laputských mincí.

3. Na obrázku 64 byl nejdříve sestrojen čtverec $ABCD$ a pak zbylé čáry. Dokažte, že čtyřúhelníky $APON$ a $CQOM$ mají stejný součet obvodů jako čtyřúhelníky $BNOQ$ a $DMOP$.



Obr. 64

4. Vypočtěte (obr. 64) obsah čtyřúhelníku $ABCG$ z úlohy 3, víte-li, že se délka BH rovná 1.

5. Dokažte, že z libovolných 52 celých čísel je možno vybrat 2 tak, že jejich součet nebo rozdíl je dělitelný stem.

6. Dokažte, že výšky libovolného trojúhelníku se protínají v jednom bodě.

Kutná Hora

Obvodní dům dětí a mládeže v Kutné Hoře pořádal pod vedením Karla Blažka 6. ročník korespondenčního semináře s názvem PIKOMAT pro žáky 6. až 8. ročníků ZŠ a 1. ročník korespondenčního víceboje s názvem KOVBOJ pro žáky 4. a 5. ročníků ZŠ.

Pikomatu se zúčastnilo 65 soutěžících ve 4 kolech po 4 úlohách. Pro nejlepší řešitele byl uspořádán letní tábor ve Vrbně pod Pradědem. Tábor byl pořádán společně i pro úspěšné řešitele korespondenčního semináře KOKOS (viz str. 120). Tábor byl 14denní a zúčastnilo se ho 43 řešitelů.

Korespondenční víceboj KOVBOJ měl 5 kol po 4 úlohách. Zúčastnilo se 50 řešitelů, z nich bylo 36 vybráno na týdenní soustředění v únoru 1991 v Hraběticích v Jizerských horách.

Ukázka úloh ze 4. kola PIKOMATU

Podobně jako v předcházejících třech kolech se i ve 4. kole čerpaly úlohy a náměty z příhod odehrávajících se v pohádkové zemi Pikolandu. Jedním z hrdinů byl Pikomatek, což byl hrdinný rytíř a pozdější král Pikolandu.

Na počest Pikomatkova vítězství nad drakem (příhoda ze 3. kola) se pořádala v zemi řada soutěží a turnajů.

1. V soutěži ve sběru kokosových ořechů došlo ke kuriózní situaci. Majitelé kokosových plantáží poslali do soutěže několik cvičených opic. Každá opice utrhla stejný počet kokosových ořechů. Na zpáteční cestě se však opice pohádaly a každá hodila po každé právě jeden ořech. Zbytek ořechů přinesly do cíle, bylo jich dohromady 33.

S jakou největší ztrátou ořechů (tedy ořechů, které po sobě opice rozházely) musí pořadatelé počítat? (Nepředpokládáme, že by se tyto ořechy našly. Počet ořechů, které může opice najednou snést se stromu, není znám a není nijak omezen). Svou odpověď zdůvodněte.

Největší pozornosti se však těšil matematický turnaj, kterého se zúčastnil i Pikomatko, aby dokázal, že bude králem na svém místě. Jistě vás budou zajímat úlohy z tohoto turnaje:

2. Vezměte si papír a tužku a napište za sebou, kolik chcete přirozených čísel. Musí být ale taková, že když sečtu libovolných 17 po sobě jdoucích čísel, výsledek bude sudé číslo. A když sečtu libovolných 18 po sobě jdoucích čísel, výsledek bude liché číslo. Kolik čísel nejvíce mohu takto napsat?

3. Když jsem ještě chodil do školy, trvala mi cesta z domova do školy 20 minut. Jednou jsem si zapomněl sešit s domácím úkolem. Kdybych šel dále do školy, přišel bych 8 minut před začátkem vyučování. Kdybych se vrátil domů pro sešit, přišel bych 10 minut po zvonění. Jakou část cesty jsem již ušel? (Předpokládejte, že se pohybuji stále stejnou rychlostí.)

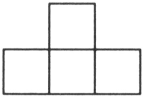
4. Jednou sestra koupila meloun. Třemi řezy jej rozřezala právě na sedm částí. Když jsme meloun snědli, zbylo po něm 8 kusů kůrek. (Žádnou kůrku jsme přitom nesnědli ani nezlomili). Jak to sestra s tím řezáním melounu udělala?

České Budějovice

Pro žáky z jižních Čech pořádali 4. ročník korespondenčního semináře společně dr. P. Sokol z katedry matematiky PF Jihočeské univerzity a dr. O. Švejda z gymnázia v Jírovcově ul. v Českých Budějovicích. Seminář měl 3 kola a zúčastnilo se ho asi 100 žáků většinou ze 7. a 8. ročníků ZŠ.

Uvedeme 4 úkoly ze 3. kola:

1. Dokažte, že šachovnici 10×10 nelze pokrýt 25 obrazci, z nichž každý je sjednocením čtyř políček šachovnice a má tvar podle obrázku 65:

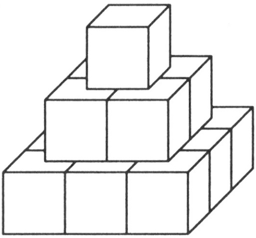


Obr. 65

2. Nalezněte všechna celá čísla x, y, která splňují rovnici $2xy + x + y = 83$. Výsledek se pokuste zdůvodnit.

3. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku jsou celá čísla. Rozhodněte, zda jej lze rozdělit na tři trojúhelníky tak, aby jejich obsahy byly vyjádřeny celými čísly.

4. Artista má 14 krychlí, všechny o hraně 1 m. Ty jsou sestaveny do pyramidy podle obrázku 66. Tuto sestavu je třeba na povrchu natřít. Kolik metrů čtverečných musíme vlastně natřít?



Obr. 66

Hradec Králové

Ve školním roce 1990/91 pořádalo gymnázium J. K. Tyla v Hradci Králové již 3. ročník korespondenčního semináře. Vedli jej dr. Marie Kynterová a prof. Miroslav Tichý. Seminář měl 4 kola, každé po pěti úlohách. Zúčastnilo se asi 300 žáků přibližně z 80 základních škol. Nejlepší řešitelé měli možnost se zúčastnit letního tábora „Mladých Pythagorejců“, který pořádal DDM v Hradci Králové spolu s pobočkou JČMF v Hradci Králové.

Úlohy 4. série:

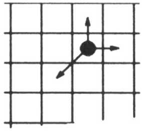
1. Vypočtěte:

$$1\,002 - 992 + 982 - 972 + \ldots + 22 - 12$$

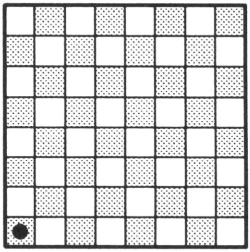
2. Nalezněte všechny trojice přirozených čísel a, b, c, pro něž zároveň platí:

$$a^2 + b - c = 100, \qquad a + b^2 - c = 124$$

3. Delfín (obr. 67) je figura, která může skákat po šachovnici třemi způsoby: o jedno políčko nahoru, o jedno políčko doprava nebo o jedno políčko po úhlopříčce vlevo dolů. Stojí v levém dolním roku šachovnice 8×8 (obr. 68). Zjistěte, zda může vykonat cestu na této šachovnici tak, že na každé políčko skočí právě jednou. (Na políčko vlevo dole už skočil).



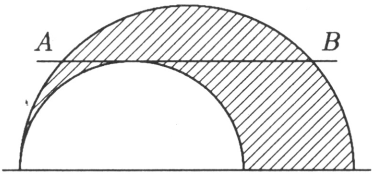
Obr. 67



Obr. 68

4. Tři bratři si mezi sebe rozdělili 24 ořechů. Nejvíce ořechů si nechal nejstarší bratr a nejméně se jich dostalo na nejmladšího. Ten nebyl spokojen, a proto navrhl: „Nechám si polovinu svých ořechů a ostatní rozdělím mezi vás rovným dílem. Potom ať si prostřední bratr také nechá polovinu a ostatní stejným dílem rozdělí mezi mne a nejstaršího bratra. A nakonec ať si nejstarší nechá polovinu svých ořechů a zbytek rozdělí stejným dílem mezi mne a prostředního.“ Bratři souhlasili a po přerozdělení zjistili, že mají všichni stejně. Kolik ořechů původně každý z nich dostal?

5. Úsečka AB (obr. 69) je rovnoběžná s průměry obou půlkruhů, dotýká se menšího půlkruhu a má délku 24. Vypočtěte obsah vyšrafovaného obrazce.



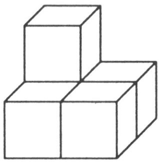
Obr. 69

Svitavy

V okrese Svitavy se uskutečnil 6. ročník korespondenčního semináře, který vedla RNDr. Hana Lišková. Seminář byl určen žákům 7. a 8. ročníků ZŠ a studentům primy a sekundy osmiletých gymnázií. V primě bylo uspořádáno jednodenní soustředění pro práci na počítačích rozdělené do dvou skupin, pro začátečníky a pro pokročilé. Letní soustředění pro 30 nejlepších řešitelů bylo třídenní.

Na ukázku uvedeme dvě úlohy.

1. Dva bratři Mini a Max měli úspěšný den, který chtěli oslavit. Proto zašli koupit dortík, podařilo se jim sehnat skutečně fantastický (obr. 70), který se pokusili rozdělit spravedlivě na dvě části stejného objemu. Najděte i vy dvě různá řešení, jestliže víte, že mohou řezat pouze kolmo na rovinu podstavy (tj. svisle). Vypočtěte v obou případech obsah řezu.



Obr. 70

2. Když dort snědli, vydali se do své zahrady. Cestou našli (ta náhoda) poklad. Byl to řetízek o 60 očkách ze vzácného kovu. Každé očko vážilo 1 gram. Očka se dala otevírat. Miniho napadla otázka: Kolik bychom museli minimálně otevřít oček, abychom ze vzniklých částí dokázali sestavit všechny hmotnosti od 1 g do 60 g?

Bílovec

Korespondenční seminář pod názvem KOKOS (zkratka KOperníkova KOrespondenčního Semináře) uspořádalo pro 11 až 15leté žáky gymnázium Mikoláše Koperníka (GMK) v Bílovci. Vedoucími semináře byli Aleš Kuběna a Petr Kačenka. Semináře se zúčastnilo 284 řešitelů, z nich nejvíce ze 7. ročníků ZŠ. Seminář se konal třetím rokem, avšak poprvé bylo organizováno pro řešitele soustředění a letní tábor, který byl uspořádán společně s řešiteli kutnohorského Pikomatu.

Týden po soustředění probíhaly talentové zkoušky na GMK v Bílovci. Až na jedinou výjimku všichni účastníci soustředění, kteří dělali talentové zkoušky, byli přijati do matematických tříd GMK v Bílovci.

Na ukázku uvedeme úlohy 4. kola. Stejně jako v předcházejících kolech jsou i zde všechny úkoly uvedeny jednoduchými příhodami, z nichž mnohé mají společného hrdinu.

4. kolo semináře

Na nedávno uspořádaném soustředění mladých KOKOSáků se stalo několik příhod, se kterými bychom vás chtěli seznámit.

1. První příhoda nastala už při seznamování. Nejdříve se seznámili všichni instruktoři se všemi dětmi a potom všechna děvčata se všemi chlapci. Předpokládáme-li, že si při seznamování podávali ruce, bylo takových podání rukou nejdříve 92 a potom 130.

Kolik bylo na soustředění instruktorů, kolik dívek a kolik chlapců? Přitom instruktoři jsou dospělí lidé a nedělíme je na dívky a chlapce. Dále víme, že dívek bylo více než chlapců.

2. Po všeobecném seznámení jsme nasedli do autobusu a vydali jsme se na Hůrku. Podle tachometru jel autobus rychlostí 45 km/h. Cestou jsme předjeli paní kuchařku, která jela také na Hůrku, ale na kole rychlostí 15 km/h. Když jsme dojeli na Hůrku, vyložili jsme věci, což trvalo 4 minuty, a autobus odjel. Chvíli po jeho odjezdu přijela paní kuchařka a oznámila nám, že ji autobus míjel v protisměru před 6 minutami.

Kolik kilometrů ujela paní kuchařka od místa předjetí do místa, kde potkala vracející se autobus, a kolik kilometrů jí zbývalo na Hůrku?

3. V neděli se běhal závod „bez kyslíku“. Tento závod se běhá na několika tratích. Asi hodinu před startem chybělo vyznačit jen jednu trať, která vedla kolem kruhového lesa o průměru 100 m. Zbylo celkem 6 praporků, kterými se vyznačuje trať. Jana s Renatou se dohodly, že tuto trať vyznačí. Podmínkou bylo, aby od každého praporku bylo vidět k sousednímu praporku.

Kolik metrů musí dívky nejméně ujít, aby celou trať vytyčily? Dívky jdou vždy nejkratší cestou od jednoho praporku ke druhému. Svou cestu skončí opět u prvního praporku. Pokud nejkratší spojnice dvou praporků neprotíná les, je od každého vidět k sousednímu.

4. Když skončil závod „bez kyslíku“, měl Aleš přednášku o bodulících (oživlé body z pohádkové geometrie). Tato přednáška na některé zapůsobila tak, že se jim o bodulících i zdálo. Pavlovi se zdál sen: Na velké louce se objevilo

55 550 bodulíků. Ti se rozdělili do 10 skupin, každá po 5 555 bodulících a pojmenovali se podle pořadového čísla skupin. V první skupině byli bodulíci „1“, ve druhé „2“, . . . , v deváté „9“ a v desáté „0“. Pak se začali stavět takto do dlouhé řady:

$$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 8\quad 9\quad 10\quad \underline{11}\quad \underline{1}2\quad 13\quad \ldots$$
$$\ldots\quad 100\quad 101\quad 102\quad \ldots$$

Každá číslice značí, do které skupiny ten který bodulík patří. (Např. na 12. až 14. místě stáli bodulíci ze skupiny „1“, jak ukazují podtržené číslice.)

Napište postavení posledních 9 bodulíků v této řadě a kolik bodulíků se do řady nevešlo. Řada končí, chybí-li k jejímu doplnění kterýkoli bodulík. Řada může, ale nemusí končit i uprostřed čísla.

Opava

Pro žáky 4. ročníků z Opavy a okolí pořádá korespondenční seminář Pavel Czudek a dr. Libuše Hozová pod názvem „KOUMES“. Jeho úkolem je nejen pobavit žáky, kteří mají rádi matematiku, zajímavými úlohami, ale také hledat zájemce a talentované žáky pro třídy s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů.

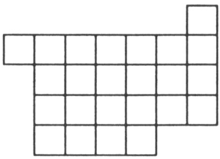
Úkoly 3. kola matematické soutěže „KOUMES“

1. Jirka napsal na papír čtyřciferné číslo, které má na konci 76. Vynásobil ho číslem 9 a s překvapením zjistil, že výsledek je symetrické číslo. Zjistěte, které číslo napsal Jirka na papír?

$$\begin{array}{r} * * 7\,6 \\ \times \;\; 9 \\ \hline \mathrm{A\,B\,C\,B\,A} \end{array}$$

Symetrické číslo je takové, které je stejné, ať ho čteme zepředu nebo zezadu, např. 51 815.

2. Představte si, že máte papírovou krychli a chcete ji rozvinout na stůl. Uděláme to tak, že krychli rozřízneme na sedmi hranách a jestli jsme zvolili správně, dostaneme z krychle jeden kus papíru, který se dá složit opět v krychli. Takovému kusu papíru říkáme síť krychle. Každá síť krychle se skládá ze šesti shodných čtverců. Na obrázku 71 je mnohoúhelník, který se skládá ze 24 shodných čtverců. Rozdělte ho na čtyři části tak, aby každá z nich byla sítí krychle. Stačí jedno řešení.



Obr. 71

10. Petr a Pavel bydlí na stejné straně ulice. Mezi jejich domy je ještě šest domů. Jednou spočítali chlapci čísla na těchto šesti domech. Petrovi vyšlo 174 a Pavlovi 176. Jeden z nich sčítal čísla správně. Který a proč?

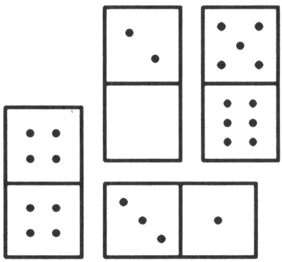
Bratislava

V Bratislavě organizuje velmi oblíbený korespondenční seminář dr. Pavol Černek, CSc., se svými spolupracovníky pod názvem KOMINÁR. Je určen žákům 4. až 6. ročníků ZŠ. Pro každou z těchto kategorií uvedeme 3 ukázky úloh.

Kategorie „čtvrťáci“.

1. Do jídelny přinesli pět bedniček jablek a hrušek. V každé bedničce byl jeden druh ovoce. V jednotlivých bedničkách bylo 105, 110, 115, 120 a 130 kusů ovoce. Když se spotřebovala jedna bednička jablek, zjistilo se, že zůstalo třikrát více hrušek než jablek. Kolik jablek a kolik hrušek přinesli do jídelny?

2. Igor s Ignácem hrají často domino. Jednou uložil Ignác čtyři destičky domina podle obrázku 72:

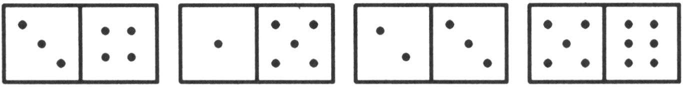


Obr. 72

Igor se na sestavu podíval a řekl: Vždyť ty jsi vlastně vymyslel příklad:

$$\begin{array}{r} 25 \\ 406 \\ \hline 431 \end{array}$$

Oběma se to zalíbilo a začali vymýšlet další podobné příklady. Vymyslete i vy podobný příklad z destiček domina na obr. 73.



Obr. 73

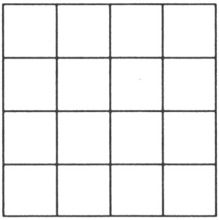
3. Čtyři kamarádky Kristinka, Kamilka, Anička a Janička – si mezi sebou zahrály turnaj ve stolním tenise. Prozradím vám i jejich příjmení: Janíková, Homolová, Kišová a Vilková. Nepovím vám však, která jména patří k těmto příjmením. Děvčata po dvou hodinách udatného boje turnaj dokončila. Janička a Homolová se umístily uprostřed celkového pořadí. Kristinka byla lepší než Anička, ale horší než Vilková. Kamilka neskončila poslední. Kišová byla lepší než Vilková. Dovedete z těchto údajů zjistit, jak skončil turnaj, a správně přiřadit k jednotlivým jménům jejich příjmení? Svou odpověď vysvětlete.

Kategorie „páťáci“.

1. Ignác napsal na papír pěticiferné symetrické číslo. (Symetrické číslo je takové, které se nezmění, ať ho čteme odzadu či odpředu, např. 4 224, 51 815). Potom ho vydělil číslem 7. Dělení mu vyšlo beze zbytku. Výsledek končil dvojicí 78. Zjistěte, jaké číslo napsal Ignác na papír.

2. Ignác má doma stavebnici, ve které má válečky a klíny. Jednou, když maminka zapomněla při pečení koláčů uklidit váhu, začal si s ní Ignác hrát. Zjistil, že váleček a kostka mají dohromady stejnou hmotnost jako čtyři klíny. Klín a váleček zase mají dohromady stejnou hmotnost jako tři kostky. Nakonec zjistil, že ... kostek má stejnou hmotnost jako ... klínů. Dokážete zjistit chybějící čísla v předešlé větě? Svůj postup vysvětlete.

3. Na dílenských pracích se děti učily řezat lupenkovou pilkou. Všichni žáci dostali stejný kus překližky, který se skládal ze 16 shodných čtverců (obr. 74).



Obr. 74

Nakreslete všechny způsoby, kterými se dá tato tabulka rozřezat na dvě shodné části. Řezat se může jen po vyznačených čarách.

Kategorie „šesťáci“.

1. Na očíslování stran ve třech Ignácových knihách bylo potřeba 115krát číslice 7. Jedna knížka má o 10 stran méně než druhá, ale o 10 stran více než třetí. Kolik stran mají jednotlivé knihy? Svůj postup vysvětlete.

2. Zápis ukazuje nesprávně vypočítaný součet tří čísel:

$$\begin{array}{r} 385 \\ 972 \\ \underline{654} \\ 1\,588 \end{array}$$

Tento zápis máte opravit tak, že vyberete dvě dvojice z napsaných 13 číslic a vyměníte v obou dvojicích číslice mezi sebou. Takto opravený součet už musí být správný. Svůj postup vysvětlete a najděte všechna řešení.

3. Ignác a Igor se zúčastnili ve třídě šachového turnaje. Všichni soutěžící se dohodli, že každý z nich se utká jednou se všemi ostatními. Igor a Ignác však turnaj nedokončili. Oba současně onemocněli, takže odehráli stejný počet partií. Zbylí soutěžící dokončili turnaj bez nich. Celkem se sehrálo 31 partií. Zjistěte, zda před onemocněním hráli Igor a Ignác proti sobě. Svou odpověď odůvodněte.

Banská Bystrica

Jeden z nejstarších korespondenčních seminářů u nás vedl doc. dr. Bohuš Sivák, CSc., v Banské Bystrici. Ve školním roce se konal již jeho 11. ročník. Seminář se vrátil i ke svému původnímu názvu KOVBOJ, což je zkratka „KOrespondenčný Velký BOJ“.

Oproti jiným korespondenčnm seminářům se KOVBOJ liší svým zaměřením, protože účastníci řeší nejen matematické úlohy, ale i úlohy z programování a šachové úlohy. Soutěž je určena žákům 6. až 8. ročníků. V tomto roce se zúčastnilo 35 soutěžících.

Věříme, že naše čtenáře zaujmou vedle matematických úloh svou neobvyklostí i úlohy z programování a šachové úlohy. Také ony pomáhají rozvíjet dovednost řešit problémy, umění se k nim „postavit“, rozvíjet tvořivé přístupy k řešení, logický úsudek a další důležité dovednosti budoucích tvůrčích osobností.

Uvedeme úlohy 1. kola.

Matematické úlohy

1. Rozložte číslo 199 091 na prvočinitele. (Našim čtenářům připomeneme, že úloha byla zadána ve školním roce 1990/91.)

2. Zjistěte, zda existuje souvislá řada 30 za sebou jdoucích přirozených čísel, z nichž každé je složeným číslem. Jestliže ano, najděte takovou řadu, která začíná co nejmenším číslem.

3. Číslo se nazývá palindromické, jestliže se čte stejně odpředu i odzadu. (Například číslo 13 731.) Najděte buď největší nepalindromické číslo, jehož 2. mocnina je palindromická, nebo dokažte, že takových čísel je nekonečně mnoho. (Příklad: Číslo 26 je nepalindromické, ale $26^2 = 676$ je palindromické číslo.)

Šachové úlohy

Úvodní pokyny: Ve všech úlohách začíná bílý a dá mat 2. tahem. Uveďte 1. tah bílého a doplňte, zda jde o hrozbu, nebo tempo. Pak napište všechna matová pokračování po všech možných obranách.

Příklad:

Výchozí postavení bílého: Ke3, Dh1, Sb8, Se8, Jd2 (5),
černého: Ke5, Pb5 (2).

Řešení:

1. Da1 hrozí 2. Dd4 mat,
1. ... Kd5, 2. De5 mat,
1. ... Kb6, 2. Da7 mat,
1. ... Kb4, 2. Sd6 mat.

Řešte úlohy mat 2. tahem pro postavení:

1. Bílý: Ka4, De2, Sd3 (3),
   Černý: Ka1 (1)
2. Bílý: Kc8, Db1, Sf5, Pa4 (4),
   Černý: Kc6, Sa8, Pc5, d6 (4)
3. Bílý: Ka4, Dc2, Jb5, Jc4, Pa6, g2 (6).
   Černý: Kd5, Pa7, c5, e6, e7 (5)

Úlohy z programování

Úvodní pokyn a studijní text (pro naše čtenáře trochu upraven).

Programujeme v jazyce SKOMAR:

Vstupní abeceda je konečná množina písmen, např. a, b. Z nich se tvoří slova, např. a, aa, $abba$. Mezi slova počítáme i prázdné slovo, které nemá žádné písmeno – a značí se σ.

Pracovní abeceda může být shodná se vstupní abecedou nebo vznikne jejím doplněním, např. a, b, c, doplnili jsme c. V programu smí být užívána jen pracovní abeceda.

Substituce. Ukážeme na příkladu. Máme provést substituci $aa \to b$ na slova $baaa$, $baabaa$, $baba$. V daném slově najdeme (pokud existuje) první skupinu aa a nahradíme ji b. Ze slova $baaa$ vznikne bba, ze slova $baabaa$ vznikne $bbbaa$. Na slovo $baba$ nelze substituci provést, slovo se nezmění a zůstane $baba$.

Program je konečný počet tzv. programových řádků, které se číslují 1, 2, 3, ...

Příklad programovacího řádku č. 7:

$$7 \quad ba \quad 2 \quad aca \quad 4$$

(má vždy strukturu: číslo–slovo–číslo–slovo–číslo).

V každé etapě práce má program nějaké pracovní slovo. Ukažme, jak uvedený 7. řádek „zpracuje“ např. slova

$$aaba, \qquad aab,$$

tj. které „nové“ slovo vznikne a kam ho program „pošle“.

a) 7. řádek má „zpracovat“ slovo $aaba$. Na toto slovo můžeme použít substituci:

$$ba \longrightarrow aca$$

Jejím provedením vznikne „nové“ slovo $aaaca$. Nyní 7. řádek „pošle“ toto nové pracovní slovo na řádek 4. Tam zpracování pokračuje.

b) 7. řádek má „zpracovat" slovo *aab*. Na toto slovo substituci

$$ba \longrightarrow aca$$

nemůžeme provést, pracovní slovo se nezmění. Zároveň jej program „odešle" na řádek 2.

Ukázali jsme práci jednoho řádku, nyní příklad práce jednoduchého celého programu:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & a & 2 & c & 1 \\ 2 & b & 3 & a & 2 \\ 3 & c & 0 & b & 3 \end{array}$$

Do programu vložíme slovo *aab*. Dostaneme postupně následující slovo, v závorce uvádíme čísla řádků, na nichž došlo ke „zpracování"

$$\begin{array}{lllll} cab\,(1) & - & ccb\,(1) & - & ccb\,(1) \quad - \\ cca\,(2) & - & cca\,(2) & - & \\ bca\,(3) & - & bba\,(3) & - & bba\,(3) \end{array}$$

Poslední uvedené slovo *bba* „odešle" řádek 3 na řádek 0. Ten v programu není zapsán, proto program končí. Ze vstupního slova *aab* vzniklo výstupní slovo *bba*. Ve vstupním slově se každé písmeno *a* nahradilo písmenem *b* a naopak. Vyzkoušejte si nejdříve sami, že stejně zpracuje daný program každé vstupní slovo.

Přejděte k úlohám, ve kterých máte sami sestavit programy, které zpracují všechna vstupní slova popsaným způsobem.

1. Vstupní abeceda je a, b. Jestliže vstupní slovo neobsahuje žádná písmena a, pak je výstupní slovo prázdné. V opačném případě je výstupní slovo složeno z tolika písmen b, kolik písmen a obsahuje vstupní slovo. (Např. je-li vstup $babb$, musí být výstup b.)

2. Vstupní abeceda je a, b. Výstupní slovo vznikne ze vstupního slova „čtením odzadu". (Např. ze slova baa musí vzniknout aab.)

3. Vstupní abeceda je a, b, c. Jestliže vstupní slovo obsahuje aspoň 1 písmeno c, tak výpočet běží do nekonečna. V opačném případě je výstupní slovo složeno pouze z písmen c, těchto písmen je tolik, kolik písmen mělo celkem vstupní slovo.

Košice

V Košicích pořádal KV MO spolu s KDDM 4. ročník korespondenčního semináře MATIK. Vedoucí byla Beáta Vavrinčíková, studující posledního ročníku PF UPJŠ. Soutěž měla 4 kola po 6 úlohách, které čerpaly náměty z teorie čísel, geometrie a logiky. Úlohy byly zadávané formou příběhů různých pohádkových postaviček. Autoři semináře tím sledovali dva cíle:

- zpřístupnit žákům úlohy a udělat je zajímavější,
- učit žáky hledat podstatu úlohy, přeformulovat je do matematického jazyka

V létě je vždy 30 až 35 nejúspěšnějších řešitelů pozváno na pětidenní soustředění.

Uvedeme ukázky z 1. kola. Věříme, že i vám se budou úlohy líbit.

1. Orel Šťastný Let pracuje jako dispečer na letišti. Z letiště odlétají letadla na lince A každý třetí den, na lince B každý pátý den a na lince C každou středu a neděli. Dne 7. ledna 1990 startovala letadla na všech třech linkách. Šťastný Let chce zjistit, kolikrát budou letadla v roce 1991 startovat v jediném dni na všech třech linkách. Umíte mu poradit?

2. Zajíc Papákapustičku se stěhuje. Pomáhají mu Papámrkvičku, Papátravičku a Papáředkvičku. Papákapustičku má v zásobě 12 kapustiček, které mají hmotnost 1, 2, 3, ..., 12 kg. Každý zajíc odvezl 3 kapustičky, přitom žádný z nich nevezl dohromady více než 20 kg. Když všechno v komůrce složili, Papáředkvičku prohlásil, že určitě nikdo z nich nevezl trojici 5, 6 a 7 kg. Měl pravdu?

3. Na pasece uprostřed Černého Lesa žije v chaloupce na muří nožce 720letý Ježidědek. Jako starý mládenec se věnuje výlučně vědecké činnosti a právě se rozhodl napsat Malou encyklopedii čarodějnictví. Chce do ní napsat všechna zaklínadla, která zná. Těch je strašně moc. Přesně

1 10 100 1000 10000 100000 ...

a toto číslo má 1 000 cifer. Ježidědek chce napsat na jednu stránku knihy 72 zaklínadel a zajímá ho, zda i na poslední stránce bude 72 zaklínadel, nebo méně. Pomozte Ježidědkovi vyřešit tento problém, abychom si mohli Malou encyklopedii čarodějnictví co nejdříve koupit na pultech knihkupců.

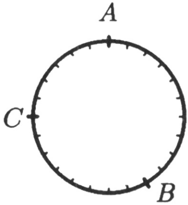
Praha

Pražská pobočka JČMF pořádala v roce 1990/91 pod vedením doc. RNDr. M. Komana, CSc., již 6. ročník soutěže „Dejte hlavy dohromady". Soutěž je určena pro 4členná družstva z 6. ročníků ze tříd s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů. Účastní se jí družstva z Prahy a bývalého Středočeského kraje. Jejím cílem je dát příležitost žákům z těchto tříd změřit mezi sebou síly, učit je řešit úlohy týmově a rozvíjet jejich dovednost v řešení netradičních úloh. Podnítit je ke studiu další matematické literatury přístupné jejich věku i k vlastnímu vymýšlení podobných úloh. Úlohy pro soutěž připravili dr. V. Dřízal a doc. dr. M.Koman, CSc.

Úlohy:

1. Obvod kruhového jezera je 24 km. V místech A, B, C žijí tři kamarádi Adam, Bořek a Cyril. Na kterém místě si mají dát sraz, aby se setkali co nejdříve, jestliže:
- všichni tři vyjdou současně a jdou stejnou rychlostí
- není nutné, aby na místo srazu dorazili současně.

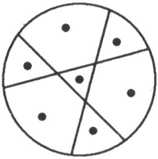
Výsledek vyznačte na obrázku 75 a odůvodněte.



Obr. 75

2. Jirka dostal k sedmým narozeninám dort se 7 svíčkami. Dokázal jej třemi řezy rozdělit na 7 dílů po 1 svíčce (obr. 76). Kolik bylo jeho sestře let, když podobným způsobem rozdělila dort na díly po 1 svíčce pěti řezy? Přitom za rok by jí už 5 řezů nestačilo.

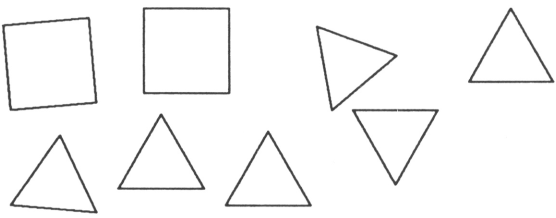
- Nakreslete její dort, vyznačte řezy i svíčky a určete její věk.
- Nakreslete, jak by mohla rozřezat svůj dort příští rok.



Obr. 76

3. Tomáš nesl z kabinetu do třídy duté modely těles. Jeden mu upadl na zem a rozpadl se na 8 kusů — na 2 čtverce a 6 rovnostranných trojúhelníků (obr. 77). Tomáš se pokusil model tělesa znovu slepit. Ke svému překvapení zjistil, že může slepit dva různé modely.

Dokážete slepit aspoň jeden model? Nakreslete síť tohoto tělesa a pak těleso slepte.



Obr. 77

4. Petr má dvě sestry. Oč je starší Hanka, o to je mladší Ivana. Součin věků všech tří je 2 080. Kolik jim je let?

5. Ceny vstupenek na koupaliště jsou:

dospělí	10 Kč
mládež od 10 do 15 let	3 Kč
děti do 10 let	0,50 Kč

V sobotu stejně jako v neděli navštívilo koupaliště 100 osob, které v obou případech zaplatily 100 Kč. V neděli bylo na koupališti méně dětí než v sobotu. Určete počet dětí, dospělých i mládeže, kteří navštívili koupaliště v jednotlivé dny.

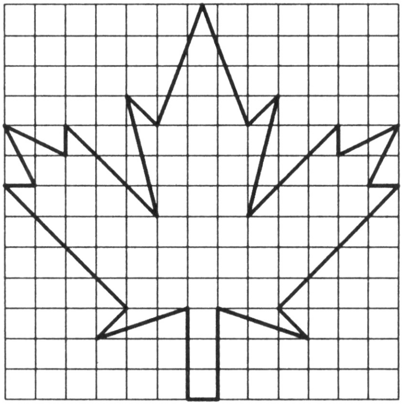
6. Řešte algebrogram:

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,D\,E \\ 4 \\ \hline E\,D\,C\,B\,A \end{array}$$

(Různá písmena značí různé číslice.)

7. Jirka sestavoval ze zápalek různé trojúhelníky. Kolik z nich mohlo mít obvod z patnácti zápalek?

8. Určete obsah listu na obr. 78.



Obr. 78

Opava

Opavská soutěž „Dejte hlavy dohromady“ probíhala v tomto školním roce již po čtvrté. Úkoly připravila podobně jako v minulých letech dr. Libuše Hozová. Soutěž byla určena — stejně jako ve stejnojmenné pražské soutěži — žákům 6. ročníků ze tříd s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů. Žáci řešili 6 úloh:

1. Je dána posloupnost přirozených čísel 2, 5, 8, 11, ... Která z čísel 195, 3 573, 17 924 a 44 444 444 patří do této posloupnosti? Odůvodněte.

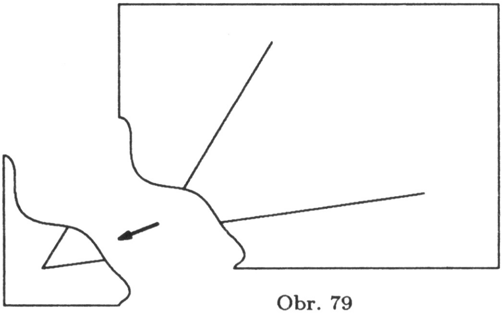
2. Narýsujte čtyřúhelník, který lze jednou přímkou rozdělit na tři trojúhelníky.

3. Do školy nastoupil nový učitel. Žákyně 6. třídy se dohadovaly, jak je vysoký. Jarmila hádala 196 cm, Jitka

163 cm, Terezka 178 cm a Šárka 185 cm. Ukázalo se, že jedna dívka se spletla o 1 cm, druhá o 6 cm, třetí o 17 cm a čtvrtá o 16 cm. Kolik centimetrů měřil pan učitel a která dívka měla nejlepší odhad.

4. Které z čísel $(222\,333)^2$, $(222\,332 \cdot 222\,334)$ je větší, a o kolik? Najděte takový způsob, při kterém se nebudete trápit velkým násobením.

5. Anička sestrojila na papír úhel. Když chtěla narýsovat osu tohoto úhlu, roztrhl se jí papír a vítr odnesl tu část úhlu, na níž byl vrchol úhlu s částmi ramen (obr. 79). Anička chvíli přemýšlela, ale nakonec se jí podařilo osu úhlu narýsovat. Jak to udělala? (Nepomáhejte si prodloužením ramen úhlu.)



Obr. 79

6. Tatínek rozdělil pěti dětem částku menší než 100 Kč. Zdeněk dostal $\frac{3}{4}$ toho, co Milada. Milada $\frac{3}{5}$ toho, co Pavel. Honza $\frac{2}{3}$ toho, co Zdeněk a Milada dohromady. Jirka dostal to, co Honza a $\frac{1}{3}$ toho, co Zdeněk. Pavel $\frac{2}{9}$ a 4 Kč z této částky. Kolik korun dostal každý? .