45. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie C

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Richard Kollár (editor); Václav Sedláček (editor); Jaromír Šimša (editor); Pavel Töpfer (editor): 45. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1995/1996. 37. mezinárodní matematická olympiáda. 8. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1997. pp. 23–36.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404997

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

V rovnostranném trojúhelníku ABC o straně délky a označme K, L, M po řadě středy stran AB, BC, CA. Uvnitř nebo na obvodu trojúhelníku ABC je zvolen bod S. Dokažte, že platí rovnost

$$|AS|^2 + |BS|^2 + |CS|^2 = |KS|^2 + |LS|^2 + |MS|^2 + \frac{3}{4}a^2.$$

(*J. Zhouf*)

C – I – 2

Rozhodněte, zda lze množinu čísel 1, 2, …, 1995 rozdělit na dvě skupiny tak, aby v první skupině bylo

a) dvakrát, b) třikrát, c) čtyřikrát

více čísel než ve druhé skupině a aby součty čísel v obou skupinách byly stejné. (*J. Zhouf*)

C – I – 3

Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$) s pravým úhlem při vrcholu A, je-li $|AC| = 5\,\mathrm{cm}$, $|BD| = 7\,\mathrm{cm}$ a úhlopříčka AC dělí obsah lichoběžníku na dvě části v poměru $2:1$. (*J. Švrček*)

C – I – 4

Určete všechny dvojice x, y přirozených čísel, pro které současně platí:

a) $2\,100 < xy < 2\,500$,

b) $0{,}85 < \dfrac{x}{y} < 0{,}9$,

c) podíl $\dfrac{y+x}{y-x}$ je celočíselný. (*J. Zhouf*)

C – I – 5

Určete všechna čtyřciferná čísla A, která mají pro každé $k = 2, 3, 4, \ldots, 9$ tuto vlastnost: Vepíšeme-li cifru k mezi prostřední cifry čísla A, dostaneme pěticiferné číslo, jež je násobkem čísla k. (*J. Šimša*)

C – I – 6

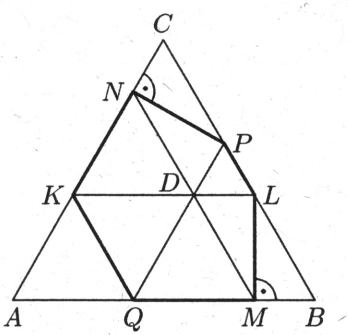
Určete délku přepony pravoúhlého trojúhelníku, znáte-li poloměr r kružnice vepsané a poloměr R kružnice připsané k přeponě tohoto trojúhelníku (tj. kružnice, která se dotýká zvnějšku přepony a prodloužení obou odvěsen trojúhelníku.) (*P. Leischner*)

C – S – 1

Rozložte všemi možnými způsoby číslo 1 996 na součet několika (aspoň dvou) po sobě jdoucích přirozených čísel. (*J. Zhouf*)

C – S – 2

Uvnitř rovnostranného trojúhelníku ABC je dán bod D, jímž jsou postupně vedeny rovnoběžky KL, MN, PQ se stranami AB, BC, CA jako na obrázku. Bod D je zvolen tak, že vzniklý šestiúhelník $QMLPNK$ má pravé úhly při vrcholech M a N. Určete poměr obsahů šestiúhelníku $QMLPNK$ a trojúhelníku ABC (obr. 1). (*J. Zhouf*)



Obr. 1

C – S – 3

Určete všechna pěticiferná čísla A s vlastností: Zapíšeme-li za sebe (zleva doprava) zbytky, které dává číslo A při dělení čísly $2, 3, 4, 5$ a 6, dostaneme opět výchozí číslo A. (*J. Šimša*)

C – II – 1

Zjistěte, pro která přirozená čísla n je možno rozdělit množinu čísel $1, 2, \ldots, n$ na dvě skupiny tak, aby v první skupině bylo třikrát více čísel než ve druhé a aby součty čísel v obou skupinách byly stejné.

(*R. Kollár*)

C – II – 2

Určete všechny body S daného čtverce $ABCD$, pro které platí

$$|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|.$$

(*J. Zhouf*)

C – II – 3

Najděte nejmenší pěticiferné číslo $\overline{abcde}$, jehož všechny číslice jsou nenulové a které je dělitelné každým z čísel $\overline{e}$, $\overline{de}$, $\overline{cde}$, $\overline{bcde}$. (*J. Zhouf*)

C – II – 4

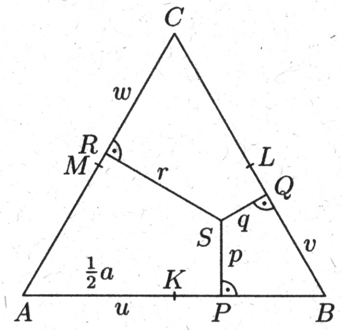
V polorovině ABM sestrojte kružnice k_1 a k_2, které se dotýkají přímky AB po řadě v daných bodech A a B, dotýkají se vně v nějakém bodě T a jejich společná tečna v tomto bodě prochází daným bodem M.

(*J. Švrček*)

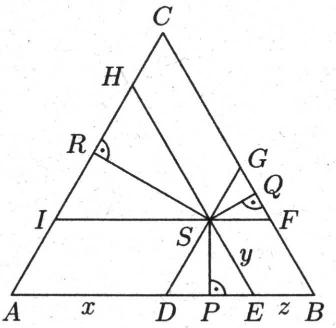
C – I – 1

Označme P, Q, R paty kolmic vedených z bodu S ke stranám AB, BC, CA (obr. 2) a dále označme

$$|SP| = p, \quad |SQ| = q, \quad |SR| = r,$$
$$|AP| = u, \quad |BQ| = v, \quad |CR| = w.$$



Obr. 2



Obr. 3

Platí

$$|AS|^2 + |BS|^2 + |CS|^2 =$$
$$= (u^2 + p^2) + (v^2 + q^2) + (w^2 + r^2),$$
$$|KS|^2 + |LS|^2 + |MS|^2 =$$
$$= \left(u - \tfrac{1}{2}a\right)^2 + p^2 + \left(v - \tfrac{1}{2}a\right)^2 + q^2 + \left(w - \tfrac{1}{2}a\right)^2 + r^2 =$$
$$= u^2 + p^2 + v^2 + q^2 + w^2 + r^2 - a(u + v + w) + \tfrac{3}{4}a^2.$$

Abychom dokázali platnost dané rovnosti, stačí, když dokážeme, že platí

$$-a(u + v + w) = -\tfrac{3}{2}a^2, \qquad \text{tj.} \qquad u + v + w = \tfrac{3}{2}a.$$

Bodem S vedeme rovnoběžky IF, EH, GD se stranami AB, BC, CA trojúhelníku ABC (obr. 3). Označme

$$|AD| = |GC| = |HI| = x, \quad |DE| = |BF| = |IA| = y,$$
$$|EB| = |FG| = |CH| = z.$$

Porovnáme-li obrázky 1 a 2, můžeme psát

$$\begin{aligned} u + v + w &= \left(x + \tfrac{1}{2}y\right) + \left(y + \tfrac{1}{2}z\right) + \left(z + \tfrac{1}{2}x\right) = \\ &= \tfrac{3}{2}(x + y + z) = \tfrac{3}{2}a, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. Využili jsme toho, že $x + y + z = a$.

Jiným způsobem zapsané řešení (obr. 2, obr. 3):

$$\begin{aligned} &|AS|^2 + |BS|^2 + |CS|^2 = \\ &\quad = \left(x + \tfrac{1}{2}y\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 + \\ &\qquad + \left(y + \tfrac{1}{2}z\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2 + \left(z + \tfrac{1}{2}x\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 = \\ &\quad = 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + xy + yz + zx, \\ &|KS|^2 + |LS|^2 + |MS|^2 + \tfrac{3}{4}a^2 = \\ &\quad = \left(x + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}a\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 + \left(y + \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2}a\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2 + \\ &\qquad + \left(z + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}a\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \tfrac{3}{4}a^2 = \\ &\quad = 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + xy + yz + zx + \tfrac{3}{4}a^2 - \tfrac{3}{2}a^2 + \tfrac{3}{4}a^2 = \\ &\quad = 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + xy + yz + zx \end{aligned}$$

(využili jsme toho, že $x + y + z = a$). Vidíme, že dokazovaná rovnost skutečně platí.

Poznámka. V obrázcích je bod S zakreslen uvnitř trojúhelníku ABC, všechny výpočty jsou však v pořádku i v případě, že bod S leží na obvodu tohoto trojúhelníku.

C – I – 2

Nejprve si připravíme dva rozklady:

$$1\,995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + 1\,995 &= \frac{1995 \cdot 1996}{2} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 2^2 \cdot 499}{2} = \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 499. \end{aligned} \tag{2}$$

a) Rozdělení do skupin existuje, není však jednoznačné, uvedeme jen jednu možnost. První dvě třetiny čísel od 1 do 1995 mají součet

$$1 + 2 + \ldots + 1\,330 = \frac{1\,330 \cdot 1\,331}{2} = 665 \cdot 1\,331,$$

zbývající třetina (obsahující 665 čísel) má součet

$$1\,331 + \ldots + 1\,995 = \frac{665}{2}(1\,995 + 1\,331) = 665 \cdot 1\,663.$$

Druhý součet je větší o $332 \cdot 665 = 166 \cdot 1\,330$, proto vyměníme 166 čísel, která se liší o 665. V první skupině pak budou např. čísla

$$1,\ 2,\ \ldots,\ 1\,164,\ 1\,830,\ 1\,831,\ \ldots,\ 1\,995,$$

ve druhé skupině čísla

$$1\,165,\ 1\,166,\ \ldots,\ 1\,330,\ 1\,331,\ \ldots,\ 1\,829.$$

b) Množinu nelze rozdělit, protože číslo 1 995 není dělitelné čtyřmi.

c) První čtyři pětiny čísel od 1 do 1 995 mají součet

$$1 + 2 + \ldots + 1\,596 = \frac{1\,596 \cdot 1\,597}{2} = 1\,597 \cdot 798,$$

zbývající pětina (obsahující 399 čísel) má součet

$$1\,597 + \ldots + 1\,995 = \frac{399 \cdot (1\,597 + 1\,995)}{2} = 893 \cdot 798.$$

Jelikož součet čtyř pětin nejmenších čísel je větší než součet jedné pětiny největších čísel, nelze podmínky úlohy splnit.

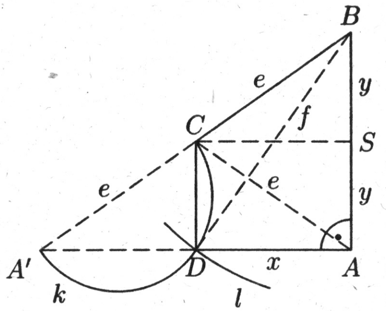
C – I – 3

Jelikož obsahy trojúhelníků ABC a CDA jsou v poměru 2 : 1 (obsah trojúhelníku ABC je větší než obsah trojúhelníku CDA, neboť $|BD| > |AC|$), a protože tyto trojúhelníky mají stejnou výšku $|DA|$, platí $|AB| = 2|CD|$. Proto též $|BC| = |AC| = |A'C| = e$ (obr. 4).

Konstrukce:

1. úsečka BA', $|BA'| = 2e$, kde $e = 5\,\text{cm}$, bod C ve středu úsečky BA',
2. kružnice k s průměrem $A'C$,
3. kružnice $l(B; f)$, kde $f = 7\,\text{cm}$,
4. bod $D \in k \cap l$,
5. bod A tak, aby D byl střed AA'.

Úloha má jediné řešení.



Obr. 4

Úlohu je též možno řešit pomocí výpočtu. Pro trojúhelníky ABD a ACD můžeme napsat Pythagorovu větu (obr. 4):

$$x^2 + (2y)^2 = f^2 = 49,$$
$$x^2 + y^2 = e^2 = 25.$$

Z této soustavy získáme $x = \sqrt{17}$, $y = 2\sqrt{2}$. Konstrukce je pak zřejmá z obr. 4.

C – I – 4

Nejprve určíme všechny dvojice x, y, které splňují podmínky a) a b), vyřešením soustavy nerovnic

$$2\,100 < xy < 2\,500, \tag{1}$$
$$0{,}85y < x < 0{,}9y. \tag{2}$$

Jestliže nerovnice (2) vynásobíme číslem y, dostaneme

$$0{,}85y^2 < xy < 0{,}9y^2. \tag{3}$$

Porovnáním nerovnic (1) a (3) zjistíme, že $0{,}85y^2 < 2\,500$ a zároveň $2\,100 < 0{,}9y^2$, odkud $48 < y < 55$.

Jestliže nerovnice (2) vynásobíme číslem x, dostaneme

$$0{,}85xy < x^2 < 0{,}9xy. \tag{4}$$

Porovnáním nerovnic (1) a (4) zjistíme, že $\frac{x^2}{0{,}9} < 2\,500$ a zároveň $2\,100 < \frac{x^2}{0{,}85}$, odkud $42 < x < 48$.

Získali jsme 30 možných dvojic x, y. Jelikož nešlo o ekvivalentní úpravy, je pro tyto dvojice nutné ověřit všechny tři podmínky. Podmínce a) nevyhovuje dvojice 47, 54. Po ověření podmínky b) zbude 11 dvojic x, y: 43, 49; 43, 50; 44, 49; 44, 50; 44, 51; 45, 51; 45, 52; 46, 52; 46, 53; 46, 54; 47, 53. Z nich podmínku c) splňuje jediná dvojice: $x = 45$, $y = 51$.

Jiné řešení. Označíme-li $k = \frac{y+x}{y-x}$, pak $\frac{x}{y} = \frac{k-1}{k+1} = 1 - \frac{2}{k+1}$. Odtud a z podmínky b) zjistíme, že pro celé číslo k platí $13 \leqq k \leqq 18$. Proto je zlomek $\frac{x}{y}$ roven jednomu ze zlomků (zapsány jsou v základním tvaru)

$$\frac{6}{7},\quad \frac{13}{15},\quad \frac{7}{8},\quad \frac{15}{17},\quad \frac{8}{9},\quad \frac{17}{19}.$$

Nyní zbývá posoudit, které z těchto zlomků lze rozšířit přirozeným číslem n na zlomek $\frac{x}{y}$ tak, aby byla splněna podmínka a). Např. pro první zlomek je $x = 6n$, $y = 7n$ a podmínka má tvar $2\,100 < 42n^2 < 2\,500$, žádné n ji však nesplňuje. Analogicky vyzkoušíme ostatní zlomky. Úloha má jediné řešení $x = 45$, $y = 51$.

C – I – 5

Je-li $A = \overline{pqrs}$ ciferný zápis hledaného čísla, pak číslo s vepsanou cifrou k můžeme rozložit na součet

$$\overline{pqkrs} = \overline{pq0rs} + k \cdot 100.$$

Protože druhý sčítanec je dělitelný číslem k, lze vlastnost čísla A vyjádřit takto: Pěticiferné číslo B se zápisem $B = \overline{pq0rs}$ je dělitelné každým z čísel 2, 3, 4, …, 9, neboli každým z čísel 40, 9 a 7. Číslo B je násobkem čtyřiceti, právě když je násobkem čtyřiceti dvojčíslí $\overline{rs}$, tj. $\overline{rs} \in \{00, 40, 80\}$. Rozlišíme jednotlivé případy.

a) $\overline{rs} = 00$. Číslo $B = \overline{pq000}$ je dělitelné čísly 9 a 7 jedině v případě $\overline{pq} = 63$. Dostáváme první řešení $A = 6\,300$.

b) $\overline{rs} = 40$. Číslo $B = \overline{pq040}$ je dělitelné devíti, právě když $p + q = 5$ nebo $p + q = 14$. V prvním případě

$$B = 1\,000(10p + 5 - p) + 40 = 7(1\,285p + 720) + 5p,$$

což není násobek sedmi pro žádnou cifru $p \leqq 5$. V druhém případě

$$B = 1\,000(10p + 14 - p) + 40 = 7(1\,285p + 2\,005) + 5(p + 1),$$

což je násobek sedmi jedině pro $p = 6$. Tehdy $q = 8$ a $A = 6\,840$.

c) $\overline{rs} = 80$. Číslo $B = \overline{pq080}$ je dělitelné devíti, právě když $p + q = 1$ nebo $p+q = 10$. V prvním případě $B = 10\,080$, což je násobek sedmi, takže máme řešení $A = 1\,080$. V druhém případě

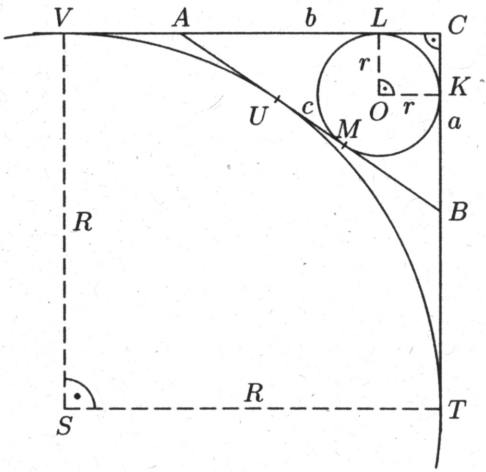
$$B = 1\,000(10p + 10 - p) + 80 = 7(1\,285p + 1\,440) + 5p,$$

což je násobek sedmi jedině pro $p = 7$. Tehdy $q = 3$ a $A = 7\,380$.

Odpověď: Hledaná čísla A jsou 1 080, 6 300, 6 840 a 7 380.

C – I – 6

Pro trojúhelník ABC (obr. 5) platí jednak



Obr. 5

$$a + b + c = (|BK| + r) + (|AL| + r) + c =$$
$$= |BM| + |AM| + 2r + c = c + 2r + c = 2c + 2r,$$

jednak

$$a + b + c = |BC| + |AC| + |AU| + |BU| =$$
$$= (|BC| + |BT|) + (|AC| + |AV|) = 2R.$$

Porovnáním obou rovností dostaneme $c = R - r$.

C – S – 1

Uvažujme zvlášť nejprve lichý, potom sudý počet sčítanců.

Pro lichý počet sčítanců požadovaného rozkladu musí platit

$$1\,996 = (s-k) + \bigl(s-(k-1)\bigr) + \ldots + \\ + (s-1) + s + (s+1) + \ldots + (s+k),$$

kde s je prostřední sčítanec, a sčítanců je $2k+1$, $k \geqq 1$. Přitom musí být $s > k$. Součet upravíme na tvar

$$2^2 \cdot 499 = 1\,996 = (2k+1)s,$$

odkud vychází jedině $2k+1 = 499$, $s = 4$, což dává $k = 249$. Tento případ není řešením, protože vyšlo $s < k$.

Pro sudý počet sčítanců musí platit analogicky

$$2^2 \cdot 499 = 1\,996 = (s-k) + \ldots + (s-1) + s + (s+1) + \ldots + \\ + (s+k) + (s+k+1) = \\ = (2k+2)s + (k+1) = (k+1)(2s+1),$$

kde s, $s+1$ jsou prostřední sčítance, $k \geqq 0$ a $s > k$. Odtud vychází jedině $2s+1 = 499$, $k+1 = 4$, což dává $s = 249$, $k = 3$.

Tedy jediný rozklad čísla 1 996 na požadovaný součet je

$$1\,996 = 246 + 247 + 248 + 249 + 250 + 251 + 252 + 253.$$

Jiné řešení (pro sudý i lichý počet sčítanců najednou). Hledaný rozklad má tvar

$$1\,996 = p + (p+1) + \ldots + (p+k) = \\ = (k+1)p + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(2p+k)}{2},$$

kde p je první sčítanec; sčítanců je $k+1$, $k \geqq 1$. Musí tedy platit $2^3 \cdot 499 = (k+1)(2p+k)$.

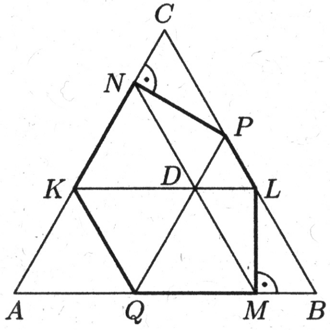
Je-li k sudé, může být jedině $k+1 = 499$, tj. $k = 498$ a $p < 0$, což není možné.

Je-li k liché, může být jedině $k+1=8$, tj. $k=7$, $p=246$, což dává jediné možné řešení

$$1\,996 = 246 + 247 + 248 + 249 + 250 + 251 + 252 + 253.$$

C – S – 2

Trojúhelník PCN je pravoúhlý a $|\sphericalangle PCN| = 60°$, proto $|CN| : |CP| = 1 : 2$ (obr. 6). Analogicky platí i $|MB| : |BL| = 1 : 2$.



Obr. 6

Jelikož $|NC| = |PD| = |PL|$ (trojúhelník LPD je rovnostranný), je

$$|CP| : |PL| : |LB| = 2 : 1 : 2$$

a obdobně

$$|AQ| : |QM| : |MB| = 2 : 2 : 1.$$

Je tedy

$$|AQ| = |AK| = |KQ| = |LB| = |PC| = \tfrac{2}{5}|AB|,$$
$$|MB| = |NC| = \tfrac{1}{5}|AB|.$$

Trojúhelník AQK je rovnostranný a spojením trojúhelníků PCN a LBM shodnými stranami NP a ML dostaneme trojúhelník shodný s trojúhelníkem AQK. Pro příslušné obsahy proto platí

$$S(QMLPNK) = S(ABC) - 2S(AQK) =$$
$$= \tfrac{1}{2}|AB| \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}|AB| - 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{5}|AB| \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \tfrac{2}{5}|AB| =$$
$$= \frac{17\sqrt{3}}{100}|AB|^2,$$

$$\frac{S(QMLPNK)}{S(ABC)} = \frac{\frac{17}{100}\sqrt{3}|AB|^2}{\frac{1}{4}\sqrt{3}|AB|^2} = \frac{17}{25}.$$

C – S – 3

Číslo A je nutně liché (jeho první číslice nemůže být 0, takže je 1), proto při dělení šesti dává zbytek 1, 3 nebo 5 (a tedy při dělení třemi dává po řadě zbytek 1, 0 nebo 2). Proto má zápis čísla A jeden z tvarů

$$11{*}{*}1, \quad 10{*}{*}3, \quad 12{*}{*}5,$$

které je možno s ohledem na dělení pěti upřesnit na

$$11{*}11, \quad 10{*}33, \quad 12{*}05.$$

S ohledem na dělení čtyřmi je tedy A rovno jednomu z čísel

$$11\,311, \quad 10\,133, \quad 12\,105.$$

Zbývá ověřit (např. pomocí ciferného součtu), zda zbytek při dělení třemi skutečně odpovídá druhé číslici zleva. Zjistíme, že tomu tak je pouze u prvního čísla.

Odpověď: Hledané číslo A je jediné: 11 311.

C – II – 1

Číslo n musí být dělitelné čtyřmi, neboť je čtyřnásobkem počtu prvků druhé skupiny. Jestliže do této skupiny zahrneme největší čísla, bude jejich součet

$$\begin{aligned} S_2 &= \left(3 \cdot \frac{n}{4} + 1\right) + \ldots + \left(3 \cdot \frac{n}{4} + \frac{n}{4}\right) = \\ &= \frac{n}{4} \cdot 3 \cdot \frac{n}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{4} \cdot \left(\frac{n}{4} + 1\right) = \frac{7n^2 + 4n}{32}. \end{aligned}$$

V první (početnější) skupině bude pak součet čísel

$$S_1 = 1 + 2 + \ldots + 3 \cdot \frac{n}{4} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{n}{4} \cdot \left(3 \cdot \frac{n}{4} + 1\right) = \frac{9n^2 + 12n}{32}.$$

Jelikož pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $S_1 > S_2$, neexistuje přirozené číslo n, které by splňovalo podmínky úlohy.

C – II – 2

Označme a velikost strany čtverce $ABCD$, x vzdálenost bodu S od strany AD a y vzdálenost bodu S od strany AB. Ze vztahu $|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|$ plyne

$$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(a-x)^2+(a-y)^2} = \\ = \sqrt{(a-x)^2+y^2}\sqrt{x^2+(a-y)^2}.$$

Umocněním na druhou, roznásobením a převedením na jednu stranu dostaneme

$$a^2(4xy-2ax-2ay+a^2)=0,$$
$$a^2(2x-a)(2y-a)=0.$$

Odtud $x = \frac{a}{2}$ nebo $y = \frac{a}{2}$. Této podmínce vyhovují všechny body, které leží na spojnici středů stran AB, CD nebo na spojnici středů stran AD, BC. Snadno se přesvědčíme, že všechny takovéto body S splňují rovnost $|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|$.

C – II – 3

Platí

$$\overline{abcde} = a \cdot 10^4 + \overline{bcde} = a \cdot 2^4 \cdot 5^4 + \overline{bcde}.$$

Aby bylo číslo $\overline{abcde}$ dělitelné číslem $\overline{bcde}$, musí jím být dělitelné i číslo $a \cdot 2^4 \cdot 5^4$. Protože je $e \neq 0$, musí být $\overline{bcde}$ lichý dělitel čísla $a \cdot 5^4$ (číslo $a \cdot 2^4$ není čtyřciferné ani pro $a = 9$).

Pokud $a = 1$, $a = 2$ nebo $a = 4$, neexistuje žádný takový dělitel. (Největší případný dělitel je $5^4 = 625$, který ale není čtyřciferný.)

Pokud $a = 3$, připadá v úvahu pouze dělitel $3 \cdot 5^4 = 1\,875$. Číslo $\overline{abcde} = 31\,875$ ale není dělitelné číslem 875.

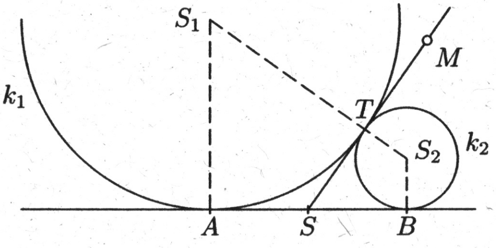
Pokud $a = 5$, připadá v úvahu pouze dělitel $5^5 = 3\,125$. Číslo $\overline{abcde} = 53\,125$ je skutečně dělitelné čísly 125, 25 i 5. (Případy $a > 5$ již není nutné diskutovat.)

Hledané číslo je $\overline{abcde} = 53\,125$.

Poznámka. Ostatní pěticiferná čísla s danou vlastností jsou 91 125, 91 875, 95 625.

C – II – 4

Označme S průsečík uvažované tečny obou hledaných kružnic s přímkou AB. Z vlastností tečen ke kružnici plyne, že je $|SA| = |ST| = |SB|$ (obr. 7), takže bod S je středem úsečky AB. Odtud již snadno plyne *konstrukce.*



Obr. 7

Nejprve sestrojíme střed S úsečky AB, pak najdeme bod T na polopřímce SM takový, že $|ST| = |SA|$. Střed S_1 hledané kružnice k_1 najdeme jako průsečík kolmice k přímce AB v bodě A a kolmice k přímce SM v bodě T. Podobně sestrojíme i střed S_2 kružnice k_2. Sestrojené kružnice k_1 a k_2 zřejmě mají všechny požadované vlastnosti.

Úloha má vždy jedno řešení.