Korespondenční seminář ÚV MO 1995/96

Ani v tomto ročníku matematické olympiády se nepodařilo rozběhnout korespondenční seminář ÚV MO způsobem obvyklým v dřívějších letech. Po roce 1990 bohužel ubylo času i ochotných spolupracovníků, a tak se podařilo rozeslat jen dvě sedmice úloh, které uvádíme dále.

Korespondenční seminář by měl i nadále zůstat součástí péče o talentované studenty a zejména pak přípravy těch nejlepších na mezinárodní matematickou olympiádu. Je to jedna z mála možností, jak naše úspěšné řešitele zásobovat originálními a obtížnými úlohami z materiálů jury MMO a z jiných národních olympiád, a zkvalitnit tak jejich individuální přípravu.

Úlohy korespondenčního semináře

1.1 Pro libovolná dvě nezáporná celá čísla a, b a celé číslo c takové, že $ab \geqq c^2$, existuje přirozené n a celá čísla $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ tak, že platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = b, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = c.$$

Dokažte.

1.2 Označme $\mathbb{R}_0$ množinu všech nenulových reálných čísel. Zjistěte, zda existuje funkce $f\colon \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0$, která současně splňuje následující tři podmínky:

a) existuje kladné číslo M takové, že $-M \leqq f(x) \leqq M$ pro každé $x \in \mathbb{R}_0$;

b) $f(1) = 1$;

c) pro každé $x \neq 0$ platí

$$f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2.$$

1.3 V rovině je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Zvolme na straně BC body A_1, A_2 (A_2 mezi A_1 a C), na straně AC body B_1, B_2 (B_2 mezi B_1

a A) a na straně AB body C_1, C_2 (C_2 mezi C_1 a B) tak, aby

$$|\sphericalangle AA_1A_2| = |\sphericalangle AA_2A_1| = |\sphericalangle BB_1B_2| = |\sphericalangle BB_2B_1| =$$
$$= |\sphericalangle CC_1C_2| = |\sphericalangle CC_2C_1|.$$

Přímky AA_1, BB_1 a CC_1 ohraničují jeden trojúhelník, přímky AA_2, BB_2 a CC_2 ohraničují druhý trojúhelník. Dokažte, že šest vrcholů uvedených trojúhelníků leží na jedné kružnici.

1.4 Nechť k je kladné celé číslo. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho druhých mocnin přirozených čísel, jež jsou tvaru $2^k n - 7$, kde n je přirozené.

1.5 Nechť $\mathbb{N}$ označuje množinu všech přirozených čísel. Dokažte, že existuje jediná funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že

$$f\big(m + f(n)\big) = n + f(m + 95)$$

pro všechna m a n z $\mathbb{N}$. Jaká je hodnota součtu $\sum\limits_{k=1}^{19} f(k)$?

1.6 Označme G těžiště daného čtyřstěnu $A_1A_2A_3A_4$ a A_1', A_2', A_3', A_4' průsečíky polopřímek A_1G, A_2G, A_3G a A_4G s opsanou mu kulovou plochou. Dokažte, že

$$|GA_1| \cdot |GA_2| \cdot |GA_3| \cdot |GA_4| \leqq |GA_1'| \cdot |GA_2'| \cdot |GA_3'| \cdot |GA_4'|$$

a

$$\frac{1}{|GA_1'|} + \frac{1}{|GA_2'|} + \frac{1}{|GA_3'|} + \frac{1}{|GA_4'|} \leqq \frac{1}{|GA_1|} + \frac{1}{|GA_2|} + \frac{1}{|GA_3|} + \frac{1}{|GA_4|}.$$

1.7 Najděte všechna přirozená čísla x a y taková, že $x + y^2 + z^3 = xyz$, kde z je největší společný dělitel čísel x a y.

2.1 Nechť $\mathbb{Z}$ označuje množinu všech celých čísel. Dokažte, že pro libovolná celá čísla A a B existuje celé číslo C, pro něž je průnik množin $\mathsf{M}_1 = \{x^2 + Ax + B : x \in \mathbb{Z}\}$ a $\mathsf{M}_2 = \{2x^2 + 2x + C : x \in \mathbb{Z}\}$ prázdný.

2.2 Během kongresu, kterého se účastní $12k$ vědců, se každý z účastníků pozdraví právě s $3k + 6$ kolegy. Přitom pro libovolné dva ze zúčastněných je počet lidí, kteří se pozdravili s oběma, týž. Kolik lidí se zúčastnilo kongresu?

2.3 Dokažte, že pro libovolné celé $n \geqq 3$ a libovolná reálná čísla x_1, $x_2, \ldots, x_n$ taková, že $x_i < x_{i+1}$ pro $1 \leqq i \leqq n-1$, platí

$$\frac{n(n-1)}{2} \sum_{i<j} x_i x_j > \left(\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) x_i \right) \left(\sum_{j=2}^{n} (j-1) x_j \right).$$

2.4 Nechť a, b a c jsou daná kladná reálná čísla. Najděte všechna kladná reálná čísla x, y a z taková, že

$$x + y + z = a + b + c$$

a

$$4xyz - (a^2 x + b^2 y + c^2 z) = abc.$$

2.5 Nechť p je liché prvočíslo. Určete všechna přirozená čísla x a y, pro něž $x \leqq y$, a přitom číslo $\sqrt{2p} - \sqrt{x} - \sqrt{y}$ je nezáporné a minimální.

2.6 Zjistěte, zda existuje posloupnost $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, ... nezáporných celých čísel, která současně splňuje následující tři podmínky:
a) v posloupnosti se vyskytuje každé z celých čísel 0, 1, 2, ... ;
b) každé kladné celé číslo se v posloupnosti vyskytuje nekonečněkrát;
c) pro každé $n \geqq 2$ platí

$$F\big(F(n^{163})\big) = F\big(F(n)\big) + F\big(F(361)\big).$$

2.7 Je dán bod O uvnitř konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ s obsahem S. Dále předpokládejme, že K, L, M a N jsou po řadě vnitřní body stran AB, BC, CD a DA. Jestliže $OKBL$ a $OMDN$ jsou rovnoběžníky, platí pro obsahy S_1 a S_2 čtyřúhelníků $AKON$ a $OLCM$ nerovnost

$$\sqrt{S} \geqq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}.$$

Dokažte.

Řešení úloh korespondenčního semináře

1.1 Pokud tvrzení úlohy platí pro čísla a, b a c, pak platí i pro čísla a, b a $-c$. Můžeme tedy předpokládat, že $c \geqq 0$. Protože tvrzení je symetrické vzhledem k číslům a a b, můžeme dále předpokládat, že $a \geqq b$.

Protože z nerovnosti $ab \geqq c^2$ plyne $\frac{1}{2}(a+b) \geqq \sqrt{ab} \geqq c$, je zároveň zřejmé, že musí být $a \geqq c$. Tvrzení úlohy dokážeme matematickou indukcí podle $a + b$.

Pokud $a + b = 0$, tvrzení triviálně platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny trojice (a, b, c), v nichž $a + b \leqq m$, a uvažujme trojici (a, b, c), v níž $a + b = m + 1$. Pokud je nyní $a \geqq b \geqq c$, stačí zvolit $n = a + b - c$ a vektory $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ tak, že

$$\boldsymbol{x} = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{a-c}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{c}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{b-c}),$$

$$\boldsymbol{y} = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{a-c}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{c}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{b-c}).$$

Nechť nyní $c > b$, což znamená, že musí být $a > c$. Pro trojici $(a + b - 2c, b, c - b)$ platí $(a + b - 2c)b = ab + b^2 - 2bc \geqq c^2 + b^2 - 2bc = (c - b)^2$ a zároveň $(a + b - 2c) + b < a < a + b = m + 1$, takže podle indukčního předpokladu pro trojici $(a + b - 2c, b, c - b)$ existují hledané vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ a snadno nahlédneme, že vektory $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}$ vyhovují pro trojici (a, b, c). Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

1.2 Předpokládejme, že taková omezená funkce existuje, a označme $S = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}_0} f(x)$. Zřejmě $f(2) = f(1 + 1) = 2$, tedy $S \geqq 2$. Z vlastností suprema plyne, že existuje $x_0 \in \mathbb{R}_0$, pro něž $f(x_0) \geqq \frac{5}{6}S$. Pro takové x_0 pak je

$$f\Big(x_0 + \frac{1}{x_0^2}\Big) = f(x_0) + f\Big(\frac{1}{x_0}\Big)^2 \geqq \frac{5}{6}S + f\Big(\frac{1}{x_0}\Big)^2, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{1}{x_0} + x_0^2\Big) &= f\Big(\frac{1}{x_0}\Big) + f(x_0)^2 \geqq \\ &\geqq f\Big(\frac{1}{x_0}\Big) + \frac{25}{36}S^2 \geqq f\Big(\frac{1}{x_0}\Big) + \frac{25}{18}S. \end{aligned} \tag{2}$$

Z nerovnosti (2) tak plyne $f\Big(\frac{1}{x_0}\Big) \leqq -\frac{7}{18}S$, čili $f\Big(\frac{1}{x_0}\Big)^2 \geqq \frac{7^2}{18^2}S^2$, a podle (1) je

$$S \geqq S\Big(\frac{5}{6} + \frac{7^2}{18^2}S\Big) \geqq S\Big(\frac{5}{6} + \frac{2 \cdot 7^2}{18^2}\Big) = \frac{184}{162}S > S.$$

To je spor, proto požadovaná funkce f neexistuje.

Jiné řešení. Předpokládejme, že taková omezená funkce existuje, a označme n *nejmenší* celé číslo takové, že $f(x) \leqq \frac{1}{4}n$ pro každé $x \in \mathbb{R}_0$. Protože $f(2) = 2$, musí být $n \geqq 8$.

Zvolme $x \in \mathbb{R}_0$ takové, že $f(x) > \frac{1}{4}(n-1)$. Potom

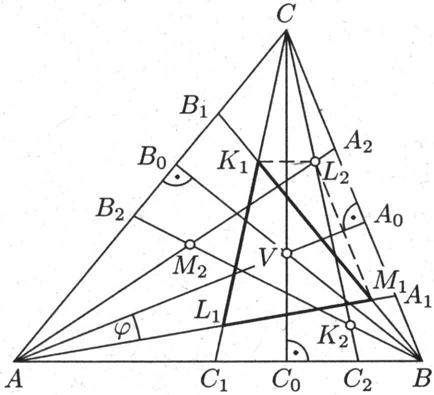
$$f\left(\frac{1}{x}\right)^2 = f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) - f(x) < \frac{1}{4}, \quad \text{tj.} \quad f\left(\frac{1}{x}\right) > -\frac{1}{2}$$

a zároveň

$$\left(\frac{n-1}{4}\right)^2 < f(x)^2 = f\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) - f\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{n}{4} + \frac{1}{2}.$$

Poslední nerovnost je ekvivalentní s nerovností $n^2 - 6n - 7 < 0$, která je splněna jen pro $n \in (-1, 7)$, což odporuje tomu, že $n \geqq 8$. Hledaná funkce f tedy neexistuje.

1.3 (Podle *Michala Beneše.*) Označme po řadě A_0, B_0, C_0 paty výšek trojúhelníku ABC a V jeho ortocentrum. Dále označme $\varphi = |\sphericalangle A_1AA_0|$, K_1, L_1, M_1 vrcholy trojúhelníku vymezeného přímkami AA_1, BB_1, CC_1 a K_2, L_2, M_2 vrcholy trojúhelníku vymezeného přímkami AA_2, BB_2, CC_2 (obr. 30).



Obr. 30

Z podobností trojúhelníků

$$ACA_0 \sim BCB_0, \quad ACA_2 \sim BCB_1$$

plyne

$$\frac{|CB_1|}{|CA_2|} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \tag{1}$$

Navíc pro úhly trojúhelníku $K_1L_1M_1$ platí

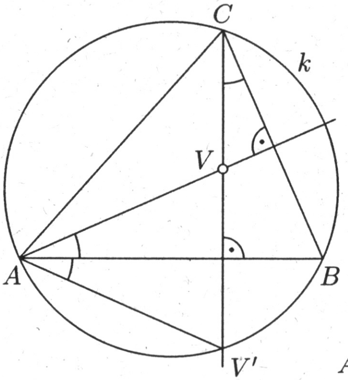
$$\begin{aligned}|\sphericalangle BK_1C_1| &= \pi - (|\sphericalangle BC_1K_1| + |\sphericalangle C_1BK_1|) = \\ &= \pi - (|\sphericalangle BC_1K_1| + |\sphericalangle ABB_0| + |\sphericalangle B_0BB_1|) = \\ &= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi + \frac{\pi}{2} - \alpha + \varphi\right) = \alpha,\end{aligned}$$

tj. $|\sphericalangle M_1K_1L_1| = \alpha$ a analogicky $|\sphericalangle K_1L_1M_1| = \beta$, $|\sphericalangle L_1M_1K_1| = \gamma$, takže ze sinové věty v trojúhelníku B_1K_1C dostaneme $|CK_1| = |CB_1|\dfrac{\sin|\sphericalangle CB_1K_1|}{\sin\alpha}$ a podobně $|CL_2| = |CA_2|\dfrac{\sin|\sphericalangle CA_2L_2|}{\sin\beta}$. Protože $|\sphericalangle CB_1K_1| = |\sphericalangle CA_2L_2|$, je podle (1) $|CK_1| = |CL_2|$. Protože ortocentrum V leží na ose rovnoramenného trojúhelníku C_1C_2C, je také $|VK_1| = |VL_2|$. Cyklickou záměnou dostaneme další rovnosti $|VL_1| = |VM_2|$ a $|VM_1| = |VK_2|$. Teď si buď všimneme toho, že přímky AA_2, BB_2, CC_2 jsou obrazem odpovídajících přímek AA_1, BB_1, CC_1 v otočení se středem V o úhel $\pi + 2\varphi$, takže trojúhelník $K_2L_2M_2$ je v témže otočení obrazem trojúhelníku $K_1L_1M_1$ a je $|VK_1| = |VK_2|$, a tudíž také

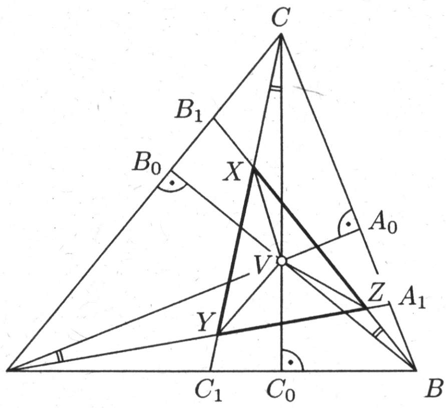
$$|VK_1| = |VL_1| = |VM_1| = |VK_2| = |VL_2| = |VM_2|;$$

anebo si uvědomíme, že $K_1L_2 \parallel AB$ a $M_1L_2 \parallel BC$, což znamená, že $|\sphericalangle C_2L_2K_2| = \pi - \beta$, takže body K_1, L_1, M_1 a L_2 leží na kružnici.

Jiné řešení. Označme V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Využijeme známou vlastnost ortocentra: obraz bodu V v osové souměrnosti podle libovolné strany trojúhelníku ABC leží na kružnici trojúhelníku ABC opsané. (Označme V' druhý průsečík výšky CV s kružnicí k opsanou trojúhelníku ABC (obr. 31). Protože $|\sphericalangle BAV| = |\sphericalangle BCV| = \frac{1}{2}\pi - \beta$ a zároveň $|\sphericalangle BCV'| = |\sphericalangle BAV'|$, jsou body V a V' souměrně sdružené podle osy AB.) To znamená, že kružnice opsané trojúhelníkům ABV, BCV a CAV mají stejný poloměr jako kružnice opsaná danému trojúhelníku ABC. Označme nyní postupně X, Y, Z vrcholy trojúhelníku vymezeného přímkami AA_1, BB_1, CC_1 (obr. 32). Protože $|\sphericalangle VBX| = |\sphericalangle B_0BB_1| = |\sphericalangle C_0CC_1| = |\sphericalangle VCX|$, leží bod X na kružnici opsané trojúhelníku BCV. Podobně leží bod Y na kružnici opsané trojúhelníku CAV a bod Z na kružnici opsané trojúhelníku ABV. Protože každé z tětiv VX, VY, VZ přísluší v odpovídající kružnici stejně velký obvodový úhel $|\sphericalangle C_0CC_1| = |\sphericalangle A_0AA_1| = |\sphericalangle B_0BB_1|$, je



Obr. 31



Obr. 32

$|VX| = |VY| = |VZ|$ a bod V je středem kružnice opsané trojúhelníku XYZ. Analogicky platí, že bod V je středem kružnice opsané trojúhelníku vymezenému přímkami AA_2, BB_2, CC_2. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

1.4 (Podle *Michala Beneše.*) Předpokládejme, že nějakou druhou mocninu lze zapsat ve tvaru $2^k n - 7$, kde n je liché a $k \geqq 3$. Nyní i číslo $(2^{k-1}+1)^2(2^k n - 7)$ je druhou mocninou celého čísla a platí pro ně

$$\begin{aligned}(2^{k-1}+1)^2(2^k n - 7) &\equiv (2\cdot 2^{k-1}+1)(2^k n - 7) \equiv \\ &\equiv -7\cdot 2^k + 2^k n - 7 \equiv -7 \pmod{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

Odtud je vidět, že číslo $(2^{k-1}+1)^2(2^k n - 7)$ lze zapsat ve tvaru $2^l m - 7$, kde $l \in \mathbb{N}$, $l > k$ a m je liché přirozené číslo. Všimněme si, že $1^2 = 1\cdot 2^3 - 7$. To znamená, že požadovanou vlastnost mají i čísla $k \in \{1, 2, 3\}$, tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ existují čísla $l, m \in \mathbb{N}$, $l \geqq k$, taková, že $2^l m - 7 = 2^k(2^{l-k}m) - 7$ je druhá mocnina přirozeného čísla.

Pokud je ale m^2 tvaru $2^k n - 7$, pak pro každé $a \in \mathbb{N}$ je také

$$\begin{aligned}(2^k a + m)^2 &= 2^k(2^k a^2 + 2am) + m^2 = \\ &= 2^k(2^k a^2 + 2am + n) - 7.\end{aligned}$$

Tedy ke každému kladnému celému číslu k existuje nekonečně mnoho čísel, jež jsou druhou mocninou přirozeného čísla a jsou tvaru $2^k n - 7$ pro n přirozené.

Jiné řešení. (Podle *Tomáše Bárty.*) Máme vlastně dokázat, že pro každé přirozené k existuje nekonečně mnoho přirozených x, pro něž platí $x^2 \equiv -7 \pmod{2^k}$. Stačí dokázat, že pro každé k existuje jedno takové x_k, kongruence bude stejná pro celou zbytkovou třídu, tj. pokud $y^2 \equiv -7 \pmod{2^k}$, pak zároveň

$$(y + 2^k n)^2 = y^2 + 2 \cdot 2^k ny + 2^k \cdot 2^k n^2 \equiv y^2 \equiv -7 \pmod{2^k}.$$

Ukážeme to matematickou indukcí.

Pro $k \in \{1, 2, 3\}$ čísla $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ splňují požadavek úlohy. Nechť pro $k \geqq 3$ je $x_k^2 = 2^k n - 7$.

a) Je-li n sudé, pak $x_k^2 = 2^k n - 7 = 2^{k+1} \cdot \frac{1}{2} n - 7$, takže stačí volit $x_{k+1} = x_k$.

b) Je-li n liché, pak $(x_k + 2^{k-1})^2 = x_k^2 + 2 \cdot 2^{k-1} x_k + 2^{2(k-1)} = 2^k n - - 7 + 2^k x_k + 2^{k-2} 2^k = 2^k (n + x_k + 2^{k-2}) - 7$. Jistě x_k je liché, $k \geqq 3$, tedy $n + x_k + 2^{k-2}$ je sudé a $x_{k+1} = x_k + 2^{k-1}$ splňuje požadavek úlohy. Tím je důkaz hotov.

1.5 Jestliže f je funkce, která splňuje danou funkcionální rovnici, a je $f(m) = f(n)$ pro nějaká $m, n \in \mathbb{N}$, je také

$$m + f(1 + 95) = f\big(1 + f(m)\big) = f\big(1 + f(n)\big) = n + f(1 + 95),$$

takže $m = n$. Funkce f je tedy prostá.

Z dané rovnice dále pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$ plyne

$$\begin{aligned} f\big(f(m) + f(n)\big) &= n + f\big(f(m) + 95\big) = \\ &= n + m + f(95 + 95) = f\big(95 + f(m + n)\big). \end{aligned}$$

Protože funkce f je prostá, dostáváme odtud rovnost

$$f(m) + f(n) = f(m + n) + 95$$

a speciálně pro $m = 1$ a libovolné n přirozené

$$f(n) + f(1) = f(n + 1) + 95. \tag{1}$$

Z této rovnosti plyne, že posloupnost hodnot $f(1), f(2), f(3), \ldots$ je aritmetická s diferencí $a = f(1) - 95$, takže $f(n) = an + 95$, pričemž zřejmě $a > 0$ (jinak by f nebyla prostou funkcí z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$). Dosazením do původní rovnice vyjde $a^2 = 1$, takže dané funkcionální rovnici vyhovuje jedině funkce $f(n) = n + 95$, o čemž se snadno přesvědčíme dosazením.

Požadovaný součet je

$$\sum_{k=1}^{19} f(k) = \frac{19(19+1)}{2} + 19 \cdot 95 = 1\,995.$$

1.6 Střed koule opsané čtyřstěnu $A_1A_2A_3A_4$ označme S a její poloměr r. Protože podle věty o mocnosti bodu pro $1 \leqq i \leqq 4$ platí $|GA_i| \cdot |GA_i'| = r^2 - |GS|^2$, je první nerovnost ekvivalentní nerovnosti

$$\sqrt[4]{|GA_1|^2 \cdot |GA_2|^2 \cdot |GA_3|^2 \cdot |GA_4|^2} \leqq r^2 - |GS|^2.$$

Ale podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem je

$$\sqrt[4]{|GA_1|^2 \cdot |GA_2|^2 \cdot |GA_3|^2 \cdot |GA_4|^2} \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{4}(|GA_1|^2 + |GA_2|^2 + |GA_3|^2 + |GA_4|^2) = r^2 - |GS|^2.$$

Poslední rovnost (která fyzikům jistě připomene Steinerovu větu) dostaneme z následující vlastnosti těžiště G čtyřstěnu $A_1A_2A_3A_4$: pro příslušné polohové vektory platí

$$\boldsymbol{SG} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{SA}_1 + \boldsymbol{SA}_2 + \boldsymbol{SA}_3 + \boldsymbol{SA}_4).$$

Je tedy

$$\sum_{i=1}^{4} |GA_i|^2 = \sum_{i=1}^{4} |\boldsymbol{GS} + \boldsymbol{SA}_i|^2 =$$
$$= 4|GS|^2 + \sum_{i=1}^{4} |SA_i|^2 + 2\boldsymbol{GS} \cdot \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{SA}_i =$$
$$= 4|GS|^2 + 4r^2 + 8\boldsymbol{GS} \cdot \boldsymbol{SG} =$$
$$= 4r^2 - 4|GS|^2 = 4(r^2 - |GS|^2).$$

Druhá nerovnost úlohy je ekvivalentní nerovnosti

$$|GA_1| + |GA_2| + |GA_3| + |GA_4| \leqq$$
$$\leqq (r^2 - |GS|^2)\left(\frac{1}{|GA_1|} + \frac{1}{|GA_2|} + \frac{1}{|GA_3|} + \frac{1}{|GA_4|}\right). \tag{1}$$

Podle Cauchyovy nerovnosti je

$$\left(\sum_{i=1}^{4} |GA_i| \cdot 1\right)^2 \leqq 4 \sum_{i=1}^{4} |GA_i|^2 = 16(r^2 - |GS|^2)$$

a zároveň

$$16 = \left(\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{\sqrt{|GA_i|}} \sqrt{|GA_i|}\right)^2 \leqq \sum_{i=1}^{4} |GA_i| \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{|GA_i|}.$$

Spojením posledních dvou nerovností dostáváme (1).

1.7 Položme $y = bz$ ($b \in \mathbb{N}$). Rovnice pak má tvar

$$x + b^2z^2 + z^3 = xbz^2,$$

a proto je x dělitelné dokonce číslem z^2. Nechť tedy $x = az^2$ ($a \in \mathbb{N}$). Dostáváme rovnici

$$a + b^2 + z = abz^2,$$

kterou budeme řešit jako kvadratickou rovnici s neznámou b. Pro její kořeny vychází

$$b = \frac{az^2 \pm \sqrt{a^2z^4 - 4a - 4z}}{2}. \tag{1}$$

Vidíme, že pod odmocninou odečítáme od druhé mocniny celého čísla číslo řádově mnohem menší, což znamená, že pro dostatečně velké z bude výraz pod odmocninou vždy mezi dvěma po sobě jdoucími druhými mocninami celých čísel, takže nezískáme celočíselné řešení b. Ukážeme, že už pro $z \geqq 3$ platí

$$(az^2)^2 > a^2z^4 - 4(a + z) > (az^2 - 1)^2.$$

První nerovnost je zřejmá. Druhá nerovnost je ekvivalentní kvadratické nerovnosti $2az^2 - 4z - (4a + 1) > 0$, která je splněna pro všechna $z \geqq z_2$, kde z_2 je větší z obou kořenů příslušné kvadratické rovnice, pro jejíž diskriminant D platí $D = 16 + 8a(4a + 1) \leqq 16a^2 + 8a \cdot 5a = 56a^2 <$ $< 64a^2$. Pro kořen z_2 tak vychází

$$z_2 = \frac{4}{4a} + \frac{\sqrt{D}}{4a} < 1 + 2 = 3.$$

Z předchozích úvah vyplývá, že musí být $z \leqq 2$. Pro $z = 2$ je podle (1)

$$b = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 4a - 8}}{2} = 2a \pm \sqrt{4a^2 - a - 2}.$$

Zřejmě $(2a)^2 > 4a^2 - a - 2 > (2a-1)^2$ pro každé $a > 1$. Může být tedy jedině $a = 1$, $b \in \{1, 3\}$, a tak dostáváme první dvě řešení.

Pro $z = 1$ dostaneme dosazením do původní rovnice

$$x + y^2 + 1 = xy,$$

neboli

$$(y-1)x = y^2 + 1 = (y-1)(y+1) + 2,$$

tedy číslo $y - 1$ dělí číslo 2, neboli $y \in \{2, 3\}$. Tak dostáváme další dvě řešení. Úloze vyhovují trojice

$$(x, y, z) \in \{(4, 2, 2), (4, 6, 2), (5, 2, 1), (5, 3, 1)\}.$$

2.1 Je-li A liché, je jedno z čísel x, $x + A$ sudé, takže množina M_1 obsahuje jen čísla tvaru $x(x+A) + B \equiv B \pmod 2$, zatímco množina M_2 obsahuje čísla $2x(x+1) + C \equiv C \pmod 2$. Aby byl průnik $\mathsf{M}_1 \cap \mathsf{M}_2$ prázdný, stačí volit $C = B + 1$.

Je-li A sudé, obsahuje množina M_1 čísla tvaru

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + B - \frac{A^2}{4} \equiv q + B - \frac{A^2}{4} \pmod 4,$$

kde $q \in \{0, 1\}$ jsou jediné kvadratické zbytky modulo 4. Množina M_2 naproti tomu obsahuje jen čísla kongruentní s $C \pmod 4$, takže stačí volit $C = B - \frac{1}{4}A^2 + 2$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

2.2 Nějakého „význačného" vědce pojmenujme A. Ostatní účastníky kongresu rozdělíme do množin B a C podle toho, zda se s A pozdravili, anebo ne. V množině B je tedy $3k + 6$ lidí, zatímco v množině C je zbývajících $9k - 7$ vědců.

Podle zadání jsou počty lidí, se kterými se libovolní dva účastníci pozdravili zároveň, rovny témuž číslu — označme ho n. Každý z účastníků vyjma A se tedy musel pozdravit právě s n účastníky z množiny B. To znamená, že se každý z účastníků patřících do B pozdravil právě s $3k+5-n$ kolegy z C. Dohromady si vědci z B vyměnili právě $(3k+6)(3k+5-n)$ pozdravů s vědci z C. Protože i každý z vědců v C se pozdravil právě s n kolegy v B, vyměnili si vědci z C právě $n(9k-7)$ pozdravů s vědci z B. Pro celkový počet pozdravů mezi B a C tak dostáváme rovnici

$$(3k+6)(3k+5-n) = n(9k-7),$$

neboli

$$(3k+6)(3k+5) = n(12k-1).$$

Levá strana bude dělitelná číslem $12k-1$, právě když tímto číslem bude dělitelný výraz

$$\begin{aligned}16(3k+6)(3k+5) &= 144k^2 + 528k + 480 = \\ &= (12k-1)^2 + 46(12k-1) + 525,\end{aligned}$$

tj. právě když $12k - 1 \mid 525 = 3 \cdot 7 \cdot 25$. Protože 3 je s číslem $12k-1$ nesoudělné, musí $12k-1$ dělit 175. Množina všech dělitelů čísla 175 je $\{1, 5, 7, 25, 35, 175\}$ a z nich pouze 35 je tvaru $12k-1$.

Pokud se takový kongres skutečně sešel, muselo se jej účastnit 36 vědců. Zbývá ukázat, že taková skupina skutečně může existovat. Uspořádejme 36 osob do čtverce 6×6 a rozdělme je ještě na šestice rozlišené písmeny A, B, C, D, E, F podle následující tabulky:

A	B	C	D	E	F
F	A	B	C	D	E
E	F	A	B	C	D
D	E	F	A	B	C
C	D	E	F	A	B
B	C	D	E	F	A

Podmínkám úlohy bude vyhovovat, jestliže se pozdraví právě všichni stojící v témže sloupci, všichni stojící v téže řádce a všichni označení stejným písmenem.

2.3 Označme $(1 \leqq i \leqq n-1)$

$$y_i = \sum_{j=i+1}^{n} x_j \quad \text{a} \quad z_i = \binom{n}{2} y_i - (n-i)y,$$

kde

$$y = \sum_{i=1}^{n-1} y_i = \sum_{j=2}^{n} (j-1)x_j.$$

Rozdíl levé a pravé strany dokazované nerovnosti pak můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned}\binom{n}{2}\sum_{i<j} x_i x_j - \Bigl(\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i\Bigr)\Bigl(\sum_{j=2}^{n}(j-1)x_j\Bigr) &= \\ = \binom{n}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j - \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i y &= \\ = \binom{n}{2}\sum_{i=1}^{n-1} y_i - \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i y &= \sum_{i=1}^{n-1} x_i z_i.\end{aligned}$$

Je tedy potřeba ukázat, že $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i z_i > 0$.

Protože $\sum\limits_{i=1}^{n-1}(n-i) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} i = \binom{n}{2}$, je $\sum\limits_{i=1}^{n-1} z_i = 0$. Přitom $z_{n-1} = \binom{n}{2}y_{n-1} - y = \binom{n}{2}x_n - \sum\limits_{j=2}^{n}(j-1)x_j > \binom{n}{2}x_n - \sum\limits_{j=2}^{n}(j-1)x_n = 0$, takže mezi čísly z_i musí být i záporná. Dále pro $1 \leqq i \leqq n-2$ máme

$$\begin{aligned}\frac{z_{i+1}}{n-(i+1)} - \frac{z_i}{n-i} &= \binom{n}{2}\frac{y_{i+1}}{n-(i+1)} - \binom{n}{2}\frac{y_i}{n-i} = \\ &= \binom{n}{2}\Bigl(\frac{x_{i+2}+\ldots+x_n}{n-i-1} - \frac{x_{i+1}+\ldots+x_n}{n-i}\Bigr) = \\ &= \binom{n}{2}\frac{x_{i+2}+\ldots+x_n-(n-i-1)x_{i+1}}{(n-i-1)(n-i)} > 0,\end{aligned}$$

takže

$$\frac{z_1}{n-1} < \frac{z_2}{n-2} < \ldots < \frac{z_{n-2}}{2} < z_{n-1}.$$

Existuje tedy index k, $1 < k < n-1$, takový, že $z_i < 0$ pro $1 \leqq i < k$, $z_k \leqq 0$ a $z_i > 0$ pro $k < i \leqq n-1$. Je tudíž $x_i z_i > x_k z_i$ pro každé $i \neq k$, takže

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i z_i > x_k \sum_{i=1}^{n-1} z_i = 0,$$

což jsme potřebovali dokázat.

2.4 Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla. Druhou rovnici můžeme zapsat ve tvaru

$$4 = \frac{a^2}{yz} + \frac{b^2}{zx} + \frac{c^2}{xy} + \frac{abc}{xyz}.$$

Položíme-li $x_1 = \dfrac{a}{\sqrt{yz}} > 0$, $y_1 = \dfrac{b}{\sqrt{zx}} > 0$, $z_1 = \dfrac{c}{\sqrt{xy}} > 0$, dostaneme symetrickou rovnici

$$4 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_1 y_1 z_1,$$

ze které plyne, že každé z kladných čísel x_1, y_1, z_1 je menší než 2. Tato rovnice jako kvadratická vzhledem k z_1 má diskriminant $D = (4 - x_1^2) \times \times (4-y_1^2)$, který vybízí k substituci $x_1 = 2\sin u$, $0 < u < \frac{1}{2}\pi$, $y_1 = 2\sin v$, $0 < v < \frac{1}{2}\pi$. To nám umožňuje předchozí rovnici zapsat jako

$$4 = 4\sin^2 u + 4\sin^2 v + z_1^2 + 4\sin u \sin v \cdot z_1,$$

neboli

$$(z_1 + 2\sin u \sin v)^2 = 4(1 - \sin^2 u)(1 - \sin^2 v),$$
$$|z_1 + 2\sin u \sin v| = |2\cos u \cos v|.$$

Protože $\sin u$, $\sin v$, $\cos u$, $\cos v$ a z_1 jsou vesměs kladná čísla, můžeme odstranit absolutní hodnoty a získat tak vyjádření

$$z_1 = 2(\cos u \cos v - \sin u \sin v).$$

Nyní můžeme vyjádřit čísla a, b, c jako

$$a = 2\sin u \cdot \sqrt{yz}, \quad b = 2\sin v \cdot \sqrt{zx},$$
$$c = 2(\cos u \cos v - \sin u \sin v)\sqrt{xy},$$

takže z dané rovnice $x + y + z = a + b + c$ dostáváme

$$\begin{aligned} &x + y - 2\cos u \cos v \cdot \sqrt{xy} + \\ &\quad + z + 2\sin u \sin v \cdot \sqrt{xy} - 2\sin u \cdot \sqrt{yz} - 2\sin v \cdot \sqrt{zx} = 0, \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} &x\cos^2 v + y\cos^2 u - 2\cos u \cos v\sqrt{xy} + \\ &\quad + z + x\sin^2 v + y\sin^2 u + 2\sin u \sin v \cdot \sqrt{xy} - \\ &\quad - 2\sin u \cdot \sqrt{yz} - 2\sin v \cdot \sqrt{zx} = \\ &= \left(\sqrt{x}\cos v - \sqrt{y}\cos u\right)^2 + \left(\sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u - \sqrt{z}\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Odtud vychází

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &= \sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u = \sqrt{x}\,\frac{y_1}{2} + \sqrt{y}\,\frac{x_1}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{z}}, \end{aligned}$$

neboli $z = \frac{1}{2}(a + b)$. Podobně $y = \frac{1}{2}(c + a)$ a $x = \frac{1}{2}(b + c)$. Trojice $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}(b + c), \frac{1}{2}(c + a), \frac{1}{2}(a + b)\right)$ skutečně dané soustavě rovnic vyhovuje. Lze se o tom přesvědčit dosazením a rutinním výpočtem.

2.5 Položme

$$u = \sqrt{2p} - \sqrt{x} - \sqrt{y},$$
$$v = \left(\sqrt{2p} - \sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{2p} + \sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = 2p - x - y - 2\sqrt{xy}.$$

Je jasné, že $u \geqq 0$, právě když $v \geqq 0$, a protože

$$v = u\left(2\sqrt{2p} - u\right) = 2p - \left(\sqrt{2p} - u\right)^2,$$

nabývají oba výrazy nejmenší kladnou hodnotu pro stejná přirozená čísla x a y. Navíc nemůže být $u = 0$ (a tedy ani $v = 0$) pro žádná dvě přirozená čísla x a y, neboť jinak bychom z rovnosti $\sqrt{y} = \sqrt{2p} - \sqrt{x}$ umocněním dostali $y = 2p + x - 2\sqrt{2px}$, což znamená, že $2px$ je druhou mocninou přirozeného čísla, a protože p je liché prvočíslo, musí být x dělitelné $2p$, tedy $x \geqq 2p$, což předpokládané rovnosti odporuje.

Nechť tedy pro nějaká dvě přirozená čísla x, y, $x \leqq y$, je $v = 2p - x - y - 2\sqrt{xy} > 0$, neboli $2\sqrt{xy} < 2p - x - y$. Označme z nejmenší přirozené číslo větší než $2\sqrt{xy}$ (tedy $z = \lfloor 2\sqrt{xy} \rfloor + 1$). Pro takové z zřejmě bude platit

$$2\sqrt{xy} < z \leqq 2p - x - y.$$

Protože zároveň $u > 0$, tedy $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2p}$, je také

$$2\sqrt[4]{xy} \leqq \sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2p},$$
$$2\sqrt{xy} < z \leqq p.$$

Navíc je $z^2 > 4xy$, neboli $4xy \leqq z^2 - 1$. Celkem tedy platí

$$v = (2p - x - y) - 2\sqrt{xy} \geqq z - \sqrt{z^2 - 1} = \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}} \geqq$$
$$\geqq \frac{1}{p + \sqrt{p^2 - 1}} = p - \sqrt{p^2 - 1}.$$

Rovnost zřejmě nastane, právě když bude $z = p$, $z = 2p - x - y$ a $4xy = z^2 - 1$, tedy právě když

$$x = \frac{p-1}{2} \quad \text{a} \quad y = \frac{p+1}{2}.$$

Jiné řešení. (Podle *Tamáse Vargy*, Slovensko.) Dokážeme, že řešením je vždy dvojice $\left(\frac{1}{2}(p-1), \frac{1}{2}(p+1)\right)$. K tomu stačí ukázat, že pro libovolnou jinou dvojici čísel je výraz $D = \sqrt{2p} - \sqrt{x} - \sqrt{y}$ větší. To dokážeme sporem.

Předpokládejme, že existuje dvojice přirozených čísel (x, y) taková, že

$$\sqrt{2p} \geqq \sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{\frac{p+1}{2}} + \sqrt{\frac{p-1}{2}},$$

$$2p \geqq x + y + 2\sqrt{xy} > p + \sqrt{p^2 - 1},$$

$$2p - x - y \geqq 2\sqrt{xy} > p + \sqrt{p^2 - 1} - x - y.$$

Zřejmě je $p + \sqrt{p^2 - 1} > 2p - 1 > 0$ a zároveň $2p - x - y \geqq 2\sqrt{xy} > 0$, takže $2p - 1 - x - y \geqq 0$. Dalším umocněním dostaneme po jednoduchých úpravách nerovnost

$$4p(x + y - p) \leqq (x - y)^2 < 2\bigl(p + \sqrt{p^2 - 1}\bigr)(x + y - p) + 1.$$

Položíme-li $q = x + y - p$, je z předchozích nerovností jasné, že $q < p$ a zároveň $q = x + y - p > 2p - 1 - 2\sqrt{xy} \geqq 2p - 1 - x - y \geqq 0$, takže q je přirozené číslo. Dosazením dostáváme

$$4pq \leqq (x - y)^2 < 2\bigl(p + \sqrt{p^2 - 1}\bigr)q + 1 < 4pq + 1,$$

odkud plyne $4pq = (x - y)^2$. To však není možné, protože p je liché prvočíslo a $q < p$.

2.6 Zaveďme posloupnost $F(1), F(2), \ldots$ tak, že $F(n)$ udává počet prvočísel (i s jejich násobností), která dělí n. Je-li tedy

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{s_i},$$

kde $p_1, \ldots, p_k$ jsou různá prvočísla a $s_1, \ldots, s_k$ nezáporná celá čísla, je

$$F(n) = \sum_{i=1}^{k} s_i.$$

Podmínka a) je splněna, protože pro každé nezáporné celé k je $F(2^k) = k$. Je splněna i podmínka b), protože $k = F(p^k)$ pro každé prvočíslo p. Rovnost

$$F\bigl(F(n^{163})\bigr) = F\bigl(F(n)\bigr) + F\bigl(F(361)\bigr)$$

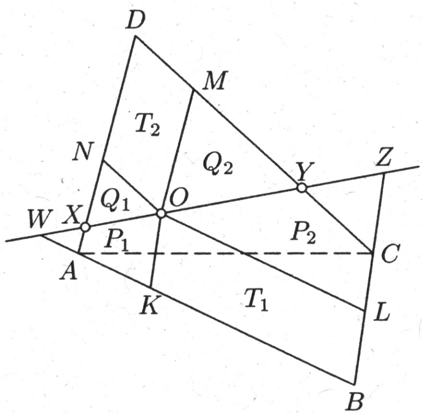
z podmínky c) platí, protože pro $n \geqq 2$ je

$$\begin{aligned} F\bigl(F(n^{163})\bigr) &= F\bigl(163F(n)\bigr) = 1 + F\bigl(F(n)\bigr) = \\ &= F\bigl(F(n)\bigr) + F(2) = F\bigl(F(n)\bigr) + F\bigl(F(361)\bigr), \end{aligned}$$

neboť 163 je prvočíslo a $361 = 19^2$. Uvedená posloupnost tedy splňuje všechny podmínky úlohy.

2.7 Jestliže bod O leží na úhlopříčce AC, jsou čtyřúhelníky $ABCD$, $AKON$ a $OLCM$ podobné. V tomto případě platí rovnost $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$, neboť $S_1 : S = |AO|^2 : |AC|^2$ a $S_2 : S = |OC|^2 : |AC|^2$.

Pokud bod O na úhlopříčce AC neleží, můžeme předpokládat, že leží například v trojúhelníku ACD. Veďme bodem O libovolnou přímku a označme po řadě X, Y její průsečíky s přímkami AD, CD a W, Z průsečíky s přímkami AB, BC (obr. 33). Prochází-li zmíněná přímka vrcholem A, je $W = X = A$ a přitom $\dfrac{|OW|}{|OX|} = 1$, $\dfrac{|OZ|}{|OY|} > 1$. Bude-li



Obr. 33

naopak přímka procházet vrcholem C, bude $Y = Z = C$ a my dostaneme $\dfrac{|OW|}{|OX|} > 1$, $\dfrac{|OZ|}{|OY|} = 1$. Otáčíme-li tedy touto přímkou kolem středu O, najdeme mezi oběma těmito polohami takovou, v níž platí $\dfrac{|OW|}{|OX|} = \dfrac{|OZ|}{|OY|} > 1$. V této poloze přímku zafixujeme a označíme po řadě T_1, T_2, P_1, P_2 a Q_1, Q_2 obsahy rovnoběžníků $KBLO$, $NOMD$, trojúhelníků WKO, OLZ a XON, OYM.

Z podobnosti trojúhelníků WBZ, WKO a OLZ plyne, že

$$\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} = \sqrt{P_1 + T_1 + P_2}\left(\frac{|WO|}{|WZ|} + \frac{|OZ|}{|WZ|}\right) = \\ = \sqrt{P_1 + T_1 + P_2},$$

neboli $T_1 = 2\sqrt{P_1 P_2}$. Podobně dostaneme, že $T_2 = 2\sqrt{Q_1 Q_2}$. Z rovnosti

$\dfrac{|OW|}{|OZ|} = \dfrac{|OX|}{|OY|}$ navíc plyne, že $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{|OW|^2}{|OZ|^2} = \dfrac{|OX|^2}{|OY|^2} = \dfrac{Q_1}{Q_2}$. Je tedy $Q_1 = kP_1$ a $Q_2 = kP_2$ pro vhodné k, takže můžeme psát

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 &= 2\sqrt{P_1P_2} + 2\sqrt{Q_1Q_2} = 2\sqrt{P_1P_2}(1+k) = \\ &= 2\sqrt{(1+k)P_1(1+k)P_2} = 2\sqrt{(P_1+Q_1)(P_2+Q_2)} \geqq \\ &\geqq \sqrt{S_1S_2}, \end{aligned}$$

což je ekvivalentní nerovnosti

$$S = S_1 + S_2 + T_1 + T_2 \geqq \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2.$$

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.