43. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategorie Z5

In: Milan Koman (editor); Jiří Binder (editor); Antonín Vrba (editor): 43. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1993/1994. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1996. pp. 43–48.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404989

Kategorie Z5

ZADÁNÍ ÚLOH I. KOLA

(Řešení úloh na str. 45)

Z5 – I – 1

Napiš datum svého narození a datum, ve kterém budeš oslavovat (nebo jsi už oslavoval) 4 000. den svého života. (*Černek*)

Z5 – I – 2

Jan a Petr měli vykopat jámu. „Kopej ty“, povídá Petr, „ty vykopeš půlku takové jámy za tři hodiny.“ Jan se nedal: „To je pravda, ale ty vykopeš za dvě hodiny tolik, jako já za čtyři.“ Nakonec kopali společně. Za jak dlouho jámu vykopali? (*Malynár*)

Z5 – I – 3

Petr: „Podívej se, jaké mám zajímavé číslo: 231213. Mezi trojkami má tři číslice, mezi dvojkami má dvě číslice a mezi jedničkami jednu číslici.“

Kája: „To se mi líbí, já zkusím něco podobného pro deseticiferné číslo. Mělo by mít mezi pětkami pět číslic, mezi čtyřkami čtyři číslice, mezi trojkami tři, mezi dvojkami dvě a mezi jedničkami jednu číslici.“

Petr: „Také jsem to už zkoušel, ale nepodařilo se mi to. Myslím, že takové číslo nejde najít.“

Existuje takové číslo, nebo má pravdu Petr, že takové číslo nejde najít? Určete správnou odpověď a zdůvodněte ji. (*Kyselová*)

Z5 – I – 4

V jednom městě mají tři kina. V kině Slunce prodávají vstupenky za 7 korun. V kině Mars za 8 korun, ale každý desátý návštěvník má vstup zdarma. V kině Venuše prodávají vstupenky za 9 korun, také každý desátý návštěvník má vstup zdarma, ale navíc každý stý návštěvník vyhrává 100 korun. V kině Mars vybrali na posledním představení 2776 korun. Kolik by vybrali v kině Venuše a Slunce, kdyby je navštívil stejný počet diváků? (Pod vybranými penězi rozumíme ty, které zůstanou po zakoupení lístků v pokladně. Výhry se platí z vybraných peněz, tedy ve Venuši vyberou o to méně.) (*Koman*)

Z5 – I – 5

Devět zápalek můžeme na stůl položit tak, že na stole vytvoří 4 rovnostranné trojúhelníky se stranami po jedné zápalce.

Kolik nejméně zápalek potřebujete, chcete-li vytvořit šestkrát více stejných trojúhelníků? (*Koman*)

Z5 – I – 6

Na ostrově Pavouk je 6 měst. Každé z nich je spojené přímými cestami s některými čtyřmi ze zbývajících měst. Tyto cesty se nikde nekřižují. Nakreslete, jak mohou být tato města rozmístěna. Do obrázku zakreslete také cesty. Na sousedním ostrově Pavučina je pouze pět měst. Chystali se též vybudovat mezi městy přímé cesty tak, aby z každého města vedly tři cesty. Nějak se jim to však nedařilo. Dokázali byste jim vysvětlit, že to není možné? Zapište to. (*Volfová*)

ZADÁNÍ ÚLOH II. KOLA

(Řešení úloh na str. 48)

Z5 – II – 1

Dnes je středa 13. dubna 1994. Vypočtěte, na který den v týdnu připadne 1. leden roku 2000.

Z5 – II – 2

V kinu Morava prodávají vstupenky po 16 korunách. Každý desátý divák má slevu o $\frac{1}{2}$ původní ceny a každý patnáctý divák má slevu o $\frac{1}{4}$ původní ceny.

a) Kolik zaplatí za vstupenku divák, který má nárok na obě slevy?

b) Kolik korun vybrali v kině od 855 diváků?

Z5 – II – 3

Ze 35 kartiček hry PEXESO byl sestaven obdélník složený ze 7 řad a 5 sloupců. Z něho bylo odebráno 10 kartiček. Délka obvodu zbylého útvaru se však nezměnila. Nakreslete aspoň 3 možnosti.

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA

Řešení úlohy Z5–I–1 (str. 43)

Protože 4 000 dnů je téměř 11 roků, jsou v tomto intervalu tři přestupné roky. 11 roků od data narození je přesně $11 \cdot 365 + 3 = 4\,018$ dnů. Čtyřtisící den života tedy oslavíme 18 dnů před jedenáctými narozeninami. Například žák, který se narodil 3.2.1983, oslaví 4 000. den života 16.1.1994.

Řešení úlohy Z5–I–2 (str. 43)

Protože Petr pracoval dvakrát rychleji než Jan, vykopal při společné práci Jan $\frac{1}{3}$ jámy a Petr $\frac{2}{3}$ jámy. Dále víme, že Jan by vykopal půlku jámy za 3 hodiny, takže třetinu jámy kopal 2 hodiny.

Vykopání jámy trvalo Janovi s Petrem 2 hodiny.

Jiná varianta řešení: Podle zadání vykope Jan za 3 hodiny $\frac{1}{2}$ jámy, tj. za 1 hodinu $\frac{1}{6}$ jámy. Petr pracuje dvakrát rychleji, vykope tedy za 1 hodinu $\frac{1}{3}$ jámy. Budou-li pracovat oba, vykopou za hodinu dohromady $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ jámy. Celou jámu vykopou za 2 hodiny.

Řešení úlohy Z5–I–3 (str. 43)

Po několika pokusech dojdeme k domněnce, že takové deseticiferné číslo neexistuje. Abychom se o tom přesvědčili, budeme postupně do šablony ␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣ pro deseticiferné číslo vepisovat dvojice stejných číslic a ukážeme, že to nelze provést tak, aby výsledné číslo mělo požadované vlastnosti.

Při doplňování čísel budeme postupovat od číslic, pro jejíž vepsání máme nejméně možností, tj. postupně od pětek po jedničky.

Aby mezi dvěma pětkami zůstalo pět volných míst, můžeme je umístit do deseticiferného čísla pouze čtyřmi způsoby:

5␣␣␣␣␣5␣␣␣
␣5␣␣␣␣␣5␣␣
␣␣5␣␣␣␣␣5␣
␣␣␣5␣␣␣␣␣5

Vzhledem k symetrii stačí prověřit pouze první dvě možnosti.

Uvažujme nyní první možnost a zkusme do čísla vepsat dvě čtyřky tak, aby mezi nimi byly čtyři místa. Máme tři možnosti:

5␣4␣␣␣54␣␣
5␣␣4␣␣5␣4␣
5␣␣␣4␣5␣␣4

V prvním případě na místo jednotek můžeme zapsat pouze trojku, ale pak nelze požadovaným způsobem doplnit cifru na místě desítek.

V druhém případě na místo jednotek můžeme zapsat buď jedničku (pak nemáme kam vepsat trojku), anebo trojku. Vepíšeme-li na místo jednotek trojku, dostaneme číslo 5␣␣4␣35␣43. V něm lze na místo stovek vepsat pouze dvojku. Dostaneme číslo 5␣␣4235243, ve kterém mezi jedničkami nebude žádná cifra.

V třetím případě muže být na místě desítek pouze dvojka, tím na místě stovek pouze trojka. Dostaneme nakonec opět nevyhovující číslo 5113425324.

Tím jsme vyloučili první možnost pro umístění pětek. Stejným postupem ukážeme, že ani doplňování čísla ␣5␣␣␣␣␣5␣␣, nelze dokončit při dodržení požadovaných vlastností.

Pravdu měl Petr.

Řešení úlohy Z5–I–4 (str. 43)

Od každé desítky diváků vyberou v kinu Mars $9 \cdot 8 = 72$ korun. Kino

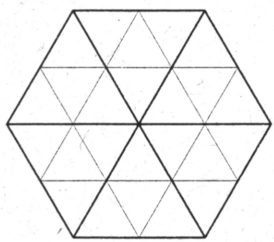
Mars navštívilo $2\,776 : 72 = 38$ (zbytek 40) celých desítek diváků. Zbývajících 40 korun vybrali od 5 diváků. Do kina Mars přišlo 385 diváků.

Od stejného počtu diváků by v kinu Slunce vybrali $7 \cdot 385 = 2\,695$ korun.

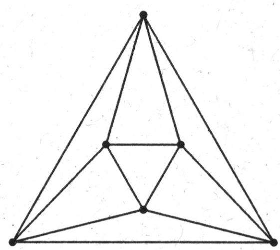
V kinu Venuše od 38 desítek diváků vyberou $38 \cdot (9 \cdot 9) = 3\,078$ korun a od posledních pěti diváků $5 \cdot 9 = 45$ korun. Na výhrách přitom vyplatili 300 korun. V pokladně kina Venuše zůstalo $3\,078 + 45 - 300 = 2\,833$ korun.

Řešení úlohy Z5–I–5 (str. 44)

Nejméně zápalek spotřebujeme, jestliže jich co nejvíce bude tvořit společnou stranu dvou trojúhelníků, to znamená tehdy, bude-li co nejméně zápalek ležet na obvodu sestaveného obrazce. Řešení je na obr. 19.



Obr. 19



Obr. 20

Řešení úlohy Z5–I–6 (str. 44)

Možné rozmístění měst na ostrově Pavouk je zakresleno na obr. 20.

K řešení druhé části úlohy si stačí uvědomit, že každá cesta má dva konce, takže celkový počet konců musí být sudý. Kdyby na ostrově Pavučina vedly z každého z pěti měst tři cesty, byl by celkový počet konců 15, což není sudé číslo.

ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA

Řešení úlohy Z5–II–1 (str. 44)

14. duben 1 994 – 31. prosinec 1 994 je $365 - 31 - 28 - 31 - 13 = 262$ dní, 1. leden 1 995 až 31. prosince 1 999 je $365 + 366 + 365 + 365 + 365 = 1\,826$ dní. Od 13. dubna 1 994 do 1. ledna 2 000 uplyne $262 + 1\,826 + 1 = 2\,089$ dní. Protože $2\,089 : 7 = 298$ a zbytek je 3, je 2 089 dní celkem 298 týdnů a 3 dny. Dnes je středa, proto 1. ledna roku 2 000 bude sobota.

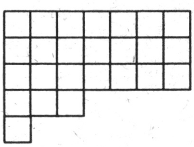
Řešení úlohy Z5–II–2 (str. 45)

a) 4 koruny; bude to každý 30. divák.

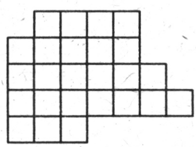
b) $855 : 10 = 85$ a zbude 5. Proto 85 diváků má poloviční slevu, ta činí celkem $85 \cdot 8 = 680$ korun. $855 : 15 = 57$. Proto 57 diváků má ještě slevu 4 koruny (čtvrtina ze 16), to je celkem $57 \cdot 4 = 228$ korun. Slevy činí dohromady $680 + 228 = 908$ korun z celkové částky $855 \cdot 16 = 13\,680$ korun. Vybralo se $13\,680 - 908 = 12\,772$ korun.

Řešení úlohy Z5–II–3 (str. 45)

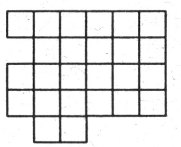
Řešení je mnoho. Kartičky se mohou odebírat „okolo rohů" původního obdélníku, např. obrázky 21 a 22. Jsou i řešení, kde vznikne „záliv", v takovém případě musí ubýt jedna řada nebo jeden sloupec, např. obr. 23 (ubyl sloupec), 24 (ubyl řádek).



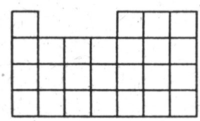
Obr. 21



Obr. 22



Obr. 23



Obr. 24