42. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie B

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jozef Moravčík (editor); Václav Sedláček (editor); Jaromír Šimša (editor); Pavel Töpfer (editor): 42. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1992/1993. 34. mezinárodní matematická olympiáda. 5. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2002. pp. 38–49.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404972

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Nechť a, b, c ($a \leqq b \leqq c$) jsou délky stran trojúhelníku, jehož obsah je $10\,\mathrm{cm}^2$. Jakou nejmenší délku může mít strana b?

B – I – 2

Pre ktoré reálne čísla c existujú práve dve rôzne reálne čísla, ktoré sú riešením rovnice

$$x^3 + (c-1)x + c = 0?$$

B – I – 3

Jakou délku může mít šestá hrana čtyřstěnu, jestliže délky zbývajících pěti hran jsou 2 cm, 2 cm, 2 cm, 3 cm a 4 cm?

B – I – 4

Honza si zapomněl poznačit kvadratickou rovnici, kterou měl doma řešit. Pamatoval si však, že koeficient u kvadratického členu byl 3 a u lineárního členu 25. U absolutního členu se spletl pouze ve znaménku. Obě rovnice (ta, kterou měl řešit, i ta, kterou řešil) měly celočíselný kořen. Zjistěte, které to byly rovnice.

B – I – 5

Dané sú body A, B. Zostrojte dve navzájom kolmé priamky prechádzajúce bodom B tak, aby ich vzdialenosti od bodu A boli v pomere $1 : 2$.

B – I – 6

Jsou dány dva shodné kruhy o poloměru 1 cm. Mezi všemi čtyřúhelníky, které se dají pokrýt přemístěním těchto dvou kruhů, najděte takový, který má největší obsah.

B – S – 1

Najděte největší trojciferné přirozené číslo x, pro které existuje prvočíslo p takové, že číslo $\sqrt{x^2 - p^3}$ je celé.

B – S – 2

Pre ktoré reálne čísla p má sústava rovníc

$$\begin{aligned} x^3 - x + 3p &= 6, \\ x^3 + x + 4p &= 10 \end{aligned}$$

aspoň jedno riešenie v obore reálnych čísel?

B – S – 3

Uvnitř daného pravého úhlu AMB sestrojte body K a L tak, aby KLM byl rovnostranný trojúhelník o straně 5 cm a aby vzdálenost bodu K od ramene MA byla dvojnásobkem vzdálenosti bodu L od ramene MB.

B – II – 1

Zistite, pre ktoré reálne čísla a má sústava rovníc

$$\begin{aligned} x + y &= z + 2, \\ x^2 + y^2 &= z^2 + 4, \\ x^3 + y^3 &= z^3 + a \end{aligned}$$

riešenie v obore reálnych čísel, a riešte ju.

B – II – 2

Rozhodněte, zda existuje pravoúhlý trojúhelník, jehož obě odvěsny mají délky vyjádřené celými čísly a jehož výška na přeponu je vyjádřena prvočíslem.

B – II – 3

Ak pre reálne čísla p, q, r platí, že obe čísla $4p+2q+r$, $-p+q-r$ sú kladné, potom je $q^2 > 4pr$. Dokážte.

B – II – 4

Záhon tvaru rovnostranného trojúhelníku je pokryt pěti navzájem shodnými plachtami tvaru rovnostranného trojúhelníku. (Části plachet se mohou překrývat i přesáhnout záhon.) Dokažte, že na pokrytí záhonu stačí čtyři tyto plachty.

B – I – 1

Je-li γ velikost úhlu, který svírají strany délek a, b, je obsah trojúhelníku $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Protože $0 < \sin\gamma \leqq 1$, $a \leqq b$, platí $20 \leqq ab\sin\gamma \leqq ab \leqq b^2$, neboli $b \geqq \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Odtud přímo vyplývá, že b bude nejmenší, právě když $\sin\gamma = 1$ a zároveň $b = a$. Odpovídající trojúhelník má strany $a = b = 2\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$, jež svírají úhel $\gamma = 90°$, takže $c = 2\sqrt{10}\,\mathrm{cm}$.

B – I – 2

Rovnicu upravíme nasledujúcim spôsobom:

$$x^3 - x + c(x+1) = 0,$$
$$x(x-1)(x+1) + c(x+1) = 0,$$
$$(x+1)(x^2 - x + c) = 0.$$

Odtiaľ je zrejmé, že rovnica má pre každé reálne číslo c koreň $x_1 = -1$.

Ak má mať celkom dva rôzne reálne korene, musí byť alebo $x_2 = x_3$, alebo $x_2 = -1$, pričom x_3 je reálne číslo rôzne od čísla -1. Vzhľadom na to, že x_2, x_3 sú korene rovnice $x_2 - x + c = 0$, prvý prípad nastane práve vtedy, ak je jej diskriminant $1 - 4c$ nulový, čiže pre $c = \frac{1}{4}$ (bude $x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$).

V druhom prípade využijeme vzťahy medzi koreňmi a koeficientami kvadratickej rovnice. Pre $x_2 = -1$ dostávame $-1 + x_3 = 1$, $-x_3 = c$, čiže $x_3 = 2$ a $c = -2$.

Daná rovnica má teda práve dve rôzne riešenia, práve keď $c = \frac{1}{4}$ alebo $c = -2$.

Iné riešenie. Využijeme Viètové vzťahy. Označme u, v rôzne reálne korene rovnice $x_3 + (c-1)x + c = 0$, pričom predpokladáme, že koreň v je dvojnásobný. Potom platí

$$x^3 + (c-1)x + c = (x-u)(x-v)^2.$$

Po roznásobení a porovnaní koeficientov u rovnakých mocnín premennej x dospejeme k vzťahom

$$u = -2v,$$
$$c - 1 = v^2 + 2uv,$$
$$uv^2 = -c.$$

Dosadením z prvej rovnice do druhých dvoch dostaneme

$$
\begin{aligned}
c-1&=-3v^2,\\
c&=2v^3. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Vylúčením premennej c dostaneme rovnicu

$$2v^3+3v^2-1=0,$$

ktorá má zrejme koreň $v_1=-1$ a je teda možné ju upraviť na tvar

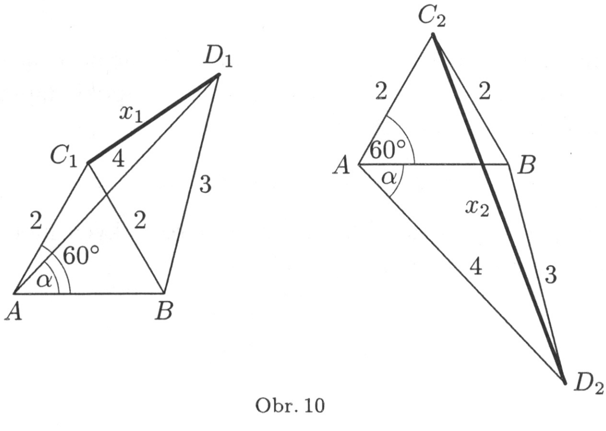
$$(v+1)(2v^2+v-1)=0.$$

Odtiaľ obdržíme $v_2=v_1=-1$, $v_3=\frac{1}{2}$. Dosadením do (1) dospejeme k tomu istému záveru ako v prvom riešení: pre $c=-2$ je $u=2$ a $v=-1$, pre $c=\frac{1}{4}$ je $u=-1$, $v=\frac{1}{2}$.

B – I – 3

Všimněme si dvou stěn, jejichž hrany mají uvedené délky (čili těch dvou, které neobsahují šestou hranu neznámé délky). Jejich společná hrana (nechť je označena AB) nemůže mít délku 4 cm — pak by totiž nebyla pro některou z těchto stěn splněna trojúhelníková nerovnost. Rozlišíme proto zbylé dvě možnosti.

Nejprve vyřešíme případ, kdy společná hrana těchto stěn má délku 2 cm. Pak délka x hrany CD (mimoběžné s AB) je omezena situacemi, kdy stěny ABC, ABD leží v téže rovině (obr. 10).



Obr. 10

Jinak řečeno: úhel stěn ABC, ABD má velikost $0° < \varphi < 180°$. Omezující hodnoty pro délku x hrany CD jsou $x_1 = |C_1D_1|$ pro $\varphi = 0°$ a $x_2 = |C_2D_2|$ pro $\varphi = 180°$.

Z obr. 10 určíme pomocí kosinové věty pro trojúhelníky ABD_1 a ABD_2, že

$$\cos\alpha = \frac{4+16-9}{2\cdot 2\cdot 4} = \frac{11}{16}, \qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{135}}{16}.$$

Odtud

$$\cos(60° \pm \alpha) = \cos 60° \cos\alpha \mp \sin 60° \sin\alpha = \frac{1}{32}\left(11 \mp 9\sqrt{5}\right).$$

Z trojúhelníků C_1D_1A a C_2D_2A obdržíme opět pomocí kosinové věty:

$$x_{1,2} = \sqrt{4+16-16\cos(60° \mp \alpha)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(29 \mp 9\sqrt{5}\right)} \doteq \begin{cases} 2{,}107\,\text{cm}, \\ 4{,}956\,\text{cm}. \end{cases}$$

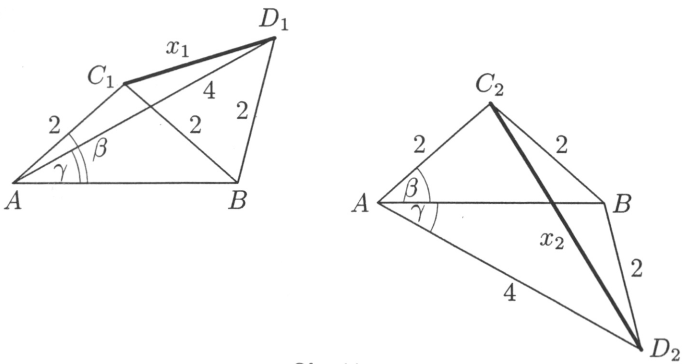
Šestá hrana čtyřstěnu má délku x větší než x_1 a menší než x_2.

Má-li ve čtyřstěnu $ABCD$ hrana AB společná stěnám, jejichž délky hran známe, délku 3 cm (obr. 11), zjistíme analogickým postupem jako v předchozím případě, že $\cos\beta = \frac{3}{4}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos\gamma = \frac{7}{8}$, $\sin\gamma = \frac{\sqrt{15}}{8}$. Je tedy

$$\cos(\beta \mp \gamma) = \frac{1}{32}\left(21 \pm \sqrt{105}\right),$$

$$x_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(19 \mp \sqrt{105}\right)} \doteq \begin{cases} 2{,}092\,\text{cm}, \\ 3{,}824\,\text{cm}. \end{cases}$$

V tomto případě může mít šestá hrana čtyřstěnu délku x; $x_1 < x < x_2$.



Obr. 11

B – I – 4

Rovnice mají tvar

$$3x^2 + 25x \pm c = 0; \quad c > 0.$$

Jejich diskriminanty jsou

$$D_{1,2} = 625 \mp 12c \tag{2}$$

a kořeny

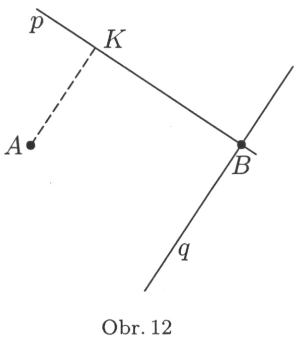
$$x_{1,2} = \frac{-25 \pm \sqrt{D_i}}{6}, \quad i = 1, 2.$$

Odtud $\pm\sqrt{D_i} = 25 + 6x_{1,2}$. Je-li některý z kořenů celé číslo, musí být také $\pm\sqrt{D_i}$ celé a dále některý z výrazů $-25 \pm \sqrt{D_i}$ je dělitelný šesti. Číslo $\sqrt{D_1} = \sqrt{625 - 12c} < 25$ budeme tedy hledat ve tvaru $\sqrt{D_1} = 6k \pm 1$, $k \in \mathbb{N}_0$. Ze vztahu (2) vyplývá, že $D_1 + D_2 = 1\,250$. $\sqrt{D_2} = \sqrt{1\,250 - D_1}$ musí být celé. Postupně volíme za $\sqrt{D_1}$ čísla 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 a určujeme $\sqrt{D_2}$. Zjistíme, že vyhovuje pouze $\sqrt{D_1} = 5$ nebo $\sqrt{D_1} = 17$.

V prvém případě je $c = \frac{1}{12}(625 - D_1) = 50$ a jedná se o rovnice $3x^2 + 25x \pm 50 = 0$, ve druhém případě to budou rovnice $3x^2 + 25x \pm 28 = 0$. Vyřešením rovnic se přesvědčíme, že vyhovují podmínkám úlohy. Existují tedy dvě různé dvojice rovnic, které jsou řešením dané úlohy.

B – I – 5

Označme p, q priamky, ktoré máme zostrojiť, tak, aby vzdialenosť bodu A od priamky q bola dvakrát väčšia ako od priamky q (obr. 12). Nech K je



Obr. 12

päta kolmice z A na p, teda $AK \parallel q$ a priamka BK je totožná s p. Priamky

p, q sú teda rovnobežky s odvesnami pravoúhleho trojuholníka ABK a tieto odvesny sú rovnobežkami s odvesnami ľubovoľného trojuholníka, ktorý je s trojuholníkom ABK rovnoľahlý.

Odtiaľ vyplýva konštrukcia. Zostrojíme pravouhlý trojuholník RST tak, aby odvesna RS mala akúkoľvek zvolenú dĺžku a odvesna ST bola dvakrát dlhšia. Tento trojuholník otočíme napríklad podľa stredu R o taký uhol, aby otočený trojuholník $RS'T'$ mal preponu RT' rovnobežnú so stranou AB. Priamky p, q dostaneme ako rovnobežky s priamkami RS', $S'T'$.

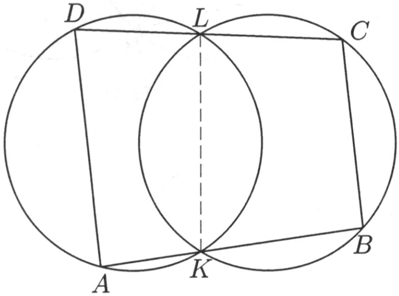
Úloha má dve riešenia, lebo okrem takto zostrojených priamok p, q vyhovujú aj ich obrazy v osovej súmernosti podľa priamky AB.

B – I – 6

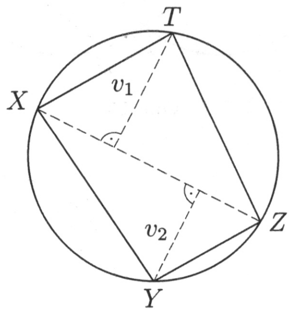
Čtyřúhelník maximálního obsahu musí obsahovat celou společnou tětivu kruhů, které jej pokrývají. Jinak bychom mohli jeho obsah zvětšit při zachování podmínek úlohy — mohli bychom posunout kruhy dál od sebe.

Rozeberme možnosti, které mohou nastat:

Čtyřúhelník (označme jej $ABCD$) se skládá ze dvou čtyřúhelníků vepsaných do kruhů — obr. 13. Tyto čtyřúhelníky $AKLD$, $KBCL$ mají maximální obsah, právě když to jsou čtverce.



Obr. 13



Obr. 14

Důkaz tvrzení, že ze všech čtyřúhelníků vepsaných do téhož kruhu má největší obsah čtverec, provedeme pomocí obr. 14. Čtyřúhelník $TXYZ$ je složen z trojúhelníků ZXY, ZXT. Jeho obsah je

$$O_{TXYZ} = \tfrac{1}{2}|XZ| \cdot v_1 + \tfrac{1}{2}|XZ| \cdot v_2 = \tfrac{1}{2}|XZ|(v_1 + v_2),$$

ale $|XZ| \leqq 2r$ a $v_1 + v_2 \leqq 2r$. Odtud

$$O_{TXYZ} \leqq \tfrac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r = 2r^2.$$

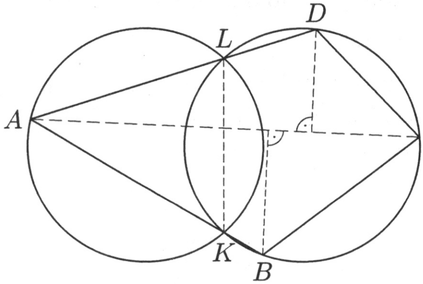
Rovnost nastane pouze pro čtverec vepsaný do daného kruhu.

Čtyřúhelník $ABCD$ ze zadání úlohy má v tomto případě maximální obsah $4r^2$.

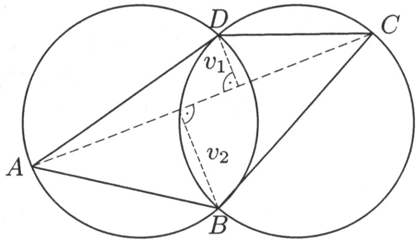
Čtyřúhelník se skládá z trojúhelníka vepsaného do prvního kruhu a pětiúhelníku vepsaného do druhého kruhu (obr. 15), nebo se skládá ze dvou trojúhelníků vepsaných do kruhů (obr. 16). V obou situacích odhadneme obsah čtyřúhelníku shora následujícím výrazem

$$\tfrac{1}{2}|AC| \cdot v_1 + \tfrac{1}{2}|AC| \cdot v_2 = \tfrac{1}{2}|AC| \cdot (v_1 + v_2)$$

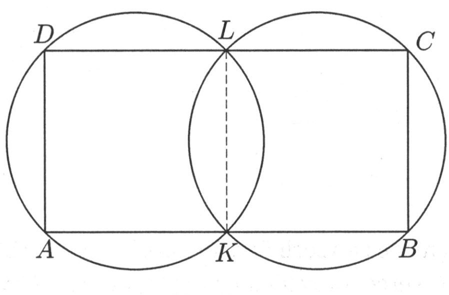
Podle obrázků platí $|AC| < 4r$, $v_1 + v_2 \leqq |BD| \leqq 2r$. V tomto případě je tedy obsah menší než $4r^2$.



Obr. 15



Obr. 16



Obr. 17

Čtyřúhelník maximálního obsahu je obdélník se stranami délky $\sqrt{2}$ cm a $2\sqrt{2}$ cm; je znázorněn na obr. 17.

B – S – 1

Je-li y hodnota dané odmocniny, je $x^2 - y^2 = p^3$, takže $(x-y)(x+y) = p^3$. Protože p je prvočíslo a čísla $x - y < x + y$ jsou přirozená, musí nastat jedna ze dvou možností

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = p^3, \end{cases} \quad \text{nebo} \quad \begin{cases} x - y = p, \\ x + y = p^2. \end{cases}$$

Snadný výpočet v obou případech dává

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 + p^3}{2}, \\ y = \dfrac{p^3 - 1}{2}, \end{cases} \quad \text{resp.} \quad \begin{cases} x = \dfrac{p^2 + p}{2}, \\ y = \dfrac{p^2 - p}{2}. \end{cases}$$

(Tato čísla jsou přirozená pro každé liché $p \geqq 3$.) Pro funkci $f(p) = \frac{1}{2}(p^3 + 1)$ platí

$$f(11) = 666 \quad \text{a} \quad f(13) = 1\,099 > 10^3,$$

a pro funkci $g(p) = \frac{1}{2}(p^2 + p)$

$$g(43) = 946 \quad \text{a} \quad g(47) = 1\,128 > 10^3.$$

Hledané největší trojciferné číslo x je proto rovno 946.

B – S – 2

Je-li u společný kořen obou rovnic, pak

$$0 = (u^3 - u + 3p - 6) - (u^3 + u + 4p - 10) = -2u - p + 4,$$

odkud $u = -\frac{1}{2}p + 2$. Dosazením zpět do libovolné z obou rovnic dostaneme podmínku na číslo p, která je po úpravě tvaru kubické rovnice $p(p^2 - 12p + 20) = 0$ s kořeny $p_1 = 0$, $p_2 = 2$ a $p_3 = 10$. Snadno se přesvědčíme, že daná dvojice rovnic pak má skutečně společný kořen u rovný 2, 1 resp. -3.

B – S – 3

V úhlu AMB sestrojíme nejdříve pomocný trojúhelník $K'L'M$, který je stejnolehlý s hledaným trojúhelníkem KLM v některé stejnolehlosti se středem M a kladným koeficientem, a přitom bod K' má od ramene MA vzdálenost 2 cm. Konstrukce bodů K' a L' je snadná: protože bod L' musí mít od ramene MB vzdálenost 1 cm, leží body K' a L' po řadě na polopřímkách PQ a RS, kde PQ dostaneme posunutím MA o 2 cm ve směru MB a RS posunutím MB o 1 cm ve směru MA. Protože bod L' je obrazem bodu K' při otočení se středem M o $60°$, určíme L' jako průsečík polopřímky RS s polopřímkou $P'Q'$, která je obrazem PQ ve zmíněném otočení. (Bod K' je pak obrazem L' při opačném otočení.) Zobrazíme-li nakonec body K' a L' ve stejnolehlosti se středem M a koeficientem $5/|MK'|$, dostaneme hledané body K a L. Důkaz správnosti je zřejmý, úloha má jediné řešení (i když existují dvě různá otočení kol M o $60°$, jen při jedné z nich protne obraz polopřímky PQ polopřímku RS).

B – II – 1

Umocníme-li první rovnici na druhou a od výsledku odečteme rovnici druhou, dostaneme $2xy = 4z$. Z dvojice rovnic $xy = 2z$ a $x + y = z + 2$ vyplývá, že $\{x, y\} = \{2, z\}$. Proto $x^3 + y^3 = z^3 + 8$, takže $a = 8$ je jediná hodnota, kdy má soustava řešení. Všechna řešení pro $a = 8$ jsou trojice (x, y, z) tvaru $(2, p, p)$ nebo $(p, 2, p)$, kde p je libovolný parametr.

B – II – 2

Pro výšku v na přeponu a odvěsny a, b platí $v\sqrt{a^2 + b^2} = ab$, neboli $v^2(a^2 + b^2) = a^2b^2$. Protože v je prvočíslo, plyne odtud $v \mid a$ nebo $v \mid b$. Nechť $a = mv$ pro vhodné celé $m > 1$ (bez újmy na obecnosti). Po dosazení do rovnice a krácení číslem v^2 dostaneme $m^2v^2 + b^2 = m^2b^2$, neboli $m^2v^2 = b^2(m^2 - 1)$. Z poslední rovnice plyne, že (kladné) číslo $m^2 - 1$ je druhou mocninou celého čísla, a to je spor, neboť

$$(m-1)^2 < m^2 - 1 < m^2 \quad \text{pro každé} \quad m > 1.$$

Žádný takový trojúhelník proto neexistuje.

Jiné řešení. Podle Eukleidovy věty výška v na přeponu a odvěsny a, b splňují rovnost $v^2 = \sqrt{a^2 - v^2}\sqrt{b^2 - v^2}$, neboli $v^4 = (a^2 - v^2)(b^2 - v^2)$. Protože v je prvočíslo a činitelé $(a^2 - v^2)$, $(b^2 - v^2)$ jsou dvě celá čísla větší než 1, je buď jedno z nich v a druhé v^3, nebo jsou obě rovna v^2. Druhá možnost vede k $a = b = v\sqrt{2}$, a to je spor, neboť číslo $v\sqrt{2}$ je iracionální. Zkoumejme první možnost: předpokládejme $a^2 - v^2 = v$ bez újmy na obecnosti. Z rovnosti $a^2 = v^2 + v$ plyne $v < a < v + 1$, což pro celá a, v nemůže nastat. Žádný takový trojúhelník proto neexistuje.

B – II – 3

Nerovnost $q^2 > 4pr$ jistě platí, pokud $pr < 0$. Pokud $pr \geqq 0$, rozlišíme dva případy: jsou-li obě čísla p a r nezáporná, pak můžeme umocnit nerovnost $q > p + r$ a dostat tak

$$q^2 > (p + r)^2 = (p - r)^2 + 4pr \geqq 4pr;$$

jsou-li obě čísla p a r nekladná, pak umocněním nerovnosti $2q \geqq -4p - r$ $(\geqq 0)$ dostaneme

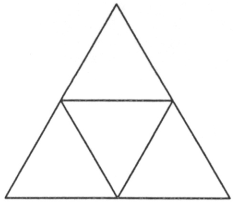
$$4q^2 > (4p + r)^2 = (4p - r)^2 + 16pr \geqq 16pr.$$

V obou případech tedy platí $q^2 > 4pr$.

Jiné řešení. Označíme-li $f(x) = px^2 + qx + r$, bude podle zadání $f(-1) < 0$ a $f(2) > 0$. To je možné, jen když diskriminant $q^2 - 4pr$ kvadratického trojčlenu f je kladný.

B – II – 4

Jednou z pěti plachet musejí být přikryty aspoň dva body z množiny, která je tvořena třemi vrcholy trojúhelníku a třemi středy jeho stran. To ale znamená, že strana plachty je přinejmenším rovna aspoň polovině strany celého záhonu. Ten se pak dá pokrýt čtyřmi plachtami podle obr. 18.



Obr. 18