49. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie B

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 49. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1999/2000. 41. mezinárodní matematická olympiáda. 12. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2005. pp. 47–69.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405014

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Pro která reálná čísla t má funkce $f(x) = 5x + 44 + t|x-2| - 3|x-t|$ maximum rovné 0? *(P. Černek)*

B – I – 2

Označme S střed kružnice vepsané libovolnému trojúhelníku ABC. Dokažte, že rovnost $|AS| \cdot |BS| = |CS| \cdot |AB|$ platí, právě když úhel ACB je pravý. *(J. Švrček)*

B – I – 3

Určete reálná čísla a, b, pro která má soustava

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2z^2 &= 16, \\ xyz^2 + xy + z^2 &= a, \\ x + y + 2z &= b \end{aligned}$$

v oboru reálných čísel právě jedno řešení. *(J. Bábeľa)*

B – I – 4

Jsou dány kružnice k a l s různými poloměry, které se vně dotýkají v bodě T. Průsečíkem M jejich společných vnějších tečen veďme sečnu s obou kružnic. Označme X ten z obou průsečíků kružnice k se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Podobně označme Y ten z obou průsečíků kružnice l se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Nechť P je takový bod, že $XTYP$ je rovnoběžník. Určete množinu bodů P odpovídajících všem takovým sečnám s. *(J. Zhouf)*

B – I – 5

Devítistěn $ABCDEFGHV$ vznikl slepením krychle $ABCDEFGH$ a pravidelného čtyřbokého jehlanu $EFGHV$. Na každou stěnu tohoto devítistěnu jsme napsali číslo. Čtyři z napsaných čísel jsou 25, 32, 50 a 57. Pro každý vrchol devítistěnu $ABCDEFGHV$ sečteme čísla na všech stěnách, které ho obsahují. Dostaneme tak devět stejných součtů. Určete zbývajících pět čísel napsaných na stěnách tohoto tělesa.

(K. Černeková)

B – I – 6

Je dán rovnostranný trojúhelník XYZ s těžištěm T a stranou délky 5 cm. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ s obsahem $8\,\mathrm{cm}^2$ a stranou AB délky 2 cm tak, aby body X, Y, Z, T ležely po řadě na přímkách AB, BC, CD, DA.

(M. Krállová)

B – S – 1

Pro která reálná čísla a, b je funkce

$$f(x) = a|x-1| + b(x-3) + |x-b| + x - 1$$

omezená? *(J. Bábeľa)*

B – S – 2

Je dána úsečka XZ délky 7 cm a její body S, Y tak, že $|XS| = 2\,\mathrm{cm}$, $|YZ| = 1\,\mathrm{cm}$. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB tak, aby bod S byl střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a body X, Y, Z ležely po řadě na přímkách AC, AB, BC. *(P. Černek)*

B – S – 3

Do výrazu

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 99 - 100$$

jsme vepsali několik závorek tak, že nakonec jsou v každé dvojici odpovídajících si závorek právě tři čísla a výraz neobsahuje žádný součin. Kolik různých výsledků lze takto dostat? *(P. Černek)*

B – II – 1

Zjistěte všechna reálná čísla c, pro která má rovnice

$$(c^2 + c - 8)(x + 2) - 8|x - c + 2| = c|x + c + 14|$$

nekonečně mnoho řešení v oboru celých čísel. (*J. Šimša*)

B – II – 2

Devítistěn vznikl slepením krychle a pravidelného čtyřbokého jehlanu. Na každé stěně tohoto devítistěnu je napsáno jedno číslo. Jejich součet je 3 003. Pro každou stěnu S uvažovaného devítistěnu sečtěme čísla na všech stěnách, s nimiž má S společnou právě jednu hranu. Dostaneme tak devět stejných součtů. Určete všechna čísla napsaná na stěnách devítistěnu.
(*K. Černeková*)

B – II – 3

Je dán lichoběžník $ABCD$, v němž $|AB| = 8\,\text{cm}$ a $|\sphericalangle ABC| = 90°$. Jeho obvod je 28 cm. Polokružnice k s průměrem AB se dotýká strany CD. Vypočtěte délky zbývajících stran daného lichoběžníku, je-li strana AB jeho

a) základnou,

b) ramenem. (*Smutná*)

B – II – 4

Je dán obdélník $KLMN$, $|KN| > |KL|$. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB délky $|KL|$ tak, aby jeho výška v_a obsahovala body K, N, výška v_b bod L a výška v_c bod M. (Výškami zde rozumíme přímky.)
(*K. Černeková*)

B – I – 1

Daná funkce je lineární lomená, protože obsahuje dva výrazy s absolutní hodnotou, které způsobují, že jejím grafem není přímka, nýbrž lomená čára. Její definiční obor, množinu $\mathbb{R}$ všech reálných čísel, můžeme v tomto případě rozdělit na tři disjunktní části podle toho, jak se příslušná absolutní hodnota chová (zda je výraz v absolutní hodnotě kladný či záporný). Protože jedna z absolutních hodnot závisí na parametru t, rozlišíme, zda je $t < 2$ (případ A), či $t \geqq 2$ (případ B).

A. Nechť $t < 2$. Množina $\mathbb{R}$ se rozpadne na tři disjunktní intervaly, $\mathbb{R} = (-\infty, t\rangle \cup (t, 2\rangle \cup (2, \infty)$.

(a) V intervalu $(-\infty, t\rangle$ je, jak snadno spočteme, $f(x) = (8-t)x + {} + 44 - t$. Protože za uvedeného předpokladu je $8 - t > 0$, je funkce f v tomto intervalu rostoucí a nabyde maxima v bodě $x = t$.

(b) V intervalu $(t, 2\rangle$ je $f(x) = (2-t)x+44+5t$. Protože za uvedeného předpokladu je $2-t > 0$, je funkce f i v tomto intervalu rostoucí a nabyde maxima v bodě $x = 2$. Přitom zřejmě platí $f(t) < f(2) = 2(2-t)+44+5t$.

(c) V intervalu $(2, \infty)$ je $f(x) = (2 + t)x + 44 + t$. Tato funkce je pro $2 + t > 0$ na tomto intervalu rostoucí a shora neomezená, takže nemůže mít maximum. Musí tedy nutně být $2 + t \leqq 0$, tj. $t \leqq -2$, funkce f bude v intervalu $(2, \infty)$ nerostoucí a její hodnota nebude větší než $f(2)$, kterou jsme spočítali v (b).

Zjistili jsme tedy, že za předpokladu $t < 2$ nabývá funkce f maxima jedině pro $t \leqq -2$, přičemž její maximum je $f(2) = 2(2-t) + 44 + 5t$. Toto maximum se rovná 0, právě když $2(2-t) + 44 + 5t = 0$, neboli $t = -16$, což je naštěstí číslo, které splňuje podmínku $t \leqq -2$.

B. Nechť $t \geqq 2$. Množina $\mathbb{R}$ se nám rozpadne na tři disjunktní intervaly, $\mathbb{R} = (-\infty, 2\rangle \cup (2, t\rangle \cup (t, \infty)$, přičemž „prostřední“ interval bude prázdný pro $t = 2$ (to však není pro další úvahy podstatné, jinak bychom mohli tento případ snadno rozebrat samostatně).

V intervalu $(-\infty, 2\rangle$ je $f(x) = (8-t)x + 44 - t$. Kdyby teď bylo $8-t < 0$, byla by funkce f v tomto intervalu klesající a shora neomezená, takže by nemohla mít maximum. Proto je $8 - t \geqq 0$, tj. $t \leqq 8$. Pak ale je $f(2) = 2(8-t) + 44 - t = 60 - 3t > 0$. Odtud hned vidíme, že za uvedeného předpokladu nemůže funkce f nikdy mít maximum rovné 0.

Z uvedeného rozboru vyplývá, že uvažovaná funkce má maximum rovné 0 jedině pro $t = -16$.

Jiné řešení. Grafem dané funkce f je lomená čára, která se v našem případě skládá ze dvou polopřímek (pro $t = 2$), resp. ze dvou polopřímek a jedné úsečky.

Dále bychom si měli uvědomit, že pokud má takováto funkce maximum, nabývá ho určitě v některém ze „zlomových" bodů (tam, kde je příslušný výraz v absolutní hodnotě nulový). To samozřejmě neznamená, že funkce nemůže maximum nabýt i v jiných bodech (např. je-li konstantní na některém intervalu).

V našem případě jsou těmito zlomovými body pro $x = 2$ bod $A[2, 54 - 3|t - 2|]$, pro $x = t$ bod $B[t, 5t + 44 + t|t - 2|]$.

Protože jeden z bodů $x = 2$, $x = t$ má být bodem maxima funkce f rovného 0, zjistíme, pro která t je jedna z y-ových souřadnic bodů A a B nulová (a druhá nekladná).

A: $54 - 3|t - 2| = 0$,
$|t - 2| = 18$,
$t = 20$ anebo $t = -16$.

B: $5t + 44 + t|t - 2| = 0$,
$t \geqq 2 \Rightarrow t^2 + 3t + 44 = 0$,
nemá řešení.
$t < 2 \Rightarrow t^2 - 7t - 44 = 0$.
$t = 11$ anebo $t = -4$,
vyhovuje jen $t = -4$.

Máme tak tři možnosti:

Pro $t = 20$ je $A[2, 0]$, $B[20, 504]$, což nevyhovuje.

Pro $t = -16$ je $A[2, 0]$, $B[-16, -80 + 11 - 16 \cdot 18]$, zatím vyhovuje.

Pro $t = -4$ je $A[2, 36]$, $B[-4, 0]$, což nevyhovuje.

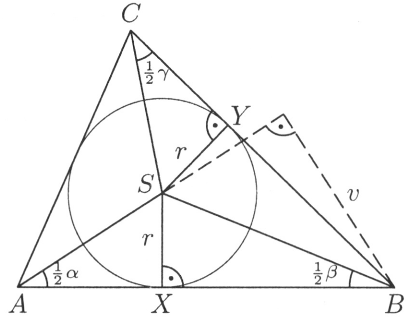
Zjistili jsme, že úloha má řešení nejvýše pro $t = -16$, kterému odpovídá funkce $f(x) = 5x + 44 - 16|x - 2| - 3|x + 16|$. Pro tuto funkci samozřejmě platí $f(2) = 0$. Ověřit, že tato hodnota je skutečně maximem funkce f, můžeme více způsoby. Například tak, že ověříme, že pro $x < -16$ je uvedená funkce neklesající (pro $x < -16$ je $f(x) = 24x + 60$) a současně pro $x > 2$ nerostoucí (pro $x > 2$ je $f(x) = -14x + 28$).

B – I – 2

Úhly v obecném trojúhelníku ABC označme obvyklým způsobem, poloměr vepsané kružnice označme r a její dotykové body se stranami AB, BC označme po řadě X, Y (obr. 27).

Úsečky AS a BS jsou stranami trojúhelníku ASB. Jeho obsah P můžeme vyjádřit dvěma způsoby:

$$P = \frac{1}{2}|AS|v = \frac{1}{2}|AB|r,$$



Obr. 27

neboť výška na stranu AB tohoto trojúhelníku je r; pro výšku v na stranu AS přitom platí $v = |BS| \cos \frac{1}{2}\gamma$, protože vedlejší úhel při vrcholu S má velikost $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 90° - \frac{1}{2}\gamma$. Je tedy

$$|AS| \cdot |BS| \cos \frac{\gamma}{2} = |AB| r$$

a následující rovnosti jsou ekvivalentní:

$$\begin{aligned} |AS| \cdot |BS| &= |CS| \cdot |AB|, \\ |AB| r &= |CS| \cdot |AB| \cos \frac{\gamma}{2}, \\ r &= |CS| \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

V pravoúhlém trojúhelníku CSY však platí $\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{|CY|}{|CS|}$, takže rovnost (1) je ekvivalentní rovnosti

$$r = |CY|,$$

což znamená, že trojúhelník CSY je rovnoramenný pravoúhlý a $\frac{1}{2}\gamma = 45°$. Je tedy daná rovnost ekvivalentní tomu, že $\gamma = 90°$.

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Jiné řešení. Napíšeme si daný vztah jako rovnost podílů tak, aby to byly poměry stran v trojúhelnících, a budeme se snažit použít podobnost nebo sinovou větu.

V našem případě vyjdeme z rovnosti $\frac{|AS|}{|CS|} = \frac{|AB|}{|BS|}$. Trojúhelníky ASC a BSC ale podobné nejsou, proto zkusíme sinovou větu:

V trojúhelníku ASC platí $\dfrac{|AS|}{|CS|} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$ a v trojúhelníku ASB zase $\dfrac{|AB|}{|BS|} = \dfrac{\sin|\sphericalangle ASB|}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$. Odtud dostáváme následující ekvivalentní rovnosti:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha} &= \frac{\sin|\sphericalangle ASB|}{\sin\frac{1}{2}\alpha},\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \sin|\sphericalangle ASB|,\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \sin\Big(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\Big),\\
\frac{\gamma}{2} &= 180^\circ - \Big(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\Big),\\
\gamma &= 90^\circ.
\end{aligned}$$

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Jiné řešení. Zkusíme vypočítat délky úseček AS, BS, CS, AB pomocí některých prvků trojúhelníku. My si zvolíme úhly trojúhelníku a poloměr r.

Zřejmě $|CS| = \dfrac{r}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$, $|AS| = \dfrac{r}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$, $|BS| = \dfrac{r}{\sin\frac{1}{2}\beta}$ a $|AB| = |AX| + |BX| = r\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha + r\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta$. Po dosazení dostaneme ekvivalentní rovnosti

$$\begin{aligned}
\frac{r}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\cdot\frac{r}{\sin\frac{1}{2}\beta} &= \Big(r\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + r\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\Big)\cdot\frac{r}{\sin\frac{1}{2}\gamma},\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2},\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \sin\Big(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\Big),\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \sin\Big(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\Big),\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \cos\frac{\gamma}{2},\\
\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} &= 1,\\
\gamma &= 90^\circ.
\end{aligned}$$

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Předpokládejme, že soustava má právě jedno řešení $x = s$, $y = t$, $z = u$. Protože ve všech rovnicích se neznámé x a y vyskytují ve stejném tvaru, lze vytušit a ověřit, že i $x = t$, $y = s$ a $z = u$ je řešením dané soustavy. A protože soustava má jediné řešení, musí být $t = s$, a tedy $x = y$. Po dosazení dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 &= 8, \\ x^2z^2 + x^2 + z^2 &= a, \\ x + z &= \tfrac{1}{2}b. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Pokud (x, z) je některé řešení této soustavy, je trojice (x, x, z) řešením původní soustavy. Má-li proto původní soustava jediné řešení, musí taková být i nová soustava $(*)$. Ta je však opět symetrická vůči neznámým x a z. Proto bude mít jediné řešení, jen když bude platit $x = z$.

Po dosazení dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x^2 &= 4, \\ x^4 + 2x^2 &= a, \\ x &= \tfrac{1}{4}b, \end{aligned}$$

která má jediné řešení. Podle první rovnice je to buď $x = 2$ (pak $b = 8$, $a = 24$), anebo $x = -2$ (pak $b = -8$, $a = 24$).

Těmito úvahami jsme dospěli k následujícímu závěru:

Pokud má daná soustava právě jedno řešení, tak jen pro $a = 24$, $b = 8$, a to $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$, anebo pro $a = 24$, $b = -8$, a to $x = -2$, $y = -2$, $z = -2$.

Ještě musíme ověřit, zda v těchto dvou případech nemá daná soustava jiné řešení (než to symetrické, které jsme vypočetli nikoli ekvivalentními úpravami, nýbrž zjednodušováním).

Nechť $a = 24$, $b = 8$. Po dosazení dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2z^2 &= 16, \\ xyz^2 + xy + z^2 &= 24, \\ x + y + 2z &= 8. \end{aligned}$$

Tato soustava se dá řešit více způsoby. My tu uvedeme dva.

a) Vyloučíme neznámé x, y, například tak, že nejprve rovnice upravíme:

$$x^2 + y^2 = 16 - 2z^2,$$
$$xy = \frac{24 - z^2}{1 + z^2},$$
$$x + y = 8 - 2z.$$

Dostáváme tak

$$(8 - 2z)^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 16 - 2z^2 + 2 \cdot \frac{24 - z^2}{1 + z^2}.$$

Po úpravě vychází

$$3z^4 - 16z^3 + 28z^2 - 16z = 0.$$

Vzhledem k tomu, že víme, že $z = 2$ je kořenem této rovnice, můžeme ji postupně upravit až na tvar

$$z(z - 2)^2(3z - 4) = 0.$$

Odtud plyne, že je buď $z = 0$, $z = \frac{4}{3}$, anebo $z = 2$.

Pokud $z = 0$, dostaneme

$$x^2 + y^2 = 16,$$
$$xy = 24,$$
$$x + y = 8$$

a snadno se přesvědčíme, že tato soustava nemá řešení (čísla x, y by musela být kořeny kvadratické rovnice $t^2 - 8t + 24 = 0$, která má záporný diskriminant).

Pokud $z = \frac{4}{3}$, dostaneme

$$x^2 + y^2 = \frac{112}{9},$$
$$xy = 8,$$
$$x + y = \frac{16}{3}$$

a opět se snadno přesvědčíme, že tato soustava nemá řešení.

Pokud $z = 2$, dostaneme

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 8, \\ xy &= 4, \\ x + y &= 4. \end{aligned}$$

Snadno zjistíme, že tato soustava má jediné řešení $x = y = 2$.

b) Šikovnější přístup využívá jen první a třetí rovnici a nerovnost mezi kvadratickým a aritmetickým průměrem:

$$4 = 2^2 = \left(\frac{1}{4}(x + y + z + z)\right)^2 \leqq \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2 + z^2) = 4.$$

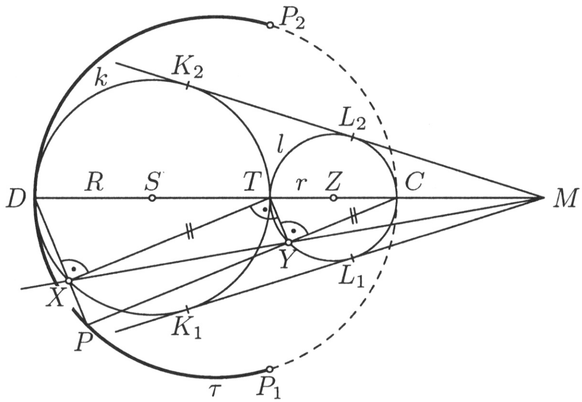
Mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem nastane rovnost, právě když se všechny členy rovnají. Odtud $x = y = z = 2$.

Případ $a = 24$, $b = -8$ posoudíme podobně, i tehdy je řešení jediné.

Odpověď. Daná soustava má jediné řešení pro $a = 24$, $b = 8$ nebo $a = 24$, $b = -8$.

B – I – 4

Označme S, Z středy obou kružnic k, l a R, r jejich poloměry (bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $r < R$). Označme dále C a D od T různé průsečíky kružnic l a k s přímkou SZ a K_1, K_2, L_1, L_2 po řadě dotykové body obou společných vnějších tečen ke kružnicím k a l (obr. 28).



Obr. 28

Bod M je středem stejnolehlosti h obou kružnic s koeficientem R/r. Přitom je například $h(L_1) = K_1, h(Z) = S, h(C) = T, h(T) = D, h(Y) = X$. Odtud plyne, že přímky CY, TX jsou rovnoběžné ($h(CY) = TX$). Protože úhel CYT je pravý podle Thaletovy věty, je také $|\sphericalangle YTX| = 90°$ (TY je příčka rovnoběžek CY, TX). Rovnoběžník $XTYP$ je tedy vždy obdélník.

Zároveň je zřejmé, že body C, Y, P leží v přímce a podobně i body D, X, P leží v přímce. Je tudíž $|\sphericalangle CPD| = 90°$ a bod P leží na Thaletově kružnici τ nad průměrem CD. Leží na ní i vrcholy P_1, P_2 rovnoběžníků $K_1TL_1P_1$, $K_2TL_2P_2$, protože pro ně můžeme zopakovat předchozí úvahu (jako pro rovnoběžník $XTYP$).

Nyní už není problém ukázat, že hledanou množinou bodů je větší z oblouků P_1P_2 kružnice τ vyjma body P_1, P_2 a D (neboť body Y tvoří větší z oblouků L_1L_2 kružnice l vyjma body T, L_1, L_2).

Ještě naznačíme hlavní myšlenky *jiných dvou přístupů*:

a) Abychom odhadli tvar hledané množiny, zvolíme několik význačných poloh přímky XY. Vhodné jsou následující polohy: a) $X = K_1$, $Y = L_1$ (PT je kolmé na SZ), b) XS a YZ jsou kolmé na SZ (tehdy vyjde, že pata kolmice z bodu P na SZ leží ve středu J úsečky CD a $|JC| = |JP|$).

Z toho už se dá odhadnout, že bod P leží nejspíš na kružnici se středem J a poloměrem $\frac{1}{2}(R + r)$. Zbývá už jen dokázat (tedy obecně vypočítat), že vzdálenost $|PJ|$ je rovna $\frac{1}{2}(r + R)$. (Není to lehké.)

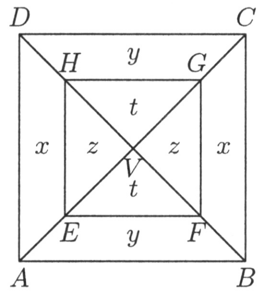
b) Pomocí shodných a podobných zobrazení je nejelegantnější následující postup: Pomocí souřadnic (bod M zvolíme za počátek souřadného systému) je $P = X + Y - T = Y + h(Y) - T = Y + (R/r)Y - T = (1 + R/r)Y - T$, bod P tedy vznikne z bodu Y (a všechny body Y tvoří větší z oblouků L_1L_2 kružnice l bez bodů T, L_1, L_2) složením stejnolehlosti se středem M a koeficientem $1 + R/r$ a posunutí o vektor $\boldsymbol{TM}$.

B – I – 5

Protože dva sousední vrcholy leží vždy ve dvou společných stěnách, budeme si všímat především takovýchto dvojic vrcholů.

Vrcholy A a B (B a C) leží ve společných stěnách $ABFE$ a $ABCD$ ($BCGF$ a $BCDA$). Proto porovnáním jim přiřazených čísel dostaneme, že na stěnách $ADHE$ a $BCGF$ ($ABFE$ a $CGHD$) je stejné číslo. Označme ho x (y).

Podobně vrcholy E a F (F a G) leží ve společných stěnách $EFBA$ a EFV ($FGCB$ a FGV) a navíc už víme, že stěny $ADHE$ a $FBCG$ ($ABFE$ a $GHDC$) mají stejná čísla. Proto porovnáním jim přiřazených čísel dostaneme, že na stěnách HEV a FGV (EFV a GHV) je stejné číslo. Označme ho z (t, obr. 29).



Obr. 29

Porovnáním čísel příslušných vrcholům A a E (mají společné stěny $EABF$ a $EADH$) dále dostaneme, že stěna $ABCD$ má číslo $s = z + t$.

Nakonec porovnejme vrcholy E a V (mají společné stěny EFV a HEV). Dostaneme $z + t = x + y$.

Když to vše shrneme, zjistíme, že jednotlivé stěny jsou nutně očíslovány čísly x (stěny $BCGF$ a $DAEH$), z (stěny FGV a EHV), s (stěna $ABCD$), $s - x$ (stěny $ABFE$ a $CDHG$), $s - z$ (stěny EFV a GHV). A snadno se přesvědčíme, že takovéto očíslování má vždy požadovanou vlastnost (všem vrcholům je přiřazeno číslo $2s$).

My známe čtyři různá čísla z devíti čísel x, x, z, z, s, $s - x$, $s - x$, $s - z$, $s - z$, tedy čtyři čísla z pěti čísel x, z, s, $s - x$, $s - z$.

a) Pokud je neznámé páté číslo s, tvoří známá čísla dvě dvojice se stejným součtem: $x + (s - x) = z + (s - z)$. Pro daná čísla tak máme jedinou možnost $25 + 57 = 32 + 50 = 82$. Hledaná čísla jsou pak 25, 32, 50, 57 a 82.

b) Není-li páté neznámé číslo s, je jedno známé číslo (a to s) součtem dalších dvou známých: $s = x + (s - x)$, nebo $s = z + (s - z)$. Pro daná čísla je jediná možnost: $25 + 32 = 57$. Potom je $s = 57$ a hledanou pětici tvoří čísla 7, 7, 25, 32 a 50.

Odpověď. Hledaná čísla jsou buď 25, 32, 50, 57 a 82, nebo čísla 7, 7, 25, 32 a 50.

Ještě naznačíme, jak by mohl vypadat čistě *algebraický přístup* — řešením devíti rovnic o deseti neznámých.

Kvůli přehlednosti si musíme dát záležet na označení jednotlivých čísel napsaných na stěnách. Označme čísla na stěnách $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$, EFV, FGV, GHV, HEV a $ABCD$ postupně a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c a nechť společný součet na stěnách při každém vrcholu je s. Dostaneme tak následujících devět rovnic:

$$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = s, \tag{F}$$
$$a_2 + a_3 + b_2 + b_3 = s, \tag{G}$$
$$a_3 + a_4 + b_3 + b_4 = s, \tag{H}$$
$$a_4 + a_1 + b_4 + b_1 = s, \tag{E}$$
$$a_1 + a_2 + c = s, \tag{B}$$
$$a_2 + a_3 + c = s, \tag{C}$$
$$a_3 + a_4 + c = s, \tag{D}$$
$$a_4 + a_1 + c = s, \tag{A}$$
$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = s. \tag{V}$$

Porovnáním rovnic (B) a (C) máme $a_1 = a_3$. Porovnáním rovnic (D) a (C) máme $a_2 = a_4$.

Pomocí těchto vztahů dále dostaneme: porovnáním rovnic (F) a (G) vyjde $b_1 = b_3$; porovnáním rovnic (G) a (H) vyjde $b_2 = b_4$.

To znamená, že pro čísla a_1, a_2, b_1, b_2 a c zůstaly rovnice

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + b_1 + b_2 &= s, \\ a_1 + a_2 + c &= s, \\ b_1 + b_2 &= \tfrac{1}{2}s. \end{aligned}$$

Odtud už snadno dostaneme, že $c = a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = \frac{1}{2}s$.

B – I – 6

Podstatou řešení jsou následující dvě úlohy:

A. Jsou dány body K, L. Veďte jimi po řadě rovnoběžky k, l, je-li dána jejich vzdálenost d.

B. Jsou dány body K, L a přímka m. Veďte body K, L po řadě rovnoběžky k, l, které na přímce m vytínají úsečku dané délky d.

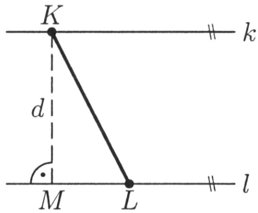
Řešení úlohy A (obr. 30). Nechť M je pata kolmice vedené z bodu K na přímku l. V trojúhelníku KLM s pravým úhlem při vrcholu M známe vrcholy K, L a délku odvěsny $|KM| = d$, vrchol M tedy umíme sestrojit (jako průsečík Thaletovy kružnice t nad průměrem KL s kružnicí $\varkappa(K; d)$). Potom ML je přímka l.

Pokud bychom požadovali diskusi, víme, že počet řešení závisí na existenci průsečíku kružnic t a $\varkappa$:

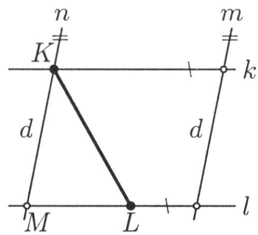
Pokud $|KL| < d$, nemá úloha řešení.

Pokud $|KL| = d$, má úloha jedno řešení (kolmice na KL).

Pokud $|KL| > d$, mají kružnice k a t dva průsečíky, takže úloha má dvě řešení.



Obr. 30



Obr. 31

Řešení úlohy B (obr. 31). Veďme bodem K rovnoběžku n s přímkou m a označme M její průsečík s přímkou l. Potom $|KM| = d$, takže konstrukce bodu M je zřejmá. Přímka l je pak určena body L a M.

Pokud bychom požadovali diskusi, snadno zjistíme, že na přímce n existují dva body M požadovaných vlastností, a počet řešení závisí na tom, zda $M = L$.

Pokud současně neplatí, že KL je rovnoběžná s m a $|KL| = d$, má úloha dvě řešení.

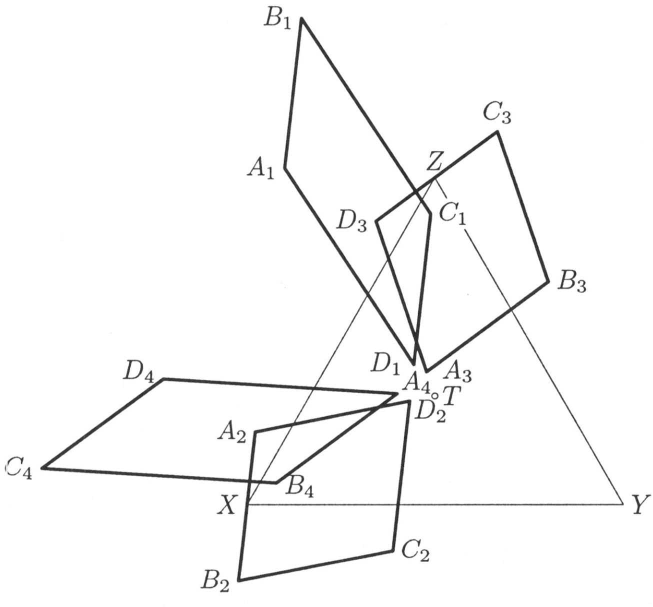
Pokud je KL rovnoběžná s m a $|KL| = d$, vznikne pro jednu z možných poloh bodu M v předcházejícím případě nekonečně mnoho řešení (za přímku l můžeme vzít libovolnou přímku procházející bodem L).

Řešení původní úlohy. Z obsahu rovnoběžníku $ABCD$ a délky strany AB snadno vypočítáme výšku v na stranu AB: je $v = 8\,\mathrm{cm}^2 : 2\,\mathrm{cm} = 4\,\mathrm{cm}$. Odtud plyne, že vzdálenost rovnoběžek AB a CD je 4 cm, přičemž známe bod X přímky AB a bod Z přímky CD. Podle úlohy A tedy umíme sestrojit přímky AB a CD.

V poloze, která je dána, má tato část dvě řešení.

Když už máme přímku AB, jsou AD a BC dvě neznámé rovnoběžky, které procházejí danými body T a Y a na (známé) přímce AB vytínají úsečku dané délky $|AB| = 2\,\mathrm{cm}$. Proto můžeme rovnoběžky AD a BC sestrojit na základě úlohy B.

Je zřejmé, že speciální poloha daných bodů X, Y, Z a T nemá na postup řešení vliv, zaručuje nám však snadnou diskusi počtu řešení. Pro obě polohy přímky AB má úloha v dané situaci dvě řešení. Tím je rovnoběžník $ABCD$ sestrojen. (Přímkami AB, BC, CD a AD jsou vrcholy A, B, C, D určeny.) Úloha má 4 řešení (obr. 32).



Obr. 32

B – S – 1

Uvažovaná funkce f je po částech lineární, proto je omezená na každém omezeném intervalu. Stačí tedy funkci f vyšetřit zvlášť pro $x \leqq \min(1, b)$ a zvlášť pro $x \geqq \max(1, b)$, kdy mají oba výrazy v absolutních hodnotách stejné znaménko.

a) Je-li $x \leqq \min(1, b)$, je

$$f(x) = a(1 - x) + b(x - 3) + b - x + x - 1 = (b - a)x - 2b + a - 1.$$

Funkce f bude na tomto intervalu omezená, právě když zde bude konstantní, tj. právě když $a = b$.

a) Je-li $x \geqq \max(1, b)$, je

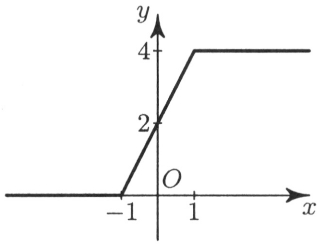
$$f(x) = a(x-1) + b(x-3) + x - b + x - 1 = (a+b+2)x - a + 4b - 1.$$

Funkce f bude na tomto intervalu omezená, právě když tu bude konstantní, tj. právě když $a + b = -2$.

Spojením obou podmínek dostáváme, že funkce f bude omezená, právě když bude omezená na obou uvedených neomezených intervalech, tj. právě když $a = b = -1$. Pro funkci f pak dostaneme vyjádření

$$f(x) = |x+1| - |x-1| + 2.$$

Její graf vidíme na obr. 33.

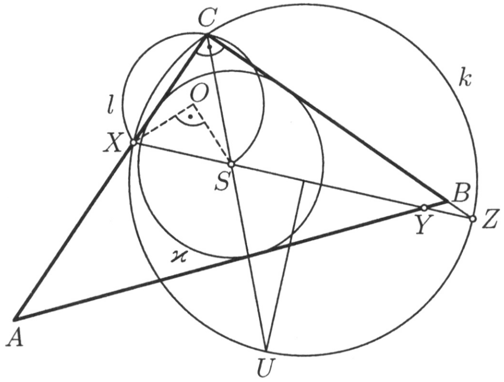


Obr. 33

B – S – 2

Předpokládejme, že trojúhelník ABC je řešením úlohy. Z daného pořadí bodů X, S, Y, Z na jedné přímce a z toho, že bod S je vnitřním bodem trojúhelníku ABC, vyplývá, že body X a Y jsou vnitřními body příslušných stran AC a AB, zatímco bod Z musí ležet na polopřímce opačné k polopřímce BC. Vrchol C neznámého trojúhelníku ABC budeme hledat jen v jedné z polorovin určených přímkou XZ, protože ke každému řešení existuje řešení souměrně sdružené podle osy XZ.

Vrchol C trojúhelníku ABC je vrcholem pravého úhlu XCZ (obr. 34), leží tedy na Thaletově kružnici k nad průměrem XZ. Protože bod S je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC, leží na ose pravého úhlu, takže $|\sphericalangle SCX| = 45°$ a vrchol C leží zároveň na oblouku kružnice l určené tětivou SX a obvodovým úhlem $45°$. (Vzhledem k uvedené souměrnosti



Obr. 34

stačí uvažovat jen ten ze dvou souměrných oblouků, který leží ve zvolené polorovině.) Odtud už plyne konstrukce trojúhelníku ABC:

1. sestrojíme kružnici k nad průměrem XZ;
2. v jedné z polorovin určených přímkou XZ sestrojíme vrchol O rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku XSO, $|\sphericalangle SOX| = 90°$, a v téže polorovině narýsujeme oblouk SX kružnice $l(O, |OS|)$;
3. vrchol $C = k \cap \widehat{SX}$, $C \neq X$;
4. sestrojíme kružnici $\varkappa(S; \varrho)$, kde ϱ je vzdálenost bodu S od přímky CX (poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC);
5. bodem Y vedeme tečnu t ke kružnici $\varkappa$ tak, aby její bod dotyku ležel v polorovině opačné k polorovině XZC;
6. vrcholy A, B dostaneme jako průsečíky přímky t s přímkami XC, resp. ZC.

Z popsané konstrukce je zřejmé, že pro bod S ležící mezi body X a Z mají kružnice k a l právě jeden průsečík různý od bodu X. Abychom mohli sestrojit tečnu t, musí bod Y ležet vně kruhu omezeného kružnicí $\varkappa$, musí tedy být $|SY| \geqq \varrho$. Aby existoval průsečík tečny t s přímkou XC uvnitř úhlu XCZ, musí být dokonce $|YS| > |XS| > \varrho$. V našem případě je to splněno a úloha má dvě shodná řešení souměrně sdružená podle osy XZ.

Úlohu bychom řešili stejně, i kdyby dané body X, S, Y, Z neležely na jedné přímce.

Poznámka. Bod C můžeme sestrojit i jiným postupem. Protože body X a Z leží po řadě na polopřímkách CA a CB, je pravý úhel XCZ

totožný s pravým úhlem ACB. Osa tohoto úhlu prochází středem S kružnice vepsané trojúhelníku ABC; zároveň tato osa protne kružnici k opsanou trojúhelníku XCZ v takovém bodě $U \neq C$, že tětivy XU a UZ jsou shodné (tyto tětivy jsou totiž z bodu C vidět pod týmž úhlem (45 stupňů), obr. 34). Proto (aniž známe bod C) můžeme bod U sestrojit jako střed oblouku XZ kružnice k (oblouky XU a UZ jsou tedy čtvrtkružnice). Bod C pak určíme jako průsečík kružnice k s polopřímkou US.

B – S – 3

V daném výrazu se pravidelně střídají plusy a minusy, přičemž lichá čísla mají znaménko plus a sudá minus. Zřejmě musí každá dvojice odpovídajících si závorek obsahovat právě tři po sobě jdoucí čísla. Umístíme-li levou závorku mezi plus a příslušné liché číslo, nemají závorky na hodnotu výrazu žádný vliv. Zajímavý je tedy jen případ, kdy levou závorku dáme mezi minus a následující sudé číslo, což změní výsledné znaménko druhého a třetího čísla v závorkách. Je-li zmíněné sudé číslo $2k$ ($1 \leqq k \leqq 49$), dostaneme místo původního součtu $-2k + (2k + 1) - (2k + 2) = -2k - 1$ součet $-\bigl(2k + (2k + 1) - (2k + 2)\bigr) = -2k - (2k + 1) + (2k + 2) = -2k + 1$. Vidíme tedy, že přidáním jednoho páru závorek popsaným způsobem zvětšíme celkovou hodnotu výrazu o 2 bez ohledu na to, kterou trojici po sobě jdoucích čísel začínající sudým číslem zvolíme. Zároveň je jasné, že takto umístěný pár závorek obsahuje další sudé číslo (kromě čísla $2k$ ještě $2k + 2$), které už nebudeme moci pro umístění závorky využít. (Nebudeme tedy zbytečně rozmisťovat závorky před lichá čísla, protože bychom se zbavili dalšího sudého čísla, před které lze umístit levou z dvojice závorek, jež by měly vliv na hodnotu daného výrazu.)

Daný výraz obsahuje celkem 50 sudých čísel. Můžeme tedy vybrat nejvýše 25 dvojic po sobě jdoucích sudých čísel, jež obklopíme závorkami. Tomu odpovídá 26 různých hodnot daného výrazu s k dvojicemi závorek, kde $0 \leqq k \leqq 25$. Příslušné hodnoty jsou $-50, -48, -46, \ldots, 4, 2, 0$ (nejmenší hodnota je $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 99 - 100 = -50$, největší $1 - (2 + 3 - 4) + 5 - (6 + 7 - 8) + \ldots - (98 + 99 - 100) = 0$).

B – II – 1

Označíme-li pro dané reálné c

$$f_c(x) = c|x + c + 14| + 8|x - c + 2| - (c^2 + c - 8)(x + 2)$$

odpovídající po částech lineární funkci, je zřejmé, že rovnice $f_c(x) = 0$ bude mít nekonečně mnoho celočíselných řešení, právě když bude funkce f_c identicky rovna nule na některém z nekonečných intervalů $(-\infty, \min(c-2, -c-14)\rangle$ nebo $\langle \max(c-2, -c-14), \infty)$. Vyšetříme postupně obě možnosti.

a) Nechť $x \leqq \min(c-2, -c-14)$, pro taková x platí

$$\begin{aligned} f_c(x) &= -c(x+c+14) - 8(x-c+2) - (c^2+c-8)(x+2) = \\ &= -c(2+c)x - 3c^2 - 8c = -c\big(x(c+2) + 3c + 8\big). \end{aligned}$$

Na tomto intervalu bude funkce f_c identicky rovna nule, právě když $c = 0$ (soustava $c + 2 = 0$, $3c + 8 = 0$ nemá žádné řešení).

b) Nechť $x \geqq \max(c-2, -c-14)$, pro taková x platí

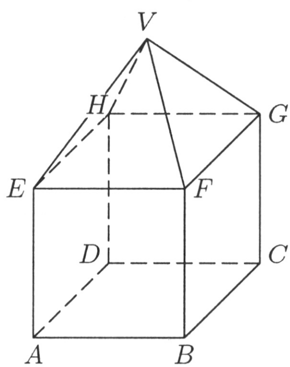
$$\begin{aligned} f_c(x) &= c(x+c+14) + 8(x-c+2) - (c^2+c-8)(x+2) = \\ &= (16-c^2)x - c^2 + 4c + 32. \end{aligned}$$

Na tomto intervalu bude funkce f_c identicky rovna nule, právě když bude současně platit $c^2 = 16$ a $c^2 - 4c - 32 = 0$. Dosazením $c^2 = 16$ do druhé rovnice vychází $c = -4$, což je zřejmě jediné řešení obou rovnic.

Závěr. Daná rovnice má v oboru celých čísel nekonečně mnoho řešení, právě když $c = 0$ nebo $c = -4$ (v prvním případě rovnici vyhovují všechna celá čísla $x \leqq -14$, v druhém pak všechna celá čísla $x \geqq -6$).

B – II – 2

Označme A, B, C, D, E, F, G, H vrcholy zmíněné krychle a V vrchol přilepeného jehlanu (obr. 35). Čísla napsaná na bočních stěnách $ABFE$,



Obr. 35

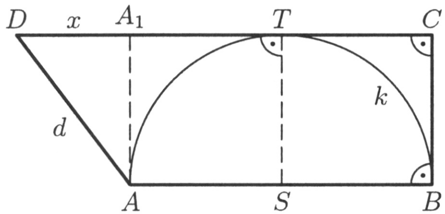
$BCGF$, $CDHG$, $DAEH$ označme postupně a_1, a_2, a_3 a a_4, čísla na bočních stěnách EFV, FGV, GHV a HEV přilepeného jehlanu označme po řadě b_1, b_2, b_3 a b_4, číslo na podstavě $ABCD$ označme c. Dále označme s uvedený společný součet.

Porovnáním součtů příslušných stěnám EFV a GHV dostaneme rovnost $a_1 = a_3$, analogicky pro další dvojici stěn vyjde $a_2 = a_4$. Porovnáním součtů příslušných stěnám $ABFE$ a $CDHG$ vyjde $b_1 = b_3$ a analogicky pro další takovou dvojici stěn $b_2 = b_4$. Porovnáním součtů příslušných stěnám $CDHG$ a HEV dostaneme rovnost $b_1 = c + a_2$ a analogicky pro dvojici stěn $DAHE$ a GHV rovnost $b_2 = c + a_1$. Porovnáním součtů dvou sousedních stěn krychle vychází $a_2 + a_4 + b_1 = a_1 + a_3 + b_2$, neboli $2a_2 + b_1 = 2a_1 + b_2$, což dosazením z posledních dvou získaných rovností dává rovnost $a_2 = a_1$, a tedy také $b_2 = b_1 = c + a_1$. Můžeme proto psát $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a$, $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b = a + c$ a z rovnosti součtů příslušných podstavě a jedné z bočních stěn krychle vychází $4a = 2a + b + c = 3a + 2c$, takže $a = 2c$, $b = 3c$ a celkový součet všech čísel je $c + 4a + 4b = 21c$. Z rovnice $21c = 3\,003$ plyne $c = 143$. Na stěnách devítistěnu jsou napsána čísla 143, 286 (čtyřikrát) a 429 (čtyřikrát).

Poznámka. Úlohu je možno řešit i vypsáním a následným řešením soustavy deseti lineárních rovnic pro devět neznámých čísel zapsaných na stěnách tělesa a desátou neznámou rovnou jednotnému součtu.

B – II – 3

Označme S střed strany AB a T bod dotyku polokružnice k se stranou CD. Jestliže je AB základnou daného lichoběžníku, je $CD \parallel AB$ a $|AB| + |BC| + |CT| = 2|AB| = 16\,\mathrm{cm}$ (obr. 36). Označme A_1 kolmý

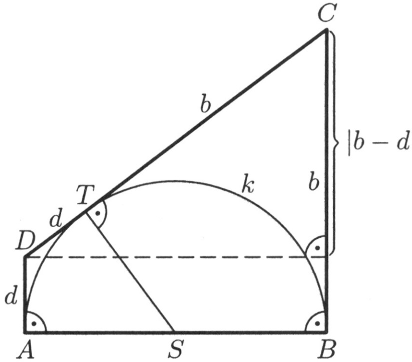


Obr. 36

průmět vrcholu A na přímku CD. Protože $|TD| + |DA| = 28\,\mathrm{cm} - 16\,\mathrm{cm} = 12\,\mathrm{cm} > |AA_1| + |A_1T| = 8\,\mathrm{cm}$, leží vrchol D na polopřímce TA_1 za bodem A_1. Označme velikost $|A_1D| = x\,\mathrm{cm}$, $|DA| = d\,\mathrm{cm}$. Pro čísla x,

d dostáváme soustavu rovnic $d + x = 8$, $d^2 = x^2 + 4^2$ (Pythagorova věta pro trojúhelník AA_1D), kterou snadno upravíme na tvar $d + x = 8$, $(d - x)(d + x) = 16$, tj. $d + x = 8$, $d - x = 2$. Soustava má jediné řešení $d = 5$, $x = 3$. Zbývající strany daného lichoběžníku mají tedy velikosti 4 cm, 11 cm a 5 cm.

Je-li AB ramenem daného lichoběžníku $ABCD$, je $AB \perp BC \parallel AD$ (obr. 37), takže obě základny BC a AD se dotýkají polokružnice k v od-

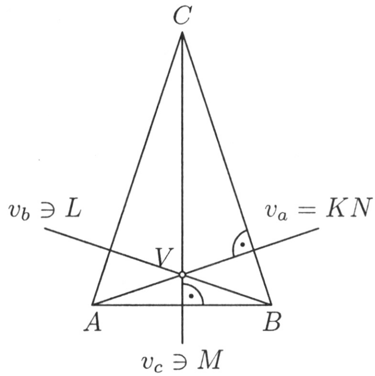


Obr. 37

povídajících vrcholech B a A. Označme b shodné úseky tečen z vrcholu C a d shodné úseky tečen z vrcholu D k polokružnici k. Ze znalosti obvodu tak dostáváme (v centimetrech) rovnost $28 = 8 + 2b + 2d$ neboli $b + d = 10$. Z rovnoběžnosti $BC \parallel AD$ plyne $|b - d| = \sqrt{(b + d)^2 - 8^2} = 6$. Vzhledem k souměrnosti podle osy dané polokružnice k stačí uvažovat jen jednu z možností, např. $b > d$. Soustava $b + d = 10$, $b - d = 6$ má jediné řešení $b = 8$, $d = 2$, takže zbývající strany daného lichoběžníku mají v tomto případě velikosti 8 cm, 10 cm a 2 cm, což platí i v případě $b < d$.

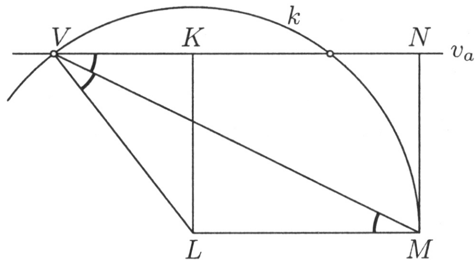
B – II – 4

Podle zadání známe přímku KN, na níž leží výška v_a. Protože výška v_b je souměrně sdružená s v_a podle osy základny AB hledaného rovnoramenného trojúhelníku ABC, na níž zároveň leží jeho třetí výška v_c, pokusíme se najít průsečík V těchto výšek. Ten má tu vlastnost, že bod L leží na přímce souměrně sdružené s $v_a = KN$ podle $VM = v_c$ (obr. 38). Jakmile bod V najdeme, budeme zároveň znát polohu všech tří výšek trojúhelníku ABC, takže až na podobnost můžeme sestrojit i hledaný trojúhelník ABC.



Obr. 38

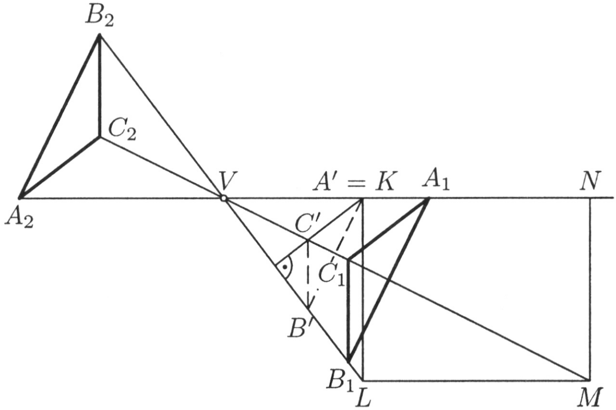
Předpokládejme, že bod V na přímce KN má požadovanou vlastnost (obr. 39). Ze souměrnosti přímek VL a VN podle VM plyne rovnost vyznačených úhlů s vrcholem V. Z rovnoběžnosti přímek KN a LM dostáváme, že stejnou velikost má i úhel LMV, takže trojúhelník MVL je rovnoramenný se základnou MV. Je tudíž $|LV| = |LM|$ a bod V najdeme jako průsečík přímky KN s kružnicí $k(L; |LM|)$. Protože dle předpokladu je $|KL| < |KN| = |LM|$, existují takové průsečíky dva.



Obr. 39

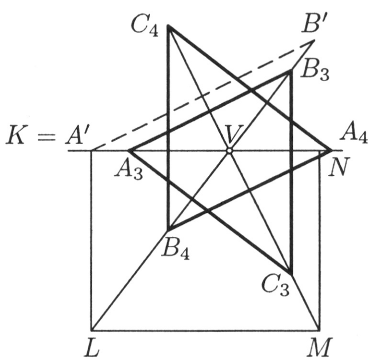
Nyní dokončíme konstrukci trojúhelníku ABC. Nejprve sestrojíme pomocný trojúhelník $A'B'C'$, který bude stejnolehlý s hledaným trojúhelníkem ABC, a to tak, že na přímce KN libovolně zvolíme bod $A' \neq V$ (na obr. 40 je jako bod A' zvolen daný vrchol K), sestrojíme bod B' souměrně sdružený s bodem A' podle VM a vrchol C', v němž kolmice na $B'V$ vedená bodem A' protne přímku VM. Protože má platit

$|AB| = |KL|$, trojúhelník ABC sestrojíme užitím té stejnolehlosti se středem V, která známou úsečku $A'B'$ převede na hledanou úsečku AB



Obr. 40

dané délky $|KL|$ (takové stejnolehlosti jsou dvě). Pro každý z možných bodů V tak bude mít úloha dvě řešení (na obr. 40 trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$, na obr. 41 trojúhelníky $A_3B_3C_3$ a $A_4B_4C_4$) středově souměrná podle příslušného průsečíku výšek.



Obr. 41