43. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategorie Z7

In: Milan Koman (editor); Jiří Binder (editor); Antonín Vrba (editor): 43. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1993/1994. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1996. pp. 28–35.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404987

Kategorie Z7

ÚLOHY I. KOLA

(Řešení úloh na str. 30)

Z7 – I – 1

V kině Rozkvět prodávali vstupenky na dětské představení po 4 korunách. Každý desátý divák měl vstup volný a každý stý vyhrál ještě 100 korun. Za poslední představení utržili celkem 2660 korun.

Hanka prohlásila: „To nemohlo být méně než 1000 diváků."

Ivana nesouhlasila: „Naopak, diváků nemohlo být více než 1000."

Petr ukončil debatu: „Mýlíte se obě."

Rozhodněte, kdo z nich měl pravdu. Svou odpověď zdůvodněte.

(*Koman*)

Z7 – I – 2

Představ si, že na papíře je narýsovaný trojúhelník a úsečka. Napiš postup, jak se z tohoto trojúhelníku dá narýsovat trojúhelník se stejným obsahem a s jednou stranou shodnou s danou úsečkou. Tvůj postup se musí hodit na každý trojúhelník a každou úsečku. (*Černek*)

Z7 – I – 3

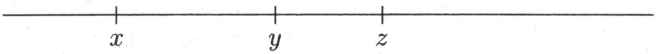
Franta, Jirka a Milan si koupili míče. Frantův míč byl o 20 % dražší než Milanův. Milanův byl o 20 % levnější než Jirkův. Jirkův míč byl o ... % ... než Frantův. Správně doplňte chybějící vytečkovaná místa. (*Černek*)

Z7 – I – 4

Kamilka a Kristýnka mají dvě stejně velké dřevěné koule. Kamilka ponořila svou kouli do zelené barvy tak, aby obarvila její polovinu. Potom změřila délku kružnice, kterou vytvořil barevný okraj. Kristýnka ponořila svoji kouli trochu hlouběji do modré barvy. Délka její okrajové kružnice měřila $\frac{4}{5}$ délky Kamilčiny kružnice. Jakou částí svého svislého průměru byla ponořena koule Kristýnky? (*Pytlová*)

Z7 – I – 5

Na číselné ose jsou vyznačena tři čísla x, y, z:



Narýsuj na této číselné ose obraz nuly, jestliže víš, že rozdíl dvou vyznačených čísel se rovná třetímu. Najdi všechna řešení. (*Černek*)

Z7 – I – 6

Města A, B, C jsou spojena přímými cestami. Jestliže jdu z města A do města B přes město C, cesta mi trvá 41 minut. Jestliže jdu stejnou rychlostí z města B do města C přes město A, cesta mi trvá 49 minut. Jestliže jdu stejnou rychlostí z města C do města A přes město B, cesta mi trvá 50 minut.

Ukaž, že trojúhelník ABC, který vytvářejí tato města, je pravoúhlý. (*Černek*)

ÚLOHY II. KOLA

(Řešení úloh na str. 34)

Z7 – II – 1

Objevili jsme zajímavé číslo. Když jsme před ně napsali jedničku, dostali jsme šesticiferné číslo A. Jestliže jsme však jedničku přidali na konec, dostali jsme jiné šesticiferné číslo, které bylo třikrát větší než A. Nalezněte původní pěticiferné číslo. (*Havlicová*)

Z7 – II – 2

V pravoúhlém lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$; $|\sphericalangle DAB| = 90°$) platí: $|AB| = 50\,\mathrm{mm}$; $|AC| = 40\,\mathrm{mm}$; $|BC| = 30\,\mathrm{mm}$. Vypočtěte obsah lichoběžníku.

Z7 – II – 3

Na ostrově Pavučina jsou 4 bělošské a 4 černošské osady. Každá osada je spojena přímočarými cestami se třemi osadami obydlenými obyvateli druhé pleti. Tyto cesty se nikde nekříží. Nakreslete, jak mohou být osady rozmístěny a jak mohou být cestami spojeny. (*Koman*)

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA

Řešení úlohy Z7–I–1 (str. 28)

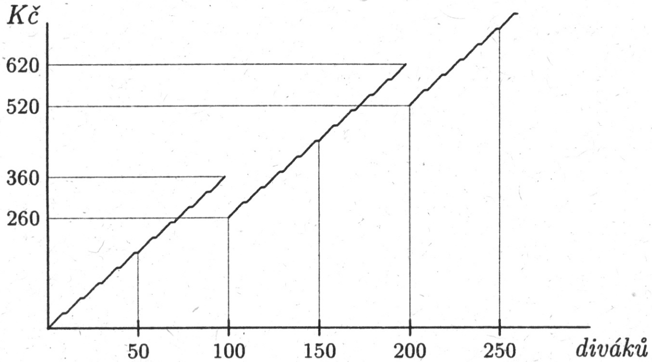
Protože každý desátý divák má vstup zdarma, vyberou v kinu Rozkvět od každé desítky diváků $9 \cdot 4 = 36$ korun. Od stovky diváků pak vyberou $10 \cdot 36$ korun, avšak po příchodu stého návštěvníka vyplatí výhru 100 korun, takže za každou úplnou stovku diváků utrží 260 korun (obr. 11).[1]

Kdyby do kina přišlo více než 1 000 diváků, bylo by po příchodu tisícího diváka v pokladně kina $10 \cdot 260$ korun. Zbývajících 60 korun by vybrali po příchodu dalších 16 diváků ($1 \cdot 36 + 6 \cdot 4 = 60$).

Kdyby do kina přišlo jen 999 diváků, nevypláceli by výhru pro tisícího diváka a v pokladně by měli dokonce $9 \cdot 260 + 360 = 2\,700$ korun. Tržby 2 660 Kč mohli proto dosáhnout i tehdy, kdyby přišlo o 10 platících diváků méně, tj. při 988 divácích (obr. 12).

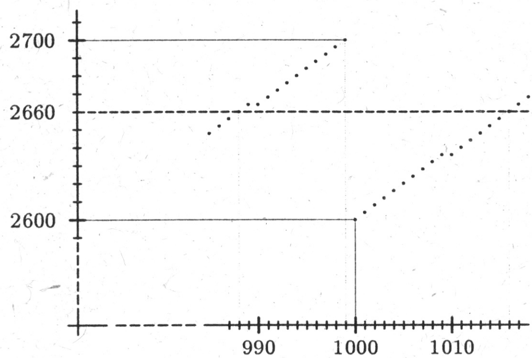
Do kina mohlo přijít 988 nebo 1 016 diváků. Pravdu měl Petr.

[1] Závislost tržby na počtu návštěvníků je na obrázku 11 znázorněna pouze schematicky, neboť ve skutečnosti jsou počty diváků jen celá čísla.



Závislost tržby na počtu návštěvníků

Obr. 11



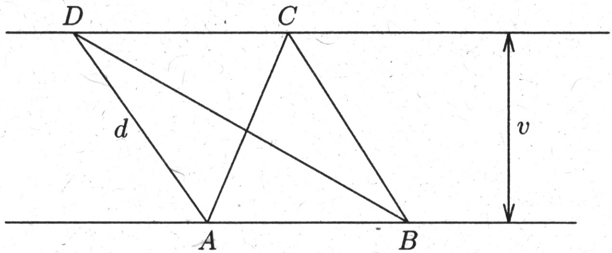
Výřez z grafu závislosti tržby na počtu návštěvníků

Obr. 12

Řešení úlohy Z7–I–2 (str. 28)

Platí-li pro velikost dané úsečky d a pro některou výšku v daného trojúhelníka $v \leqq d$, je postup patrný z obr. 13, kde ABC je daný trojúhelník, $CD \| AB$, $AD = d$. Trojúhelníky ABC a ABD mají stejný obsah.

Není-li pro žádnou výšku v daného trojúhelníka $v \leqq d$, sestrojíme nejprve trojúhelník, který má stejný obsah a přitom některou výšku $v \leqq d$. Takový trojúhelník dostaneme, posuneme-li jeden vrchol daného trojúhel-



Obr. 13

níka dostatečně daleko po přímce rovnoběžné s protější stranou. Na tento trojúhelník již můžeme použít uvedenou konstrukci.

Další řešení. Úlohu můžeme řešit také tak, že nejprve sestrojíme (užitím podobnosti trojúhelníků) úsečku velikosti $v = \dfrac{a \cdot v_a}{d}$. Trojúhelník s jednou stranou stranou délky d, jehož výška na tuto stranu má velikost v, má pak stejný obsah jako daný trojúhelník.

Řešení úlohy Z7–I–3 (str. 28)

Ceny míčů, které si koupili Franta, Jirka a Milan označme postupně F, J a M. Podle zadání platí:

$$F = \frac{120}{100}M \quad \text{a} \quad M = \frac{80}{100}J$$

Odtud máme:

$$J = \frac{100}{80}M = \frac{100}{80} \cdot \frac{100}{120}F = \frac{100 \cdot 100}{8 \cdot 12} \cdot \frac{F}{100}F = \left(104\frac{1}{6}\right) \cdot \frac{F}{100}$$

Jirkův míč byl o $4\frac{1}{6}$, tj. přibližně o 4,17 % dražší než Frantův.

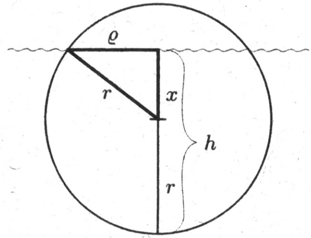
Řešení úlohy Z7–I–4 (str. 28)

Na obrázku je znázorněn svislý řez středem ponořené Kristýnčiny koule. Poloměr okrajové kružnice je označen ϱ, poloměr koule r a hloubka ponoření h. Protože Kamilka ponořila svojí kouli do poloviny, byl poloměr její okrajové kružnice roven poloměru koule r.

Podle zadání:

$$\frac{2\pi\varrho}{2\pi r}=\frac{\varrho}{r}=\frac{4}{5}$$

Máme určit, jaká část svislého průměru Kristýnčiny koule byla ponořena, tj. poměr $\frac{h}{2r}$. Abychom určili hloubku h ponoření koule, stačí určit velikost úsečky x. Tu vypočteme pomocí Pythagorovy věty:



Obr. 14

$$x=\sqrt{r^2-\varrho^2}$$

Pro hledaný poměr dostáváme:

$$\frac{h}{2r}=\frac{r+x}{2r}=\frac{r+\sqrt{r^2-\varrho^2}}{2r}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

Kristýnka ponořila kouli do $\frac{4}{5}$ jejího průměru.

Řešení úlohy Z7–I–5 (str. 29)

Viz řešení úlohy Z6-I-4 (str. 39).

Řešení úlohy Z7–I–6 (str. 29)

Označme a, b, c pořadě doby chůze v minutách mezi městy B a C, A a C, A a B. Podle zadání platí:

$$b+a=41$$
$$c+b=49$$
$$a+c=50$$

Dostali jsme soustavu tří rovnic pro tři neznámé a, b a c. Můžeme ji řešit například tak, že sečteme první dvě rovnice a od tohoto součtu odečteme rovnici třetí. Dostáváme $2b=40$, tj., $b=20$. Odtud z první rovnice máme $a=21$ a z druhé rovnice $c=29$.

Protože se pohybuji stále stejnou rychlostí, je trojúhelník tvořený městy A, B a C podobný trojúhelníku o stranách 20, 21 a 29. Protože $29^2 = 20^2 + 21^2$, je podle Pythagorovy věty tento trojúhelník pravoúhlý.

ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA

Řešení úlohy Z7–II–1 (str. 29)

Hledané pěticiferné číslo a jeho číslice označme $abcde$. Má platit:

$$1abcde \cdot 3 = abcde1$$

Aby poslední číslice na pravé straně byla 1, musí být $e = 7$. Máme tedy:

$$1abcd7 \cdot 3 = abcd71$$

Aby předposlední číslice na pravé straně byla 7, musí být $d = 5$. Analogicky najdeme postupně $c = 8$, $b = 2$, $a = 4$. Hledané číslo je 42 857.

Další řešení. Hledané pěticiferné číslo označme x. Připíšeme-li před ně jedničku, dostaneme $100\,000 + x$. Připíšeme-li za ně jedničku, dostaneme $10x + 1$. Má platit

$$3(100\,000 + x) = 10x + 1$$

neboli

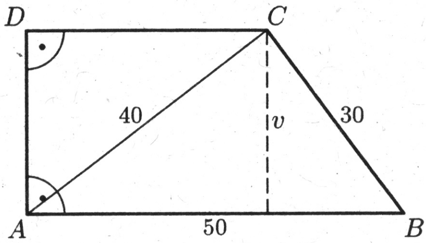
$$7x = 299\,999, \qquad x = 42\,857.$$

Řešení úlohy Z7–II–2 (str. 30)

Protože $30^2 + 40^2 = 50^2$, je podle Pythagorovy věty trojúhelník ABC pravoúhlý. Jeho výšku v na stranu AB vypočítáme tak, že dvojím způsobem vyjádříme obsah trojúhelníka ABC

$$\frac{40\,\mathrm{mm} \cdot 30\,\mathrm{mm}}{2} = \frac{50\,\mathrm{mm} \cdot v}{2},$$

odkud dostaneme $v = 24\,\mathrm{mm}$.



Obr. 15

Lichoběžník $ABCD$ je pravoúhlý s pravými úhly při vrcholech A a D, takže délku jeho strany CD můžeme vypočítat pomocí Pythagorovy věty:

$$|CD| = \sqrt{|AC|^2 - |AD|^2} = \sqrt{40^2 - 24^2}\,\mathrm{mm} = 32\,\mathrm{mm}$$

Obsah lichoběžníku $ABCD$ je:

$$S = \frac{(|AB| + |DC|) \cdot v}{2} = \frac{(50 + 32) \cdot 24}{2}\mathrm{mm}^2 = 984\,\mathrm{mm}^2$$

Řešení úlohy Z7–II–3 (str. 30)

Osady lze rozmístit a spojit různým způsobem, uvádíme dvě varianty: