43. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategorie Z6

In: Milan Koman (editor); Jiří Binder (editor); Antonín Vrba (editor): 43. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1993/1994. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1996. pp. 36–42.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404988

Kategorie Z6

ÚLOHY I. KOLA

(Řešení úloh na str. 38)

Z6 – I – 1

Michal má šesticiferné telefonní číslo. Je symetrické, to znamená, že je stejné, jako když ho čteme zezadu. Navíc první trojčíslí je 34krát větší než druhé. Urči Michalův telefon. (*Černek*)

Z6 – I – 2

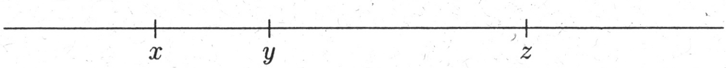
Na ostrově je 3 000 000 obyvatel. Na každých 400 obyvatel připadá jeden pes. Zjistilo se, že každým rokem se počet psů zvětšuje o $\frac{1}{25}$. Současně se však každým rokem zmenší počet lidí o $\frac{3}{250}$. Urči, na kolik obyvatel bude za dva roky připadat jeden pes.

Z6 – I – 3

Představ si, že na papíře je narýsovaný trojúhelník. Napiš postup, jak se dá z tohoto trojúhelníka narýsovat rovnoramenný trojúhelník se stejným obsahem. Tvůj postup se musí hodit na každý trojúhelník. (*Černek*)

Z6 – I – 4

Na obrázku je narýsována číselná osa a na ní jsou vyznačena tři čísla x, y, z. Narýsuj na této číselné ose obraz nuly, jestliže víš, že součet dvou vyznačených čísel se rovná třetímu.



Najdi všechna řešení. (*Černek*)

Z6 – I – 5

Z bílého moduritu jsem si vymodeloval krychli a obarvil jsem ji na modro. Potom jsem ji rozřezal na 64 stejných menších krychliček. Je možné z těchto krychliček složit modrobílou šachovnici? Dá se to udělat tak, aby svislé stěny celého okraje šachovnice byly modré? Svou odpověď vysvětli. (*Černek*)

Z6 – I – 6

V jednom městě mají tři kina. V kině Naděje prodávají vstupenky po 7 korunách. V kině Víra prodávají lístky po 8 korunách, ale každý desátý návštěvník má vstup zdarma. V kině Láska prodávají vstupenky po 9 korunách a též každý desátý návštěvník má vstup zdarma,ale navíc každý stý vyhrává 100 korun. Každé z těchto kin vybralo na posledním představení 4 144 korun. Kolik diváků navštívilo jednotlivá kina? (*Koman*)

ÚLOHY II. KOLA

(Řešení úloh na str. 41)

Z6 – II – 1

Krychle o hraně délky 8 cm byla namočena do zelené barvy a potom rozřezána na malé krychle o hraně 1 cm. Pak z nich byl slepen zelený kvádr o podstavě velikosti $4\,\mathrm{cm}^2$. Jakou mohl mít největší výšku? Kolik malých krychlí zbylo po slepení nejvyššího možného kvádru? (*Mída*)

Z6 – II – 2

V kinu Morava prodávají vstupenky po 16 korunách. Každý desátý divák má slevu rovnou $\frac{1}{2}$ původní ceny a každý patnáctý divák má slevu o $\frac{1}{4}$ původní ceny.

a) Kolik zaplatí za vstupenku divák, který má nárok na obě slevy?

b) Kolik diváků navštívilo kino, jestliže se za vstupenky vybralo 1 620 korun? (*Koman*)

Z6 – II – 3

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, kde $|AB| = 6, |BC| = 5, |CD| = 7$, $|AD| = 8$ a $|AC| = 5{,}5$. Označme K střed strany BC, M střed strany AD, L střed úhlopříčky BD a N střed úhlopříčky AC. Co můžete říct o čtyřúhelníku $KLMN$? Vypočtěte jeho obvod. (*Volfová*)

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA

Řešení úlohy Z6–I–1 (str. 36)

Druhé trojčíslí nemůže být větší než 029, aby jeho 34 násobek byl trojciferný, a proto začíná nulou. Hledané číslo má tedy tvar (ab00ba) , přitom 34 · (ba) = (ab0). Je tedy buď $a = 0$ nebo $a = 5$.

Pro $a = 0$ dostáváme číslo 000000, které patrně nebude hledaným telefonním číslem (připustíme-li, že je šesticiferné).

Pro $a = 5$ máme 34 · (b5) = (5b0) a zřejmě vyhovuje jen $b = 1$. Snadno se přesvědčíme, že číslo 510015 vyhovuje.

Řešení úlohy Z6–I–2 (str. 36)

1. řešení: Sestavíme tabulku jak se mění počty obyvatel a počty psů.

	Dnes	Za rok	Za 2 roky
Počet obyvatel	3 000 000	2 964 000	2 928 432
Počet psů	7 500	7 800	8 112

Jeden pes připadá po 2 letech na 2 928 432 : 8 112 = 361 obyvatel.

2. řešení: Označme o počet obyvatel a p počet psů. Po r letech bude počet obyvatel roven $o_r = o \cdot \left(\frac{247}{250}\right)^r$ a počet psů $p_r = p \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^r$, jeden pes bude pak připadat na $\frac{o_r}{p_r} = \frac{o}{p} \cdot \left(\frac{247}{260}\right)^r$ obyvatel.

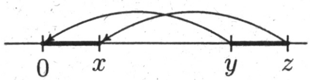
V našem případě je $\frac{o}{p} = 400$, $r = 2$ a jeden pes bude připadat na 361 obyvatel.

Řešení úlohy Z6–I–3 (str. 36)

Vrcholem C vedeme přímku rovnoběžnou se stranou AB trojúhelníku ABC, její průsečík s osou úsečky AB označíme D. Trojúhelník ABD je rovnoramenný a má stejný obsah jako trojúhelník ABC.

Řešení úlohy Z6–I–4 (str. 36)

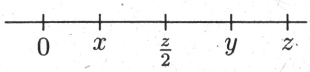
Kdybychom znali body 0, x, y, snadno bychom našli bod $z = x + y$: úsečku $0x$ bychom posunuli tak, aby bod 0 přešel do bodu y — přitom by bod x přešel do bodu z. My známe body x, y, z a bod 0 najdeme obráceným postupem: úsečku yz posuneme tak, aby bod z přešel do bodu x — přitom bod y přejde do bodu 0: Tím jsme vyřešili úlohu pro případ



Obr. 16

$z = x + y$. Případy $x = y + z$ a $y = x + z$ řešíme analogicky.

Jiné řešení (pro $z = x + y$): Střed úsečky xy je číslo $\frac{x+y}{2} = \frac{z}{2}$ a tento bod je tedy středem úsečky $0z$.



Obr. 17

Řešení úlohy Z6–I–5 (str. 37)

Obarvená krychle se skládá z 64 krychliček, z nich má

8 obarveny 3 stěny (rohové),
24 obarveny 2 stěny (12 hran původní krychle, v každé hraně 2),
24 obarvenu 1 stěnu (6 stěn původní krychle, v každé stěně 4),
8 neobarvenu žádnou stěnu (uprostřed původní krychle).

Pro šachovnici potřebujeme 32 krychliček s aspoň jednou stěnou modrou (máme jich dokonce 56) a 32 krychliček s aspoň jednou stěnou bílou (všechny). Mají-li být svislé stěny též modré, potřebujeme:

2 krychličky s 3 modrými stěnami (do 2 rohů),

14 krychliček s aspoň 2 modrými stěnami (2 do zbývajících rohů a po 3 při každém kraji),

30 krychliček s aspoň 1 stěnou modrou (tři při každém kraji, 18 doprostřed).

Takže i šachovnici se svislými modrými stěnami můžeme složit.

Řešení úlohy Z6–I–6 (str. 37)

Kino Naděje navštívilo $4\,144 : 7 = 592$ diváků.

V kině Víra vyberou za každou celou desítku diváků $9 \cdot 8 = 72$ korun. Protože $4\,144 : 72 = 57$ (zbytek 40), přišlo 57 celých desítek diváků, kteří zaplatili $4\,144 - 40 = 4\,104$ korun. Zbylých 40 korun zaplatilo dalších 5 diváků. Celkem to bylo 575 diváků.

V kině Láska utrží za každou celou desítku $9 \cdot 9 = 81$ korun, ale za celou stovku je výnos jen $10 \cdot 81 - 100 = 710$ korun. Protože $4\,144 : 710 = 5$ (zbytek 594), bylo v kině 5 celých stovek diváků, kteří zaplatili 3 550 korun. Zbylých 594 korun zaplatilo 7 celých desítek diváků ($594 : 81 = 7$, zbytek 27) a 3 další jednotlivci ($27 : 9 = 3$). Celkem bylo v kině Láska 573 diváků.

Řešení úlohy Z6–II–1 (str. 37)

Kvádr s podstavou $4\,\text{cm} \times 1\,\text{cm}$ složit nemůžeme — k tomu bychom potřebovali i krychličky se čtyřmi zelenými stěnami, které rozřezáním krychle nevzniknou. Kvádr má tedy podstavu $2\,\text{cm} \times 2\,\text{cm}$ a kromě osmi vrcholových krychliček se třemi zelenými stěnami obsahuje už jen krychličky se dvěma zelenými stěnami. Těch máme $12 \cdot 6 = 72$. Nejvyšší možná výška hranolu bude 20cm.

Z krychle jsme dostali $8^3 = 512$ krychliček, na kvádr jsme jich použili $4 \cdot 20 = 80$, zbývá 432 krychliček.

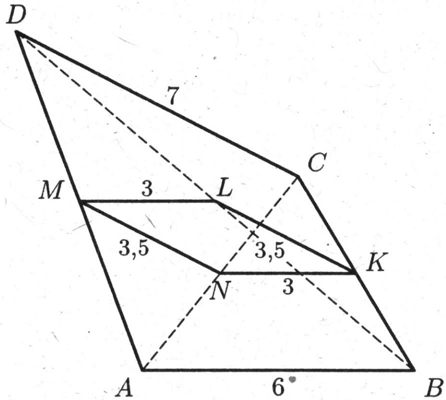
Řešení úlohy Z6–II–2 (str. 37)

a) První sleva (připadající na každého desátého diváka) je 8 korun, druhá (připadající na každého patnáctého diváka) je 4 koruny. Obě slevy připadnou na každého 30. diváka. Ten zaplatí 4 koruny.

b) Každá celá třicítka diváků zaplatí $30 \cdot 16 - 3 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = 480 - 32 = 448$ korun. Každá lichá patnáctka diváků zaplatí $15 \cdot 16 - 8 - 4 = 240 - 12 = 228$ korun. Protože $1\,620 : 448 = 3$ (zbytek 276), $276 = 228 + 48$, $48 = 16 \cdot 3$, kino Morava navštívilo $3 \cdot 30 + 15 + 3 = 108$ diváků.

Řešení úlohy Z6–II–3 (str. 38)

Řešení budeme sledovat na obrázku 18. Úsečka ML je střední příčka v trojúhelníku ABD rovnoběžná se stranou AB, tj. $|ML| = \frac{1}{2}|AB| = 3$. Úsečka NK je střední příčka v trojúhelníku ABC rovnoběžná se stranou AB, tedy $|NK| = \frac{1}{2}|AB| = 3$.



Obr. 18

Obdobně z trojúhelníků ACD, BCD dostáváme $|MN| = |KL| = \frac{1}{2}|CD| = 3{,}5$, $MN \parallel LK \parallel DC$.

Čtyřúhelník má dvě dvojice rovnoběžných stran $ML \parallel NK$, $KL \parallel MN$, jde tedy o rovnoběžník. Jeho obvod je roven $2 \cdot 3 + 2 \cdot 3{,}5 = 13$.