Kategorie C

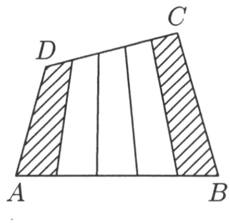
Texty úloh

C – I – 1

Dokažte, že pro přirozená čísla m, n $(m > n)$ je číslo $4^m - 4^n$ dělitelné devíti, právě když je číslo $m - n$ dělitelné třemi.

C – I – 2

Každá ze stran AB a DC konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ je rozdělena na 5 shodných úseček. Spojením odpovídajících si bodů (obr. 1) je čtyřúhelník rozdělen na pět čtyřúhelníků, z nichž první má obsah 10 a poslední $22\,\mathrm{cm}^2$. Určete obsah čtyřúhelníku $ABCD$.



Obr. 1

C – I – 3

Rovnostranný trojuholník je rozdelený na dve časti priamkou, ktorá prechádza jeho ťažiskom. Dokážte, že pre pomer p obsahov týchto častí platí

$$\frac{4}{5} \leqq p \leqq \frac{5}{4}.$$

C – I – 4

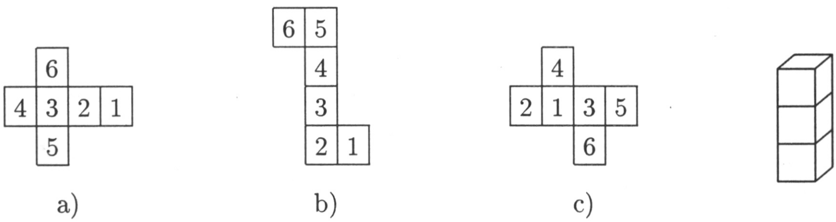
V matematické soutěži řešil každý žák 30 úloh. Za správně vyřešenou úlohu obdržel 4 body, špatně vyřešená úloha znamenala -1 bod, 0 bodů bylo za úlohu, kterou neřešil. Kolik muselo být účastníků, abychom mohli s jistotou tvrdit, že dva žáci skončili se stejným počtem bodů?

C – I – 5

Daný je lichobežník $ABCD$, v ktorom $|AB| = 8\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 4\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle DAB| = 53°$, $|\sphericalangle CBA| = 37°$. Vypočítajte vzdialenosť stredov základní AB, DC.

C – I – 6

Ze sítí na obr. 2 můžeme složit tři kostky. Pokud je postavíme do sloupečku, na jeho bocích si můžeme shora dolů přečíst trojmístná čísla (některé číslice budou ležet na boku nebo budou vzhůru nohama). Tato čtyři čísla sečteme. Kolik takových součtů můžeme dostat?



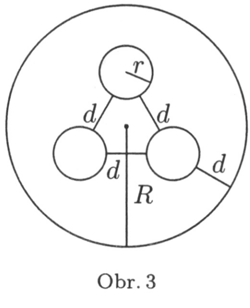
Obr. 2

C – S – 1

Dokažte, že pro přirozená čísla m, n $(m > n)$ je číslo $4^m - 4^n$ dělitelné číslem 27, právě když je rozdíl $m - n$ dělitelný devíti.

C – S – 2

Tri kruhy s polomerom r sú umiestnené do kruhu s polomerom R tak, že ich stredy tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka s ťažiskom v strede veľkého kruhu (obr. 3). Ďalej platí, že vzdialenosť d každých dvoch menších kruhov sa rovná vzdialenosti každého z týchto kruhov od hraničnej kružnice veľkého kruhu. Vyjadrite d pomocou R a r.



Obr. 3

C – S – 3

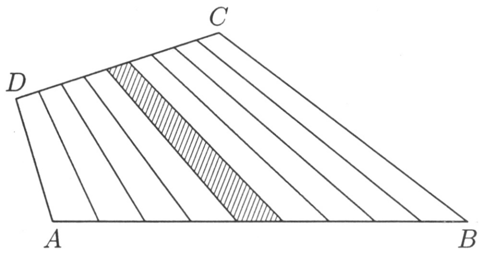
Uvnitř čtverce o straně 2 je dáno 61 různých bodů. Dokažte, že existuje kruh o poloměru $\frac{\sqrt{2}}{2}$, uvnitř kterého leží aspoň 16 těchto bodů.

C – II – 1

Ak je päťciferné číslo $6A\,B73$ deliteľné 99, tak je tiež deliteľné 19. Dokážte.

C – II – 2

Každá zo strán AB, DC konvexného štvoruholníka $ABCD$ je rozdelená na 9 zhodných úsečiek. Spojením odpovedajúcich si deliacich bodov sa štvoruholník rozdelí na 9 štvoruholníkov (obr. 4), z ktorých prostredný má obsah $7\,\mathrm{cm}^2$. Aký je obsah štvoruholníka $ABCD$?



Obr. 4

C – II – 3

V kruhu o poloměru 1 je dáno 77 různých bodů. Dokažte, že existuje kruh o poloměru $\frac{\sqrt{3}}{3}$, ve kterém leží aspoň 13 těchto bodů.

C – II – 4

Ve fotbalovém turnaji hrálo každé mužstvo s každým právě jednou. Za výhru získává 2 body, za nerozhodný výsledek 1 bod, za prohru žádný bod nezíská. Vítězné mužstvo získalo celkem 7 bodů, třetí v pořadí 5 bodů a čtvrté 3 body. Kolik bylo mužstev?

C – I – 1

Označme $m - n = d$; potom $4^m - 4^n = 4^n(4^d - 1)$. Keďže čísla 9 a 4^n sú nesúdeliteľné (pre ľubovoľné n prirodzené), je $4^m - 4^n$ deliteľné deviatimi práve vtedy, keď je deviatimi deliteľné číslo $4^d - 1$.

Platí však

$$4^d - 1 = (4-1)(4^{d-1} + 4^{d-2} + \ldots + 4^2 + 4 + 1) = 3M,$$

kde pre každé prirodzené číslo d volíme vhodné celé M. Z toho vyplýva, že pre každé d je číslo $4^d - 1$ deliteľné troma, čo taktiež znamená, že číslo 4^d má pri delení číslom 3 zvyšok 1. Ak v poslednej rovnosti dosadíme za $4^k = 3M_k + 1$, kde M_k sú vhodné prirodzené čísla a $1 \leqq k \leqq d - 1$, dostaneme

$$\begin{aligned}4^d - 1 &= 3\big((3M_{d-1} + 1) + (3M_{d-2} + 1) + \ldots + \\ &\quad + (3M_2 + 1) + (3M_1 + 1) + 1\big) = \\ &= 9\big(M_{d-1} + M_{d-2} + \ldots + M_1\big) + 3d.\end{aligned}$$

Z toho je však zrejmé, že číslo $4^d - 1$ je deliteľné deviatimi práve vtedy, keď d je deliteľné troma, ako bolo treba dokázať.

Iné riešenie (založené na binomickej vete). Nech $d = 3k$, kde k je prirodzené. Potom

$$\begin{aligned}4^d - 1 &= 4^{3k} - 1 = 64^k - 1 = \\ &= (64-1)(64^{k-1} + 64^{k-2} + \ldots + 64 + 1) = \\ &= 9 \cdot 7(64^{k-1} + 64^{k-2} + \ldots + 64 + 1),\end{aligned}$$

čo znamená, že $4^d - 1$ je deliteľné deviatimi.

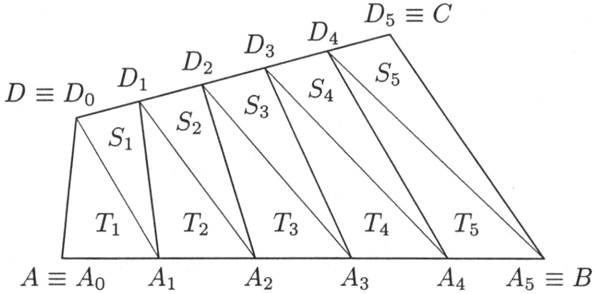
Nech naopak $4^d - 1 = 9K$ pre K prirodzené, čo však môže platiť len pre $d \geqq 3$. Keďže $4^d = (3+1)^d$, podľa binomickej vety dostaneme

$$\begin{aligned}4^d - 1 &= \big((3+1)^d - 1\big) = \\ &= 3\left(3^{d-1} + \binom{d}{d-1}3^{d-2} + \ldots + \binom{d}{2}3 + d\right),\end{aligned}$$

z čoho vyplýva, že číslo d musí byť deliteľné troma, ako bolo treba dokázať.

C – I – 2

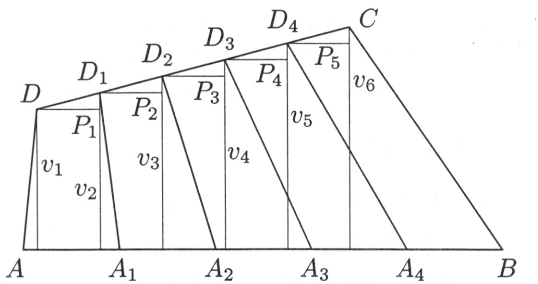
Označme deliace body podľa obr. 5. Nech pre $i = 0, 1, 2, 3, 4$ je $|A_iA_{i+1}| = a$ a $|D_iD_{i+1}| = b$. Pre $i = 1, 2, 3, 4, 5$ označme O_i obsah štvoruholníka $A_{i-1}A_iD_iD_{i-1}$. Vieme, že $O_1 = 10\,\mathrm{cm}^2$, $O_5 = 22\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 5

Zrejme je $AB \nparallel CD$. Ak by totiž bolo $AB \parallel CD$, všetky štvoruholníky $A_{i-1}A_iD_iD_{i-1}$ (pre $1 \leqq i \leqq 5$) by boli lichobežníky s rovnako veľkými základňami i zhodnou výškou v a tiež ich obsahy by museli byť rovnako veľké (totiž $\frac{1}{2}v(a+b)$), čo však nemôže nastať ($O_5 \neq O_1$).

Označme teraz T_i plošný obsah trojuholníka $A_{i-1}A_iD_{i-1}$ ($1 \leqq i \leqq 5$) a v_i jeho výšku z vrchola D_{i-1} na stranu $A_{i-1}A_i$. Platí teda $T_i = \frac{1}{2}av_i$. Nech P_i je päta kolmice z bodu D_{i-1} na výšku v_{i+1}, kde v_6 označuje vzdialenosť bodu C od priamky AB (obr. 6). Trojuholníky $D_{i-1}P_iD_i$ ($i = 1,2,3,4,5$) sú zrejme zhodné, pretože majú zhodné vnútorné uhly a dĺžku jednej strany. Z toho vyplýva, že rozdiel $v_{i+1} - v_i$ je rovnaký pre všetky hodnoty $i = 1, 2, 3, 4, 5$; označme ho k. Teda ani rozdiel $T_{i+1} - T_i = \frac{1}{2}ak$ nezávisí na i; ak ho označíme ako c, bude $T_2 = T_1 + c$, $T_3 = T_2 + c$, $T_4 = T_3 + c$, $T_5 = T_4 + c$.



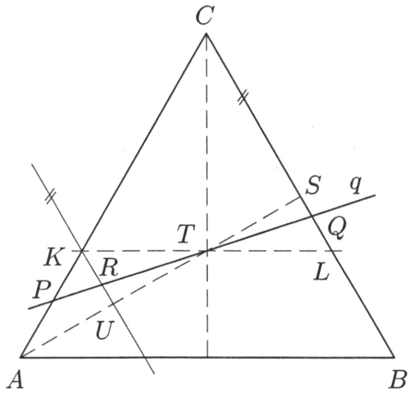
Obr. 6

Ak označíme S_i plošný obsah trojuholníka $D_{i-1}A_iD_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, analogickou úvahou nahliadneme, že rozdiel $S_{i+1} - S_i$ nie je závislý na i, čiže pre vhodné d platí $S_2 = S_1 + d$, $S_3 = S_2 + d$, $S_4 = S_3 + d$, $S_5 = S_4 + d$. Zrejme je $O_i = T_i + S_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, aritmetická postupnosť s diferenciou $c + d$. Keďže je $O_1 = 10\,\mathrm{cm}^2$, $O_5 = 22\,\mathrm{cm}^2$, bude hľadaný obsah $O = O_1 + O_2 + O_3 + O_4 + O_5 = \frac{5}{2}(O_1 + O_5) = 5 \cdot 16\,\mathrm{cm}^2 = 80\,\mathrm{cm}^2$.

C – I – 3

Bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že obsah daného trojuholníka ABC sa rovná 1. Nech q je priamka prechádzajúca ťažiskom T tohto trojuholníka. Ak prechádza niektorým z vrcholov trojuholníka ABC, rozdelí ho na dva trojuholníky rovnakého obsahu. V tomto prípade je teda $p = 1$.

Ak q neprechádza žiadnym z vrcholov trojuholníka ABC, potom pretína dve jeho strany, napr. (ako na obr. 7) stranu AC v bode P a stranu BC v bode Q.



Obr. 7

Keď je priamka q rovnobežná s priamkou AB, sú trojuholníky ABC a PQC rovnoľahlé, a teda podobné. Z podobnosti týchto trojuholníkov vyplýva, že $|PQ| = \frac{2}{3}|AB|$ a $|CT| = \frac{2}{3}v$, kde v je výška trojuholníka ABC. Preto obsah trojuholníka PQC je $\frac{4}{9}$, obsah štvoruholníka $ABQP$ je $\frac{5}{9}$. Teda $p = \frac{4}{5}$ alebo $p = \frac{5}{4}$. (Krajší spôsob, ako to zistiť, je však rozdeliť trojuholník na deväť rovnakých rovnostranných trojuholníkov.)

Nech $q \nparallel AB$. Označme K, resp. L priesečníky strán AC, resp. BC s rovnobežkou so stranou AB prechádzajúcou ťažiskom T (obr. 7). Nech

P je vnútorným bodom úsečky AK. Potom Q leží vo vnútri úsečky CL. Označme S stred strany BC. Bodom K veďme rovnobežku so stranou BC a jej priesečníky s úsečkami PT, resp. AT označme R, resp. U. Pretože T je stred úsečky KL, sú trojuholníky TKR a TLQ, ako aj TRU a TQS zhodné. Preto pre obsah O_{PQC} trojuholníka PQC platí

$$\begin{aligned} O_{PQC} &= O_{KLC} + O_{PTK} - O_{TLQ} = \\ &= \tfrac{4}{9} + O_{PTK} - O_{TKR} = \\ &= \tfrac{4}{9} + O_{KPR} > \tfrac{4}{9}; \end{aligned}$$

na druhej strane však

$$\begin{aligned} O_{PQC} &= O_{ASC} - O_{ATP} + O_{TQS} = \\ &= \tfrac{1}{2} - O_{ATP} + O_{TRU} = \\ &= \tfrac{1}{2} - O_{AURP} < \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že $\frac{4}{9} < O_{PQC} < \frac{1}{2}$, odkiaľ dostaneme, že $\frac{1}{2} < < O_{ABQP} < \frac{5}{9}$. Pre pomer p obsahov oboch častí teda v tomto prípade musí platiť $\frac{4}{5} < p < \frac{5}{4}$. V oboch prípadoch sme úspešne dokázali danú nerovnosť.

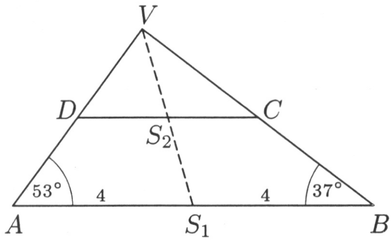
Poznamenajme, že tvrdenie úlohy platí pre ľubovoľný trojuholník, nielen pre rovnostranný. Dôkaz možno urobiť tým istým spôsobom.

C – I – 4

Každý žiak mohol v súťaži dosiahnuť celkový bodový súčet od -30 bodov (ak riešil všetkých 30 úloh nesprávne) až do 120 bodov (pri správnom vyriešení všetkých 30 úloh) s výnimkou súčtov 119, 118, 117, 114, 113 a 109 bodov, ktoré sa pri danom bodovacom systéme nedajú žiadnym spôsobom dosiahnuť. Možných výsledkov v súťaži je teda $151 - 6 = 145$. Podľa Dirichletovho princípu to znamená, že ak sa súťaže zúčastní aspoň 146 žiakov, môžme s istotou tvrdiť, že aspoň dvaja žiaci skončili s rovnakým počtom bodov.

C – I – 5

Průsečík přímek AD a BC označme V. Protože $|\sphericalangle AVB| = 180° - - (53° + 37°) = 90°$, je trojúhelník ABV pravoúhlý. Označme S_1 střed strany AB a S_2 střed strany CD daného lichoběžníku (obr. 8). Zřejmě je $|AS_1| = 4\,\text{cm}$, $|DS_2| = 2\,\text{cm}$. V pravoúhlém trojúhelníku ABV je S_1 středem kružnice opsané a platí $|S_1V| = |S_1A|$. Trojúhelníky S_2VD



Obr. 8

a S_1VA jsou podobné, protože mají všechny úhly shodné. Z rovnosti $|S_2D| : |S_1A| = 2 : 4 = 1 : 2$ proto plyne $|S_2V| : |S_1V| = 1 : 2$ a odtud pak, že $|S_1S_2| = |S_1V| - |S_2V| = 2\,\text{cm}$.

C – I – 6

Označme A kocku, ktorej sieť je na obr. 2a. Na tejto kocke bude stena s číslom 1 proti stene s číslom 3, stena s číslom 2 proti stene s číslom 4 a stena s číslom 5 proti stene s číslom 6.

Ak B bude kocka so sieťou na obr. 2b, bude na tejto kocke proti stene s číslom 1 stena s číslom 6, proti stene s číslom 2 stena s číslom 4 a proti stene s číslom 3 stena s číslom 5.

Na kocke C — so sieťou na obr. 2c — je proti stene s číslom 1 stena s číslom 5, proti stene s číslom 2 stena s číslom 3 a proti stene s číslom 4 stena s číslom 6.

Z toho vyplýva, že všetky tri kocky sú navzájom rôzne. Skôr, než začneme uvažovať o možnom počte súčtov štyroch trojmiestnych čísel na stenách stĺpčeka, musíme si uvedomiť, že tento počet nezávisí od umiestnenia číslic na viditeľných stenách jednotlivých kociek, ale len od usporiadania kociek v stĺpčeku a od toho, ktoré číslice sú na „skrytých stenách" (hornej a dolnej) jednotlivých kociek. Pritom súčet číslic na viditeľných bočných stenách hornej kocky predstavuje počet stoviek, na strednej počet desiatok a na dolnej počet jednotiek v súčte. Možné polohy kociek v stĺpčeku, ktoré majú vplyv na počet súčtov, sú zapísané v nasledujúcej tabuľke (indexmi označujeme možné rôzne polohy príslušnej kocky):

Poloha kocky	Číslice na hornej, resp. dolnej stene	Číslice viditeľné na bočných stenách a ich súčet
A_1	1; 3	$2+5+4+6=17$
A_2	2; 4	$1+5+3+6=15$
A_3	5; 6	$1+2+3+4=10$
B_1	1; 6	$2+3+4+5=14$
B_2	2; 4	$1+3+6+5=15$
B_3	3; 5	$1+2+6+4=13$
C_1	1; 5	$2+4+3+6=15$
C_2	2; 3	$1+4+5+6=16$
C_3	4; 6	$1+2+3+5=11$

Pre usporiadanie kociek do stĺpčeka máme celkom 6 rôznych možností, ktoré môžme znázorniť touto schémou:

$$\begin{matrix} A & B & A & C & B & C \\ B & A & C & A & C & B \\ C & C & B & B & A & A \end{matrix}$$

Z toho, že všetky tri kocky sú vzájomne rôzne a že rozdiel medzi najväčším a najmenším možným súčtom štyroch viditeľných číslic je menej ako desať, vyplýva, že všetkým polohám jednotlivých kociek pri usporiadaní ABC (zhora nadol) zodpovedá celkom $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ rôznych súčtov.

Vzhľadom na to, že pre každú kocku existuje jedna poloha s rovnakým súčtom číslic na viditeľných bočných stenách (totiž 15), pri ostatných usporiadaniach kociek v stĺpčeku dostaneme už menší počet nových súčtov.

Pri usporiadaní BAC to bude $3\cdot3\cdot3-3=24$, pretože súčet v polohe $B_2A_2C_i$ je rovnaký ako v polohe $A_2B_2C_i$ (pre $i=1$, 2, 3). Pri usporiadaní ACB to bude opäť $3\cdot3\cdot3-3=24$, lebo súčet v polohe $A_iC_1B_2$ je rovnaký ako v polohe $A_iB_2C_1$, $i=1$, 2, 3. Pri usporiadaní CAB pribudne už len $3\cdot3\cdot3-5=22$ nových súčtov, pretože súčet v polohe $C_1A_2B_i$ je rovnaký ako v polohe $A_2C_1B_i$ ($i=1$, 2, 3) a súčet v polohe $C_1A_iB_2$ je rovnaký ako súčet v polohe $B_2A_iC_1$, pre $i=1$ a $i=3$. Pri usporiadaní BCA bude nových súčtov opäť len $3\cdot3\cdot3-5=22$, pretože súčet v polohe $B_2C_iA_2$ je rovnaký ako súčet v polohe $A_2C_iB_2$ (pre $i=1$, 2, 3) a súčet v polohe $B_iC_1A_2$ je rovnaký ako súčet v polohe $B_iA_2C_1$, $i=1,3$. Konečne pri usporiadaní CBA pribudne už iba $3\cdot3\cdot3-7=20$ nových súčtov, lebo súčet v polohe $C_1B_2A_i$ je rovnaký ako v polohe $B_2C_1A_i$ ($i=1$, 2, 3), súčet v polohe $C_1B_iA_2$ je rovnaký ako v polohe $A_2B_iC_1$ ($i=1$, 3) a súčet v polohe $C_iB_2A_2$ je rovnaký ako v polohe $C_iA_2B_2$ ($i=2$, 3).

Celkom teda môžeme dostať $27 + 2 \cdot 24 + 2 \cdot 22 + 20 = 139$ rôznych súčtov.

C – S – 1

Položme $d = m - n > 0$. Keďže je $4^m - 4^n = 4^n(4^d - 1)$ a číslo 4^n je pre každé n nesúdeliteľné s číslom 27, je $4^m - 4^n$ deliteľné 27 práve vtedy, keď má túto vlastnosť číslo $4^d - 1$. Je zrejmé, že ak číslo $4^m - 4^n$ je deliteľné číslom 27, musí byť deliteľné deviatimi. Z úlohy C–I–1 však vieme, že to platí práve vtedy, keď d je deliteľné troma. Nech preto $d = 3k$, kde k je prirodzené číslo. Potom je

$$\begin{aligned}4^d - 1 &= 4^{3k} - 1 = 64^k - 1 = \\ &= (64 - 1)(64^{k-1} + 64^{k-2} + \ldots + 64 + 1) = \\ &= 7 \cdot 9 \cdot (64^{k-1} + 64^{k-2} + \ldots + 64 + 1).\end{aligned}$$

Každé z čísel 64^s, $s = 1, \ldots, k - 1$, však pri delení troma dáva zvyšok 1, pretože

$$64^s = (3 \cdot 21 + 1)^s = 3M_s + 1,$$

kde M_s, $1 \leqq s \leqq k - 1$, sú vhodné prirodzené čísla. Preto bude

$$64^{k-1} + 64^{k-2} + \ldots + 64 + 1 = 3(M_{k-1} + M_{k-2} + \ldots + M_1) + k,$$

z čoho vyplýva, že

$$4^d - 1 = 7 \cdot 27 \cdot (M_{k-1} + M_{k-2} + \ldots + M_1) + 7 \cdot 9 \cdot k.$$

To však znamená, že číslo $4^d - 1$ je dělitelné 27, práve vtedy, keď k je deliteľné troma, a keďže je $d = 3k$, platí to práve vtedy, keď je d deliteľné deviatimi, ako bolo treba dokázať.

C – S – 2

Označme S stred veľkého kruhu a S_1, S_2, S_3 stredy jednotlivých do neho umiestnených menších kruhov. Pre polomer R veľkého kruhu zrejme platí $R = d + r + \frac{2}{3}v$, kde v je výška rovnostranného trojuholníka $S_1S_2S_3$. Keďže $|S_1S_2| = d + 2r$, je $v = (d + 2r) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Preto platí

$$R = d + r + \frac{2}{3}(d + 2r)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(3 + \sqrt{3})d + (3 + 2\sqrt{3})r}{3},$$

z čoho vyplýva, že

$$d = \frac{3R - (3+2\sqrt{3})r}{3+\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{3})R - (1+\sqrt{3})r}{2}.$$

C – S – 3

Daný čtverec můžeme rozdělit na čtyři čtverce o straně 1; každému z těchto čtverců opišme kružnici s poloměrem $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Kruhy ohraničené těmito kružnicemi zcela pokryjí vnitřek daného čtverce. Kdyby v každém z těchto kruhů leželo nejvýše 15 bodů, nemohlo by v celém čtverci být dohromady více než $4 \cdot 15 = 60 < 61$ bodů. Proto aspoň v jednom z kruhů musí ležet aspoň 16 bodů.

C – II – 1

Víme, že číslo $6A\,B73 = 60\,073 + 1\,000\,A + 100\,B = 606 \cdot 99 + 79 + 990\,A + {}$ $+ 10\,A + 99\,B + B = 99(606 + 10A + B) + 79 + 10\,A + B$. Aby bylo toto číslo dělitelné číslem 99, musí být $10\,A + B = 20$. Číslo $6A\,B73$ se tedy rovná číslu 62 073, které je dělitelné číslem 19, což se mělo dokázat.

Jiné řešení. Násobek $k \cdot 99$ končí dvojčíslím, které se rovná rozdílu 100 – koncové dvojčíslí čísla k. Odtud vidíme, že $6A\,B73 = k \cdot 99$, kde k končí dvojčíslím 27. V úvahu připadá $k = 627$ a $k = 727$. Úloze vyhovuje jen $k = 627$.

C – II – 2

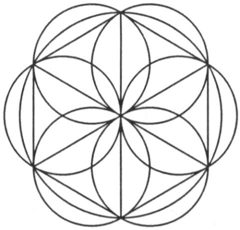
Z riešenia druhej úlohy domáceho kola vyplýva, že plošné obsahy štvoruholníkov, na ktoré sme rozdelili štvoruholník $ABCD$, tvoria aritmetickú postupnosť: P_0, $P_0 + d$, …, $P_0 + 4d$, …, $P_0 + 8d$. Plošný obsah P štvoruholníka $ABCD$ dostaneme ako súčet členov tejto postupnosti:

$$P = 9 \cdot \frac{P_1 + (P_1 + 8d)}{2} = 9 \cdot (P_1 + 4d).$$

Zo zadania úlohy vieme, že $P_1 + 4d = 7\,\mathrm{cm}^2$. Preto je $P = 9 \cdot 7\,\mathrm{cm}^2 =$ $= 63\,\mathrm{cm}^2$.

C – II – 3

Do kruhu s polomerom 1 môžme vpísať pravidelný konvexný šesťuholník so stranou 1, ktorý rozdelíme na 6 rovnostranných trojuholníkov so stranou 1 a spoločným vrcholom v strede daného kruhu. Každému z týchto rovnostranných trojuholníkov opíšeme kružnicu s polomerom $r = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Tým vznikne 6 zhodných kruhov s polomerom $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, ktoré celkom pokrývajú daný jednotkový kruh (obr. 9). Keďže $6 \cdot 12 = 72 < 77$, musí podľa Dirichletovho princípu aspoň v jednom z týchto kruhov ležať aspoň 13 z daných bodov.



Obr. 9

C – II – 4

Označme n hledaný počet mužstev. Celkem bylo sehráno $\frac{1}{2}n(n-1)$ zápasů a všechna mužstva získala dohromady $n(n-1)$ bodů. Přitom druhé získalo nejvýše 7 bodů, páté a všechna další nejvýše tři body. Dohromady získala všechna mužstva nejvýše $7+7+5+3+(n-4)\cdot 3 = 3n+10$ bodů, takže $n(n-1) \leqq 3n+10$, tedy $(n-2)^2 \leqq 14$, odtud vychází $n=5$. Mužstva získala celkem 20 bodů, druhé a páté dohromady 5, takže druhé získalo 5 bodů a páté nezískalo ani bod. (Hodnota $n=4$ nevyhovuje, protože počet přidělených bodů $7+5+3$ třem mužstvům je již větší než $4 \cdot 3$.)

K úplnému řešení musíme ještě ukázat, že tato situace mohla skutečně nastat. Příklad turnaje, který dané podmínky splňuje, je

	A	B	C	D	E	body
A	×	1	2	2	2	7
B	1	×	0	2	2	5
C	0	2	×	1	2	5
D	0	0	1	×	2	3
E	0	0	0	0	×	0