49. ročník matematické olympiády na středních školách

6. česko-slovenské střetnutí

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 49. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1999/2000. 41. mezinárodní matematická olympiáda. 12. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2005. pp. 151–158.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405018

6. česko-slovenské střetnutí

MODRA-PIESOK 7.–10. ČERVNA 2000

Dvě šestice úspěšných finalistů matematické olympiády kategorie A vybraných pro reprezentaci České a Slovenské republiky na MMO se už pošesté utkaly ve vzájemném střetnutí, jehož organizace se v tomto roce ujala *Slovenská komisia matematickej olympiády*. Spolu se svými vedoucími byli reprezentanti pozváni do rekreační Zochovy chaty bratislavské Iuventy v Modre-Piesok nedaleko Bratislavy. Tam po dva dny řešili dvě trojice úloh za podmínek obdobných třetímu kolu kategorie A (4,5 hodiny na tři úlohy). Z našich reprezentantů se bohužel omluvil Jan Houštěk, kterého v tomto klání nahradil Josef Křišťan. Slovenské mužstvo shodou okolností vystoupilo rovněž s jedním náhradníkem, Balasze Keszegha nahradil Tomáš Kulich.

Pořadí	Jméno	Země	body	Součet
1.	Vladimír Zajac	SVK	7 7 2 7 7 7	37
2.	Miroslava Sotáková	SVK	7 7 1 6 7 2	30
3.	Tomáš Jurík	SVK	7 2 2 6 7 1	25
4.	Katarína Quittnerová	SVK	7 1 0 7 4 1	20
5.	*Jan Kynčl*	CZE	7 0 3 7 1 1	19
6.	Peter Májek	SVK	7 1 0 7 1 1	17
7.	*Jaroslav Hájek*	CZE	7 1 1 4 1 2	16
8.	*Josef Křišťan*	CZE	6 0 4 1 2 1	14
9.	*Jan Herman*	CZE	7 0 0 6 0 0	13
10.	Tomáš Kulich	SVK	7 0 0 0 1 0	8
11.–12.	*Ondřej Suchý*	CZE	0 0 0 2 0 0	2
11.–12.	*Rudolf Stolař*	CZE	2 0 0 0 0 0	2

Jak je vidět z připojené tabulky, nedopadli tentokrát naši reprezentanti ve společném měření sil před 41. MMO moc dobře. O nic lépe si nevedli ani v tradičním volejbalovém střetnutí (prohráli 0 : 3).

Náš tým doprovázeli RNDr. *Jaroslav Švrček*, CSc., a Mgr. *Pavel Calábek*, Dr., slovenský tým vedli *Eugen Kováč* a *Juraj Földes*.

Texty soutěžních úloh

1. Dokažte, že pokud kladná reálná čísla a, b, c splňují nerovnost

$$5abc > a^3 + b^3 + c^3,$$

pak existuje trojúhelník s délkami stran a, b, c. (*MO Bělorusko, 1999*)

2. Je dán trojúhelník ABC a jemu vepsaná kružnice k. Kružnice k_a, k_b, k_c protínají ortogonálně kružnici k a úsečky BC, CA, AB jsou (v tomto pořadí) jejich tětivy. Kružnice k_a, k_b se znovu protínají v bodě C', kružnice k_c, k_a v bodě B' a kružnice k_b, k_c v bodě A'. Dokažte, že poloměr kružnice opsané trojúhelníku $A'B'C'$ je polovinou poloměru kružnice k.

Poznámka. Říkáme, že dvě kružnice se protínají *ortogonálně*, jestliže jsou jejich tečny v každém společném bodě navzájem kolmé.

(*jury MMO 1999*)

3. Dokažte, že přirozené číslo n je mocninou 2, právě když existuje celé číslo m takové, že $2^n - 1$ je dělitelem čísla $m^2 + 9$. (*jury MMO 1998*)

4. Nechť P je mnohočlen s celočíselnými koeficienty. Dokažte, že mnohočlen Q, kde

$$Q(x) = P(x^4)P(x^3)P(x^2)P(x) + 1,$$

nemá celočíselný kořen. (*E. Kováč*)

5. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Kružnice vepsaná trojúhelníku BCD se dotýká strany CD v bodě E. Nechť F je takový bod na ose úhlu DAC, že přímky EF a CD jsou navzájem kolmé. Kružnice opsaná trojúhelníku ACF protíná přímku CD v bodech C a G. Dokažte, že trojúhelník AFG je rovnoramenný.

(*USAMO, 1999*)

6. Každé celé číslo je obarveno jednou z barev červená, modrá, zelená a bílá. Nechť x a y jsou lichá čísla taková, že $|x| \neq |y|$. Dokažte, že existují nějaká dvě celá čísla stejné barvy, jejichž rozdíl nabývá jednu z hodnot x, y, $x + y$ anebo $x - y$. (*jury MMO 1999*)

Řešení úloh

1. Tvrzení dokážeme sporem. Nechť pro nějaká kladná reálná čísla a, b, c platí daná nerovnost, a přitom trojúhelník s délkami stran a, b, c neexistuje. To znamená, že pro čísla a, b, c neplatí aspoň jedna z trojúhelníkových nerovností. Bez újmy na obecnosti (daná nerovnost je symetrická) můžeme předpokládat, že $c \geqq a + b$, neboli $c = a + b + x$, kde $x \geqq 0$. Po dosazení dostáváme

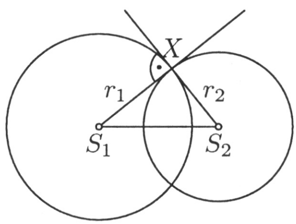
$$5ab(a + b + x) > a^3 + b^3 + (a + b)^3 + 3(a + b)^2 x + 3(a + b)x^2 + x^3$$

a po úpravě

$$2a^2 b + 2ab^2 > 2a^3 + 2b^3 + abx + 3(a^2 + b^2)x + 3(a + b)x^2 + x^3.$$

Protože poslední čtyři členy součtu na pravé straně jsou nezáporné, plyne odtud $2a^2b + 2ab^2 > 2a^3 + 2b^3$, což je ekvivalentní nerovnosti $(a + b) \times \times (a-b)^2 < 0$, která pro kladná čísla a, b zjevně neplatí. Tím jsme dospěli ke sporu, a tvrzení úlohy je tak dokázáno.

2. Především si uvědomme, že kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ se ortogonálně protínají, právě když $r_1^2 + r_2^2 = |S_1S_2|^2$. To snadno plyne z Pythagorovy věty pro trojúhelník S_1S_2X (obr. 60).

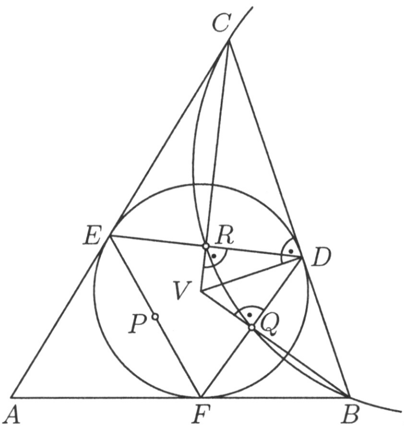


Obr. 60

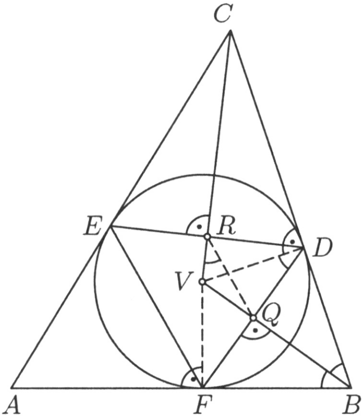
Označme nyní V střed kružnice k vepsané trojúhelníku ABC, r její poloměr D, E, F po řadě její dotykové body se stranami BC, CA, AB a P, Q, R středy úseček EF, FD, DE (obr. 61). Ukážeme, že body Q a R leží na kružnici k_a.

Z *Eukleidovy věty o odvěsně* pro trojúhelníky VBD a VCD plyne, že $|VQ| \cdot |VB| = r^2$ a $|VR| \cdot |VC| = r^2$. To znamená, že body B, C, R, Q leží na nějaké kružnici se středem O_a a poloměrem r_a. Pro mocnost bodu V k této kružnici platí $|VQ| \cdot |VB| = r^2 = |VO_a|^2 - r_a^2$, což znamená, že kružnice opsaná čtyřúhelníku $BCRQ$ protíná kružnici k ortogonálně. Body B a C však může procházet nejvýše jedna kružnice, která kružnici k protíná ortogonálně. Kružnice opsaná čtyřúhelníku $BCRQ$ je tedy kružnice k_a.

Analogicky dokážeme, že body R, P leží na kružnici k_b a body P, Q na kružnici k_c. Je tedy $A' \equiv P$, $B' \equiv Q$ a $C' \equiv R$, což znamená, že poloměr kružnice opsané trojúhelníku $A'B'C'$ je roven polovině poloměru kružnice k, která je opsána trojúhelníku DEF (trojúhelník PQR je obrazem trojúhelníku DEF ve stejnolehlosti se středem V a koeficientem $\frac{1}{2}$). Tím je tvrzení úlohy dokázáno.



Obr. 61



Obr. 62

Poznámka. To, že body B, C, R, Q leží na kružnici, lze snadno odvodit i z rovnosti obvodových úhlů v tětivových čtyřúhelnících $VFBD$ a $VQDR$ (jsou tětivové podle Thaletovy věty): $|\sphericalangle VBD| = |\sphericalangle VBF| = |\sphericalangle QDV| = |\sphericalangle QRV|$, takže i čtyřúhelník $BCRQ$ je tětivový (obr. 62).

3. Nejprve ukážeme, že pokud $2^n - 1$ dělí $m^2 + 9$ pro nějaké celé číslo m, je n mocninou čísla 2.

Pokud n není mocninou dvojky, je dělitelné nějakým lichým číslem $l \geqq 3$, a protože $2^l - 1$ vždy dělí $2^n - 1$, dělí i $m^2 + 9$. Číslo $2^l - 1$ dává při dělení čtyřmi zbytek -1, stejný zbytek musí mít i některý z jeho prvočíselných dělitelů, takže existuje prvočíslo p takové, že $p \equiv -1 \pmod 4$ a zároveň $p \mid m^2 + 9$. Z *malé Fermatovy věty* tak plyne

$$1 \equiv m^{p-1} \equiv \left(m^2\right)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv (-9)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \cdot 3^{p-1} \pmod p.$$

Pro $p \neq 3$ můžeme na pravé straně podle stejného tvrzení dosadit $3^{p-1} \equiv 1$ a zároveň $(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv -1$, protože prvočíslo p jsme našli tak, že $p-1$

není dělitelné čtyřmi, takže exponent $\frac{1}{2}(p-1)$ je lichý. Vidíme tedy, že poslední kongruence vede ke sporu. Pokud ovšem $p=3$, je 2^l-1 dělitelné třemi, takže $2^l \equiv 1 \pmod 3$, a zároveň pro liché l platí $2^l \equiv (-1)^l \equiv -1 \pmod 3$, což je opět spor. Tím je první implikace dokázána.

Předpokládejme nyní, že $n = 2^k$. Pro $k=0$ i $k=1$ tvrzení zřejmě platí, předpokládejme tedy, že $k \geqq 2$. Potom

$$2^n - 1 = (2+1)(2^2+1)(2^{2^2}+1)\dots(2^{2^{k-1}}+1). \tag{1}$$

Uvědomme si, že pro $\alpha < \beta$ jsou čísla $2^{2^\alpha}+1$ a $2^{2^\beta}+1$ nesoudělná. Pro jejich libovolný společný dělitel d, který je nutně lichý, můžeme totiž modulo d psát $-1 \equiv 2^{2^\beta} \equiv 2^{2^\beta \cdot 2^{\beta-\alpha}} \equiv \left(2^{2^\beta}\right)^{2^{\beta-\alpha}} \equiv 1$, což znamená, že je $d=1$. Podle tzv. *čínské zbytkové věty* (čísla $2^{2^l}+1$ jsou navzájem nesoudělná) tak existuje přirozené číslo c, které je řešením soustavy kongruencí

$$c \equiv 2^{2^l} \pmod{2^{2^{l+1}}+1}, \qquad l \in \{0, 1, \dots, k-2\}.$$

Pro takové c pak dostáváme $c^2 + 1 \equiv 0 \pmod{2^{2^{l+1}}+1}$ ($l \in \{0, 1, \dots, k-2\}$), takže podle (1) $2^n - 1$ dělí $9(c^2+1) = (3c)^2 + 9$. Stačí tedy vzít $m = c^2$.

4. Všimněme si, že pro každé celé číslo n platí $n^3 \equiv n \pmod 3$. To snadno plyne z rozkladu $n^3 - n = n(n^2-1) = (n-1)n(n+1)$. Je tedy také $n^4 \equiv n^2 \pmod 3$ a pro mnohočlen P s celočíselnými koeficienty tak platí $P(n^3) \equiv P(n) \pmod 3$ a $P(n^4) \equiv P(n^2) \pmod 3$. Pro mnohočlen Q, který má rovněž celočíselné koeficienty, tak z posledních dvou kongruencí plyne

$$Q(n) \equiv \left(P(n)P(n^2)\right)^2 + 1 \pmod 3.$$

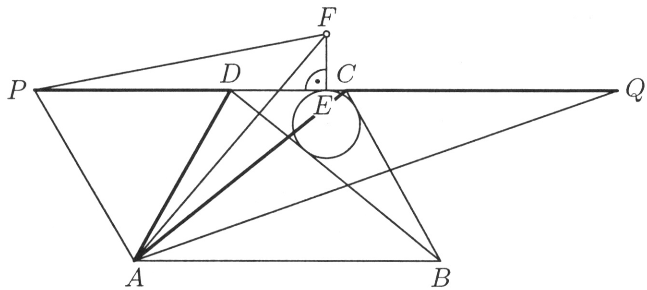
Protože pro každé celé číslo m platí buď $m^2 \equiv 0 \pmod 3$, nebo $m^2 \equiv 1 \pmod 3$, vidíme, že kongruence $Q(x) \equiv 0 \pmod 3$ nemá žádné řešení v oboru celých čísel, tím spíše nemůže mít celočíselné řešení rovnice $Q(x) = 0$.

5. Ukážeme, že $|FA| = |FG|$. Budeme postupovat odzadu. Na polopřímce opačné k DC vezměme bod P tak, že $|DP| = |DA|$, a podobně na polopřímce opačné k CD vezměme bod Q tak, že $|CQ| = |CA|$. Pomocí známých vztahů pro úseky stran trojúhelníku BCD vzhledem k jeho vepsané kružnici dostáváme (obr. 63; zároveň využíváme toho, že daný lichoběžník $ABCD$ je rovnoramenný)

$$|PE| = |PD| + |DE| = |DA| + \frac{|BD| + |CD| - |BC|}{2} = \\ = \frac{|BD| + |CD| + |BC|}{2},$$

$$|QE| = |QC| + |CE| = |AC| + \frac{|BC| + |CD| - |BD|}{2} = \\ = \frac{|BC| + |CD| + |BD|}{2},$$

neboli $|PE| = |QE|$. To znamená, že trojúhelník PQF je rovnoramenný a přímka EF je osou jeho strany PQ.



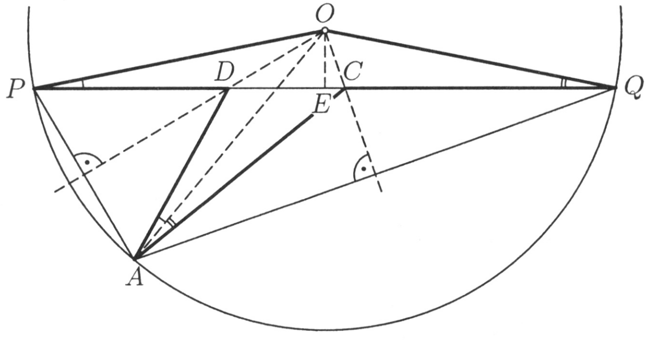
Obr. 63

Uvažme nyní kružnici opsanou trojúhelníku AQP. Její střed O leží na EF, a protože trojúhelníky APD a AQC jsou rovnoramenné, jsou DO a CO osami úseček AP a AQ (obr. 64). Odtud plyne, že

$$|\sphericalangle DAO| = |\sphericalangle DPO| = |\sphericalangle CQO| = |\sphericalangle CAO|,$$

bod O tedy leží na ose úhlu CAD, což znamená, že $O \equiv F$. Z rovnosti úhlů $|\sphericalangle CAF| = |\sphericalangle CPF|$ zároveň vidíme, že body C, A, F, P leží na kružnici, což znamená, že bod P je druhým průsečíkem přímky CD s kružnicí opsanou trojúhelníku CAF, je tedy $P \equiv G$ a $|FA| = |FP| = |FG|$, což jsme měli dokázat.

6. Zřejmě stačí najít celé číslo a takové, že mezi čtyřmi celými čísly a, $a + x$, $a + y$, $a + x + y$ najdeme dvě čísla stejné barvy. To budou ta čísla, jejichž existenci chceme dokázat.



Obr. 64

Předpokládejme naopak, že existuje obarvení celých čísel takové, že pro každé celé číslo a mají čísla a, $a+x$, $a+y$, $a+x+y$ vesměs různou barvu, tj. že existuje funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \{C, M, Z, B\}$ taková, že pro každé celé číslo a platí

$$f(\{a, a+x, a+y, a+x+y\}) = \{C, M, Z, B\} \tag{1}$$

(písmeny C, M, Z, B jsme označili uvažované barvy). Ukážeme dále, že takový předpoklad vede ke sporu.

Uvažujme na množině $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (množině všech mřížových bodů v rovině) obarvení $g\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \{C, M, Z, B\}$ určené pro všechna $i, j \in \mathbb{Z}$ vztahem

$$g(i, j) = f(ix + jy).$$

Při takovém obarvení g mají ovšem *vrcholy libovolného jednotkového čtverce navzájem různé barvy*: vrcholům

$$(i, j), (i+1, j), (i, j+1), (i+1, j+1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

totiž odpovídají celá čísla

$$(ix + jy),\ (ix + jy) + x,\ (ix + jy) + y,\ (ix + jy) + x + y,$$

jež mají podle (1) vesměs různou barvu.

Tato vlastnost jednotkových čtverců už je podstatným omezením pro existenci takového obarvení. Protože sousední mřížové body (ať v řádku či v sloupci) nemohou mít stejnou barvu, obsahuje každý řádek (či sloupec) buď jen dvě barvy, které se pravidelně střídají, anebo se po sobě vyskytnou tři vrcholy navzájem různých barev.

Předpokládejme například, že v nějakém sloupci najdeme tři po sobě jdoucí vrcholy s navzájem různými barvami; bez újmy na obecnosti nechť to jsou barvy $\begin{matrix} B \\ M \\ C \end{matrix}$. Uvážíme-li vrcholy sousedních jednotkových čtverců, zjistíme, že jsou už jednoznačně určeny především barvy obou vrcholů sousedících s prostředním vrcholem a pak i barvy zbývajících vrcholů obou sousedních trojic vrcholů:

$$\begin{matrix} B \\ ZMZ, \\ C \end{matrix} \quad \begin{matrix} CBC \\ ZMZ, \\ BCB \end{matrix} \quad \begin{matrix} BCBCB \\ MZMZM, \\ CBCBC \end{matrix} \quad \ldots$$

Barvy vrcholů v každém ze tří odpovídajících řádků se tudíž musejí pravidelně střídat.

Pokud se v některém řádku (či sloupci) pravidelně střídají dvě barvy (například $\ldots CMCM \ldots$), musejí se díky uvedené vlastnosti jednotkových čtverců v dalším řádku pravidelně střídat obě zbývající barvy:

$$\begin{matrix} CMCMC \\ ZBZBZ \end{matrix} \quad \text{nebo} \quad \begin{matrix} CMCMC \\ BZBZB \end{matrix}$$

A v dalším řádku se zase budou pravidelně střídat první dvě barvy C a M atd. Vidíme, že se pak v každém řádku pravidelně střídá vždy jedna z dvojic barev C a M, resp. B a Z, a to tak, že všechny liché řádky obsahují jednu dvojici barev a všechny sudé řádky druhou dvojici.

Můžeme tedy předpokládat, že např. řádky mají tu vlastnost, že se v nich pravidelně střídají dvě barvy. Označme C a M barvy bodů $(0,0)$ a $(1,0)$, takže $g(0,0) = C$ a $g(1,0) = M$. Potom $g(y,0) = M$ (protože y je liché). Protože i x je liché, musí být $g(0,x) \in \{B, Z\}$. Z rovnosti $g(y,0) = f(xy) = g(0,x)$ však dostáváme spor. Tím je existence takového obarvení vyvrácena a tvrzení úlohy dokázáno.