49. ročník matematické olympiády na středních školách

Přípravné soustředění před 41. MMO

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 49. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1999/2000. 41. mezinárodní matematická olympiáda. 12. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2005. pp. 147–150.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405017

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Přípravné soustředění před 41. MMO

V průběhu 49. ročníku se konalo výběrové soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu bezprostředně po skončeném celostátním kole kategorie A, a to od 17. do 21. dubna 2000 v Jevíčku. Na soustředění byli pozváni nejlepší řešitelé III. kola kategorie A s přihlédnutím k výsledkům II. kola. Soustředění bylo zaměřeno na přípravu reprezentantů a ke konečné nominaci šestičlenného družstva.

Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Jan Houštěk	7/7, G Jirsíkova 244, Pelhřimov	91,5
Jan Herman	3/4, G tř. Kpt. Jaroše 14, Brno	76,5
Jan Kynčl	5/6, G Kostelní 259, Jilemnice	86,5
Jan Pipek	7/8, G Parléřova 2/118, Praha 6	61
Jaroslav Hájek	2/4, G 17. listopadu 526, Bílovec	76
Ondřej Suchý	6/7, G Mikulášské nám. 23, Plzeň	63
Josef Křišťan	6/7, G Mikulášské nám. 23, Plzeň	58
Rudolf Stolař	3/4, G tř. Kpt. Jaroše 14, Brno	63

Na základě uvedených výsledků, v nichž jsou započítány i výsledky oblastního a celostátního kola, bylo prvních šest vybráno do reprezentačního družstva a sedmý byl určen jako náhradník. Toto družstvo nás reprezentovalo i na již tradičním střetnutí s družstvem Slovenska.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:
dr. *Martin Panák* (17.4.),
dr. *Jaroslav Švrček* (18.4.),
doc. *Jaromír Šimša* (19.4.),
dr. *Pavel Calábek* (20.4.),
dr. *Karel Horák* (21.4.).

Úlohy zadané na přípravném soustředění

1. Najděte všechna přirozená čísla n taková, že $2^n - 1$ je násobkem čísla 3 a $\frac{1}{3}(2^n - 1)$ je dělitelem $4m^2 + 1$ pro nějaké m.

2. Mějme přirozená s, t a nechť (x, y) je uspořádaná dvojice celých čísel. *Změnou* dostaneme z dvojice (x, y) dvojici $(x + t, y - s)$. Dvojici (x, y) nazveme *dobrou*, jestliže po nějakém počtu změn (i nulovém) dostaneme dvojici soudělných čísel.

a) Rozhodněte, jestli je (s, t) „dobrá“ dvojice.

b) Ukažte, že pro libovolné s a t existují celá x, y taková, že dvojice (x, y) není dobrá.

3. Nechť $\mathsf{X} = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geqq 2$ a nechť $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_k$ jsou podmnožiny množiny X takové, že pro libovolné indexy $1 \leqq i_1, i_2, i_3, i_4 \leqq k$ platí

$$|\mathsf{A}_{i_1} \cup \mathsf{A}_{i_2} \cup \mathsf{A}_{i_3} \cup \mathsf{A}_{i_4}| \leqq n - 2.$$

Dokažte, že $k \leqq 2^{n-2}$.

4. Nechť M, N jsou takové vnitřní body trojúhelníku ABC, pro něž platí $|\sphericalangle MAB| = |\sphericalangle NAC|$ a $|\sphericalangle MBA| = |\sphericalangle NBC|$. Dokažte, že platí

$$\frac{|AM| \cdot |AN|}{|AB| \cdot |AC|} + \frac{|BM| \cdot |BN|}{|BA| \cdot |BC|} + \frac{|CM| \cdot |CN|}{|CA| \cdot |CB|} = 1.$$

5. Funkce $f \colon \langle 0; 1\rangle \to \mathbb{R}$ taková, že platí $f(0) = f(1) = 0$, vyhovuje pro všechny dvojice u, v různých čísel z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ podmínce

$$|f(u) - f(v)| \leqq |u - v|.$$

Dokažte, že pro libovolná $a, b \in \langle 0, 1\rangle$ platí nerovnost

$$|f(a) - f(b)| \leqq \frac{1}{2}.$$

6. Každý bod prostoru je obarven bílou nebo černou barvou. Dokažte, že (v prostoru) lze vybrat 5 bodů stejné barvy tak, že jeden z nich je těžištěm čtyřstěnu, jehož vrcholy tvoří zbylé 4 vybrané body.

7. Úhlopříčky konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v bodě R. Body P, Q nechť jsou po řadě středy stran AB, CD. Jestliže je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový, pak přímky, které jsou kolmé k BD, AC, AD a procházejí po řadě body P, Q, R, se protínají v jednom bodě. Dokažte.

8. Nechť A je lichá a B sudá číslice. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo, které je dělitelné číslem 2^n a které nemá ve svém dekadickém zápise číslice různé od A a B.

9. Najděte nejmenší celé číslo c s vlastností: Splňuje-li nekonstantní mnohočlen $P(x)$ s celočíselnými koeficienty podmínku $P(1) = P(2) = 0$, pak aspoň jeden z jeho koeficientů není větší než c.

10. Osa úhlu BAC protne stranu BC trojúhelníku ABC v bodě D. Na polopřímkách AB a AC jsou vybrány po řadě body M a N tak, že $|\sphericalangle MDA| = |\sphericalangle ABC|$ a $|\sphericalangle NDA| = |\sphericalangle ACB|$. Označme P průsečík přímek AD a MN. Dokažte rovnost $|AD|^3 = |AB| \cdot |AC| \cdot |AP|$.

11. Součin kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je roven 1. Dokažte nerovnost

$$\frac{1}{n-1+a_1} + \frac{1}{n-1+a_2} + \ldots + \frac{1}{n-1+a_n} \leqq 1.$$

12. Vrcholy A, B, C ostroúhlého trojúhelníku ABC leží po řadě na stranách B_1C_1, C_1A_1 a A_1B_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$, přičemž platí podobnost $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$. Dokažte, že průsečíky výšek obou trojúhelníků mají stejnou vzdálenost od středu kružnice opsané trojúhelníku ABC.

13. Osy AA_1, BB_1, CC_1 úhlů trojúhelníku ABC se protínají v bodě M (A_1, B_1, C_1 jsou body stran trojúhelníku ABC).

Dokažte: Jestliže jsou si poloměry kružnic vepsaných do trojúhelníků MB_1A a MC_1A rovny a poloměry kružnic vepsaných do trojúhelníků MC_1B a MA_1B jsou si také rovny, pak je trojúhelník ABC rovnostranný.

14. Určete všechny reálné polynomy f vyhovující rovnici

$$f(x^2) = f(x)f(x-1).$$

15. Z Wilsonovy věty je známo, že posloupnost $\left(\dfrac{n!+1}{n+1}\right)_{n=0}^{\infty}$ obsahuje nekonečně mnoho celých čísel.

a) Určete všechna přirozená čísla a s vlastností, že posloupnost $\left(\dfrac{n!+a}{n+a}\right)$ obsahuje nekonečně mnoho celých čísel.

b) Určete všechny celočíselné členy této posloupnosti pro $a = 2$ a $a = 5$.

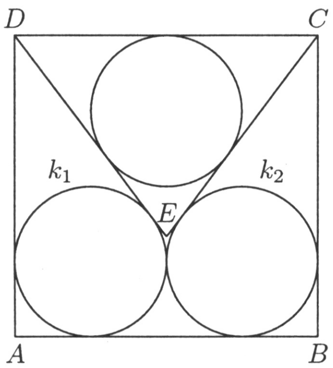
16. Rozhodněte, zda existuje rostoucí funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s následujícími vlastnostmi:

$$f(1) = 2,$$
$$f\big(f(n)\big) = f(n) + n.$$

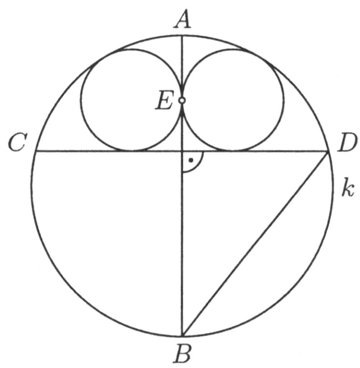
17. V rovině je dán trojúhelník $A_1A_2A_3$ a libovolný bod P_0. Položme $A_{k+3} = A_k$ pro $k \geqq 1$ a sestrojme posloupnost bodů $P_0, P_1, P_2, \ldots$ tak, že pro každé $k \geqq 1$ bude bod P_k obrazem bodu P_{k-1} při otočení o úhel $120°$ (v záporném smyslu) okolo středu A_k. Jestliže $P_{1998} = P_0$, je trojúhelník $A_1A_2A_3$ rovnostranný. Dokažte.

18. Je dán pravidelný n-úhelník, $n \geqq 5$; označme A a B dva jeho sousední vrcholy, O jeho střed. V rovině n-úhelníku se pohybuje trojúhelník XYZ shodný s trojúhelníkem OAB, a to tak, že nejprve $X = O$, $Y = A$, $Z = B$ a potom Y a Z probíhají oba celý obvod n-úhelníku, přičemž X leží stále uvnitř n-úhelníku. Určete množinu všech možných poloh vrcholu X.

19. Dvě shodné kružnice k_1, k_2 mají vnější dotyk a současně se zevnitř dotýkají po řadě stran AD a AB, resp. AB a BC daného čtverce $ABCD$ (obr. 58). Uvažujme tečny DE, CE po řadě ke kružnicím k_1, k_2. Dokažte, že kružnice vepsaná trojúhelníku CDE je shodná s kružnicemi k_1 a k_2.



Obr. 58



Obr. 59

20. Nechť AB je průměr a CD tětiva dané kružnice k, přičemž $AB \perp CD$. Uvažujme dvojici shodných kružnic k_1, k_2, které se vně dotýkají v bodě E ležícím na průměru AB (obr. 59). Dokažte, že trojúhelník BDE je rovnoramenný.