Korespondenční seminář ÚV MO 1992/93

Korespondenční seminář je jednou z forem péče o talentované žáky. Vznikl ve 24. ročníku MO proto, aby bylo možno věnovat individuální péči i těm žákům, kteří neměli možnost navštěvovat speciální školy a pracovat v tamních seminářích. V tomto ročníku matematické olympiády se však poprvé nepodařilo rozběhnout korespondenční seminář ÚV MO způsobem obvyklým v dřívějších letech. Po roce 1990 bohužel ubylo času i ochotných spolupracovníků, a tak se podařilo rozeslat jen dvě sedmice úloh, které uvádíme dále (většina úloh byla vybrána z materiálu jury 33. MMO). K prvním sedmi úlohám zde najdete i jejich řešení.

Úlohy korespondenčního semináře

1.1 Označme $\mathbb{R}_+$ množinu všech nezáporných reálných čísel a pro daná kladná čísla a, b uvažujme funkci $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, která splňuje funkcionální rovnici

$$f\big(f(x)\big) + af(x) = b(a+b)x.$$

Dokažte, že tato rovnice má jediné řešení.

1.2 Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky AC, BD jsou na sebe kolmé, $AC \perp BD$. Vně daného čtyřúhelníku sestrojme nad jeho stranami čtverce $AEFB$, $BGHC$, $CIJD$, $DKLA$ (jejich vrcholy jsou značeny proti směru hodinových ručiček). Dokažte, že čtyřúhelníky Q_1, Q_2 ohraničené přímkami AG, BI, CK, DE, resp. AJ, BL, CF, DH jsou shodné.

1.3 Je-li f mnohočlen s racionálními koeficienty a α reálné číslo, pro které platí

$$\alpha^3 - \alpha = \big(f(\alpha)\big)^3 - f(\alpha) = 33^{1\,992},$$

pak pro každé $n \geqq 1$ platí

$$\big(f^{(n)}(\alpha)\big)^3 - f^{(n)}(\alpha) = 33^{1\,992},$$

kde $f^{(n)}(x) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{n}(x)\ldots))$ pro každé přirozené n. Dokažte.

1.4 V daném trojúhelníku ABC označme D a E průsečíky os úhlů ABC a ACB s odpovídajícími stranami AC, AB. Najděte velikosti úhlů trojúhelníku ABC, jestliže $|\sphericalangle BDE| = 24°$, $|\sphericalangle CED| = 18°$.

1.5 Dokažte, že $N = \dfrac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ je složené číslo.

1.6 Pro libovolné kladné celé číslo x označme

$$g(x) = \text{největší lichý dělitel čísla } x,$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{g(x)}, & \text{je-li } x \text{ sudé,} \\ 2^{\frac{1}{2}(x+1)}, & \text{je-li } x \text{ liché.} \end{cases}$$

Ukažte, že se v posloupnosti $x_1 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$ vyskytne číslo 1 992, a zjistěte nejmenší n, pro které $x_n = 1\,992$. Vyskytne se číslo 1 992 v dané posloupnosti víckrát?

1.7 V rovině jsou dány tři kružnice k, k_1, k_2, jež se navzájem dotýkají tak, že kružnice k_1, k_2 se dotýkají vně v bodě W ležícím uvnitř kružnice k. Navíc jsou na kružnici k dány tři body A, B, C tak, že přímka BC se dotýká v různých bodech obou kružnic k_1, k_2 a spojnice WA je zároveň jejich společnou tečnou, přičemž body A a W leží v téže polorovině určené přímkou BC. Dokažte, že W je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

2.1 Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x_1 + 3 \operatorname{cotg} x_1 &= 2 \operatorname{tg} x_2, \\ \operatorname{tg} x_2 + 3 \operatorname{cotg} x_2 &= 2 \operatorname{tg} x_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \operatorname{tg} x_n + 3 \operatorname{cotg} x_n &= 2 \operatorname{tg} x_1. \end{aligned}$$

2.2 Zjistěte, pro jaká přirozená čísla n existuje konvexní n-úhelník, kterému lze vepsat kružnici a jehož strany mají (v nějakém pořadí) velikosti $1, 2, \ldots, n$.

2.3 Jestliže f a g jsou mnohočleny s reálnými koeficienty a pro libovolná reálná čísla x, y platí

$$f(x) - f(y) = a(x, y)\big(g(x) - g(y)\big),$$

pak existuje mnohočlen h takový, že $f(x) = h\big(g(x)\big)$ pro libovolné reálné x. Dokažte.

2.4 Rozhodněte, zda existuje množina M s následujícími vlastnostmi:

(1) Množina M obsahuje 1 992 přirozených čísel.

(2) Každý prvek množiny M a součet libovolného počtu jejích prvků má tvar m^k (m, k jsou přirozená čísla, $k \geqq 2$)?

2.5 Jestliže

$$f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m,$$
$$g(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

jsou dva mnohočleny s reálnými koeficienty takové, že pro každé reálné číslo x je $f(x)$ druhou mocninou celého čísla, právě když je druhou mocninou celého čísla i $g(x)$, potom pro $m + n > 0$ existuje mnohočlen h s reálnými koeficienty takový, že $f(x) \cdot g(x) = \big(h(x)\big)^2$ pro každé x. Dokažte.

2.6 Nechť $\lfloor x \rfloor$ označuje největší celé číslo nejvýše rovné číslu x. Zvolme libovolné číslo x_1 v intervalu $\langle 0, 1)$ a definujme posloupnost $(x_k)_{k \geqq 1}$ vztahy

$$x_{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{je-li } x_n = 0, \\ \dfrac{1}{x_n} - \left\lfloor \dfrac{1}{x_n} \right\rfloor & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dokažte, že pro libovolné n přirozené platí

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n < \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_2}{F_3} + \ldots + \frac{F_n}{F_{n+1}},$$

kde $F_1 = F_2 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geqq 1$.

2.7 Jestliže $\alpha(n)$ označuje počet jedniček ve dvojkovém zápisu čísla n, potom

a) $\alpha(n)^2 \leqq \frac{1}{2}\alpha(n)\big(\alpha(n) + 1\big)$;

b) v předchozí nerovnosti nastává rovnost pro nekonečně mnoho kladných čísel n;

c) existuje posloupnost $(n_i)_{i=1}^{\infty}$, pro kterou podíl $\alpha(n_i^2)/\alpha(n_i)$ konverguje pro $n \to \infty$ k nule.

Dokažte.

Řešení úloh korespondenčního semináře

1.1 Nebylo zvlášť obtížné uhodnout, že $f(x) = bx$ je řešením dané rovnice; problém byl ukázat, že jiná neexistují. Uvedené řešení je podle *M. Hlawiczkové.*

Uvažujme libovolné číslo $y \in \mathbb{R}_+$ a definujme rekurentně posloupnost $\{a_n\}$ vztahy

$$a_0 = y, \qquad a_n = f(a_{n-1}),$$

tj. $a_1 = f(y)$, $a_2 = f\big(f(y)\big)$, ..., atd. Daná funkcionální rovnice pro $x = a_n$ pak říká, že

$$a_{n+2} + aa_{n+1} = b(a+b)a_n. \tag{1}$$

Charakteristická rovnice tohoto rekurentního vztahu (tj. rovnice, kterou dostaneme, hledáme-li řešení rekurentního vztahu mezi geometrickými posloupnostmi (q^n))

$$q^2 + aq = b(a+b)$$

má kořeny $q_1 = b$, $q_2 = -(a+b)$. Existují tedy reálná čísla A, B tak, že

$$a_n = Ab^n + B(-1)^n(a+b)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{2}$$

a tedy

$$\frac{a_n}{b^n} = A + B(-1)^n\Big(1 + \frac{a}{b}\Big)^n.$$

Protože $a/b > 0$, vyplývá z binomické věty, že

$$\Big(1 + \frac{a}{b}\Big)^n \geqq 1 + \frac{a}{b}n.$$

Je-li $B < 0$, je pro n sudé

$$\frac{a_n}{b^n} = A + B\Big(1 + \frac{a}{b}\Big)^n \leqq A + B\Big(1 + n\frac{a}{b}\Big) = nB\frac{a}{b} + (A + B),$$

což však bude (v rozporu se zadáním) menší než nula pro dostatečně velká n. Obdobně pro $B > 0$ a n liché

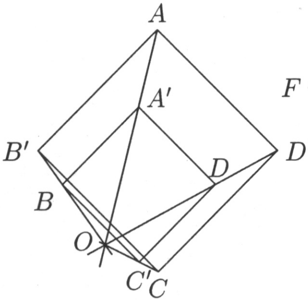
$$\frac{a_n}{b^n} = A - B\Big(1 + \frac{a}{b}\Big)^n \leqq A - B\Big(1 + n\frac{a}{b}\Big) = -nB\frac{a}{b} + (A - B),$$

což je menší než nula pro dostatečně velké n. Musí tedy být $B = 0$, tj. $a_n = Ab^n$. Tím pádem

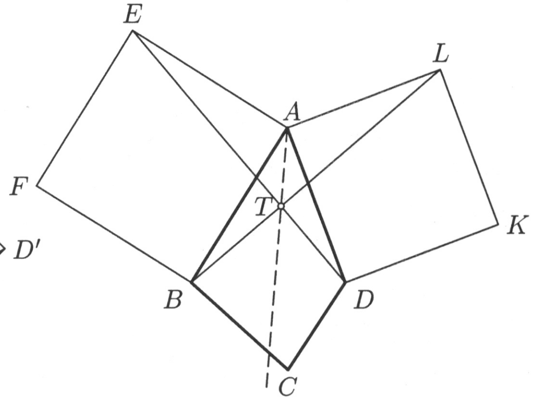
$$y = a_0 = A, \qquad f(y) = a_1 = Ab,$$

takže $f(y) = by$, což jsme chtěli dokázat.

1.2 Uvažujme nejprve dva čtverce $AB'CD'$ a $BC'DA'$ s úhlopříčkami AC a BD (obr. 30). Protože $BD \perp CD$, jsou oba uvedené čtverce stejnolehlé. To znamená, že přímky AA', BB', CC' a DD' procházejí společným bodem O (středem stejnolehlosti).

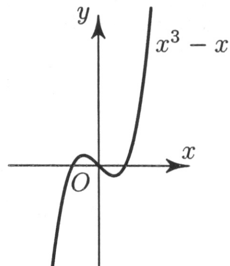


Obr. 30



Obr. 31

Otočení kolem vrcholu A o $+90°$ zřejmě zobrazí trojúhelník AED na trojúhelník ABL (obr. 31), takže přímky BL a ED jsou navzájem kolmé. Přitom množina všech takových bodů X, že otočení kolem středu X o $+90°$ zobrazí přímku BL na DE, je zřejmě osa úhlu BTD, kde T označuje průsečík přímek BL na DE. Na této ose tedy leží i vrchol A. Bod T leží na Thaletově kružnici nad průměrem BD stejně jako bod A'. Navíc osa úhlu BTD prochází středem oblouku BD, což je právě bod A', prochází tedy i středem O uvažované stejnolehlosti. Odtud plyne, že otočení kolem středu O o $+90°$ zobrazí přímku BL na DE, a analogicky zjistíme, že stejné otočení zobrazí i přímku AJ na CK, DH na BI a CF na AG. Čtyřúhelník Q_1 je tedy v uvedeném otočení obrazem čtyřúhelníku Q_2. Oba čtyřúhelníky jsou proto shodné.

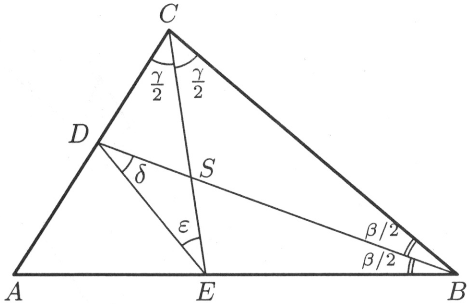


Obr. 32

1.3 Kubický mnohočlen $x^3 - x - 33^{1\,992}$ má pouze jeden reálný kořen. Stačí si uvědomit, jak vypadá funkce $g(x) = x^3 - x$ (obr. 32), uvedený mnohočlen z ní vznikne posunutím o konstantu $33^{1\,992}$ mnohem větší, než je lokální extrém pro $x = 1/\sqrt{3}$: pro

$x < 1$ je určitě $x^3 - x - 33^{1\,992} < 0$ a pro $x \geqq 1$ je funkce $x^3 - x - 33^{1\,992}$ ostře rostoucí. Protože α i $f(\alpha)$ jsou dle předpokladu úlohy reálné kořeny uvažovaného kubického mnohočlenu, je $f(\alpha) = \alpha$ a matematickou indukcí pak odtud plyne rovnost $f^{(n)}(\alpha) = \alpha$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

1.4 Označme S průsečík obou os BD a CE (obr. 33), $\beta = |\sphericalangle ABC|$,



Obr. 33

$\gamma = |\sphericalangle BCA|$, $\alpha = |\sphericalangle CAB|$, $\delta = |\sphericalangle SDE| = 24°$, $\varepsilon = |\sphericalangle SED| = 18°$. Podle vztahu pro vnější úhly trojúhelníku je

$$|\sphericalangle BDA| = \gamma + \frac{\beta}{2}, \qquad |\sphericalangle CEA| = \beta + \frac{\gamma}{2}.$$

Podle sinové věty v trojúhelníku SDE platí

$$\frac{|DS|}{|ES|} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta}.$$

Podle sinové věty v trojúhelnících DSA a ESA máme (víme, že SA je osou úhlu BAC)

$$\frac{|DS|}{|ES|} = \frac{|DS|}{|AS|}\frac{|AS|}{|ES|} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\gamma + \frac{\beta}{2})}\frac{\sin(\beta + \frac{\gamma}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Srovnáním obou vztahů vidíme, že

$$\sin\delta \cdot \sin\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) = \sin\varepsilon \cdot \sin\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right).$$

Zároveň platí

$$\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \pi - |\sphericalangle CSB| = \pi - |\sphericalangle DSE| = \delta + \varepsilon = 42°. \tag{1}$$

Až do tohoto bodu dospěli víceméně všichni řešitelé; korektně však tuto soustavu rovnic nevyřešil žádný.

Označíme-li

$$\beta + \frac{\gamma}{2} - 48° = x,$$

bude

$$\beta + \frac{\gamma}{2} = x + 48°,$$
$$\gamma + \frac{\beta}{2} = 3\,\frac{\beta+\gamma}{2} - \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) = 3 \cdot 42° - (x + 48°) = 78° - x,$$

a potřebujeme tedy řešit rovnici

$$\sin\delta \cdot \sin(x + 48°) = \sin\varepsilon \cdot \sin(78° - x),$$

tj.

$$\sin 24° \sin(x + 48°) = \sin 18° \sin(78° - x), \qquad (2)$$

neboli

$$\sin 24°(\sin 48° \cos x + \cos 48° \sin x) =$$
$$= \sin 18°(\sin 78° \cos x - \cos 78° \sin x). \qquad (3)$$

Označme na okamžik $\cos 36° = a$. Podle vzorců pro $\cos 2\alpha$ a $\cos 3\alpha$ pak bude

$$\cos 72° = 2a^2 - 1,$$
$$\cos 108° = 4a^3 - 3a.$$

Zároveň $\cos 108° = \cos(180° - 72°) = -\cos 72°$, takže

$$4a^3 + 3a^2 - 3a - 1 = 0,$$

čili

$$2(a+1)(2a^2 - a - 1) = 0.$$

Zřejmě $\cos 36° \neq -1$, takže $a + 1 \neq 0$, a tedy

$$2a^2 - a - \frac{1}{2} = 0,$$
$$2a^2 - 1 = a - \frac{1}{2},$$
$$\cos 72° = \cos 36° - \cos 60°.$$

Protože $\cos 72° = \sin 18°$ a $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$, dostáváme

$$\sin 18° = 2\sin 12° \sin 48°$$

a po vynásobení obou stran číslem $\sin 78° = \cos 12°$ vyjde

$$\sin 18° \sin 78° = \sin 24° \sin 48°.$$

Dosazením tohoto vztahu do (3) obdržíme rovnici

$$\sin 24° \cos 48° \sin x = -\sin 18° \cos 78° \sin x.$$

Pokud by platilo $\sin 24° \cos 48° = -\sin 18° \sin 78°$, byla by rovnice (3), a tedy i (2) splněna identicky pro všechna x; to však není pravda (např. pro $x = 78°$ je pravá strana (2) nulová, zatímco levá ne). Musí tedy být $\sin x = 0$, to znamená, že

$$x = k \cdot 180°, \qquad k \text{ celé.}$$

Avšak $x + 48° = \beta + \frac{1}{2}\gamma$ leží v intervalu $(0°, 180°)$, takže $k = 0$, a tedy

$$\beta + \frac{\gamma}{2} = 48°.$$

Odtud pomocí (1) plyne

$$\beta = 12°, \qquad \gamma = 72°,$$

a konečně

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 96°.$$

Tím je příklad vyřešen.

1.5 Označme $x = 5^{25}$, pak

$$\begin{aligned} N = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 &= (x^2 + 3x + 1)^2 - 5x(x+1)^2 = \\ &= \big((x^2 + 3x + 1) - 5^{13}(x+1)\big)\big((x^2 + 3x + 1) + 5^{13}(x+1)\big). \end{aligned}$$

Odtud je zřejmé, že N je složené přirozené číslo.

1.6 Je-li (pro nějaké a) $x_a = l \cdot 2^k$, kde l je liché a $k \geqq 1$, pak

$$x_{a+1} = \frac{x_a}{2} + 2^k = (l+2) \cdot 2^{k-1}.$$

Speciálně, pokud $x_a = 2^k$, dostáváme postupně

$$\left.\begin{aligned} x_a &= 2^k, \\ x_{a+1} &= 3 \cdot 2^{k-1}, \\ x_{a+2} &= 5 \cdot 2^{k-2}, \\ &\vdots \\ x_{a+j} &= (2j+1) \cdot 2^{k-j}, \\ &\vdots \\ x_{a+k} &= (2k+1) \cdot 2^0, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

načež

$$x_{a+(k+1)} = 2^{k+1}.$$

Protože $x_1 = 1 = 2^0$ a $x_2 = 2 = 2^1$, bude

$$x_{1+1} = 2^1, \qquad x_{1+1+2} = 2^2, \qquad x_{1+1+2+3} = 2^3, \qquad \dots,$$

čili

$$x_{m_k} = 2^k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde jsme označili $m_k = 1 + (1 + 2 + \ldots + k) = 1 + \frac{1}{2}k(k+1)$. Z $(*)$ pak vyplývá, že

$$x_{m_k+j} = (2j+1) \cdot 2^{k-j}, \qquad j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

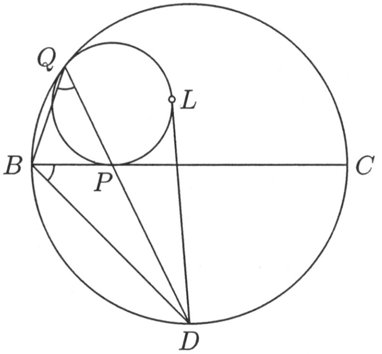
Protože $m_k + (k+1) = m_{k+1}$, jsou tímto vzorcem určeny všechny členy posloupnosti (tj. každé přirozené číslo n se dá, a přitom zřejmě jediným způsobem, napsat ve tvaru $n = m_k + j$, kde $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ a $j \in \in \{0, 1, \ldots, k\}$).

Nyní $1\,992 = 2^3 \cdot 249$, takže

$$x_{m_k+j} = 1\,992 \iff j = 124,$$
$$k = 127 \iff m_k + j = 1 + \frac{127 \cdot 128}{2} + 124 = 8\,253.$$

Číslo $1\,992$ se tedy vyskytne v posloupnosti $\{x_n\}$ právě jednou, a to pro $n = 8\,253$.

1.7 Označme Q resp. P body dotyku kružnice k_1 s kružnicí k resp. s přímkou BC, D střed toho oblouku BC kružnice k, který neobsahuje bod A, a budiž DL_1, $L_1 \in k_1$, ta tečna z bodu D ke kružnici k_1, která leží na opačné straně přímky QD než bod B (obr. 34). Uvažujme stejnolehlost



Obr. 34

se středem Q, která zobrazuje kružnici k_1 na kružnici k. Protože tečna ke k v bodě D je rovnoběžná s přímkou BC, zobrazí se při této stejnolehlosti bod P do bodu D. Odtud vyplývá, že Q, P a D leží v přímce. Dále $|BD| = |CD|$, takže $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle BQD|$ (obvodové úhly), trojúhelníky BQD a PBD jsou tedy podobné. Tím pádem

$$|DB|^2 = |DP| \cdot |DQ| = |DL_1|^2$$

(poslední rovnost plyne z mocnosti bodu D ke kružnici k_1), takže $|DL_1| = |DB|$. Podobná úvaha pro k_2 místo k_1 (jestliže definujeme L_2 pro k_2 analogicky jako L_1 pro k_1) ukazuje, že i $|DL_2| = |DC| = |DB|$. Platí tedy

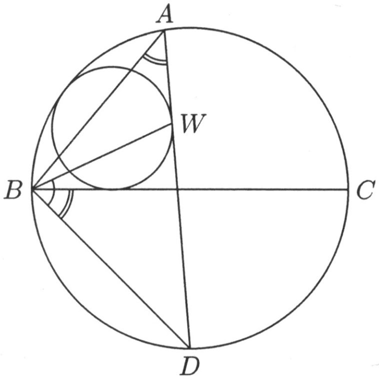
$$|DL_1| = |DL_2|.$$

Protože se však k_1 a k_2 dotýkají, plyne odtud, že $L_1 = L_2 = W$ a

$$|DW| = |DB| = |DC|. \qquad (*)$$

Protože $|BD| = |CD|$, shodují se obvodové úhly BAD a CAD, tj. AW je osa úhlu BAC (obr. 35).

Protože BWD je vnějším úhlem trojúhelníku ABW, platí $|\sphericalangle ABW| + |\sphericalangle BAW| = |\sphericalangle BWD|$. Dále díky $(*)$ $|\sphericalangle BWD| = |\sphericalangle WDB|$ a podle



Obr. 35

věty o obvodových úhlech $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle BAD|$. Celkem máme

$$|\sphericalangle ABW| = |\sphericalangle BWD| - |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle WBD| - |\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle CBW|,$$

a tedy BW je osa úhlu ABC. Bod W je tedy průsečíkem os úhlů trojúhelníku ABC, neboli středem jeho vepsané kružnice.