41. mezinárodní matematická olympiáda

V pořadí již 41. ročník této mezinárodní soutěže se konal 13.–25. července 2000 v Korejské republice. Soutěž proběhla v Taejonu, na půdě jedné z nejprestižnějších univerzit v Asii, kterou je poměrně mladá vysoká škola KAIST (Korea Advanced Institut of Science and Technology), založená v r. 1971. Letošního ročníku MMO se zúčastnili 462 soutěžící z 82 zemí celého světa. Logo olympiády svými dvěma čtverci symbolizuje uplynulá dvě tisíciletí, taeguk (rozdělený kruh) je tradičním symbolem Koreje (najdeme ho i na korejské státní vlajce). Použité barvy (modrá, zelená a červená, jejichž kombinací dostaneme všechny barvy spektra) pak symbolizují krásu a sílu matematiky, základu veškeré vědy a technologie.

Patronát nad organizací a průběhem 41. ročníku MMO převzal ministerský předseda Korejské republiky *Han Dong Lee*, který se osobně zúčastnil slavnostního zahájení soutěže. Korejští organizátoři připravili všem účastníkům dobré podmínky pro samotnou soutěž a také zajímavý doprovodný kulturní a společenský program. Soutěžící měli možnost navštívit korejský skanzen v Yonginu poblíž Suwonu, archeologická naleziště v Kyóngju a také pavilony světové výstavy EXPO, která se v Taejonu konala v roce 1993. Ve školském kampusu KAISTu byla po celou dobu soutěžícím k dispozici všechna sportoviště, plavecký bazén a moderně vybavená počítačová učebna.

Výběr soutěžících za Českou republiku byl proveden v Jevíčku na závěrečném soutěžním soustředění osmi nejúspěšnějších účastníků celostátního kola. Vybraní soutěžící se pak ještě zúčastnili utkání ve slovenské Modre mezi Českou republikou a Slovenskem, kde soutěžili reprezentanti obou zemí za podmínek podobných soutěži na MMO. Naše družstvo tvořila následující šestice olympioniků: *Jaroslav Hájek*, z Gymnázia M. Koperníka v Bílovci, *Jan Herman* a *Rudolf Stolař* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Jan Houštěk* z Gymnázia v Pelhřimově, *Jan Kynčl* z Gymnázia v Jilemnici, a *Ondřej Suchý* z Gymnázia na Mikulášském nám. v Plzni. Vedoucím naší výpravy byl dr. *Karel Horák* z Matematického ústavu Akademie věd v Praze, pedagogickým vedoucím družstva byl dr. *Jaroslav Švrček* z Univerzity Palackého v Olomouci. Vedoucí delegace přicestoval do hlavního města Koreje Soulu kvůli výběru úloh již 13. července, ostatní čeští účastníci pak o tři dny později.

Dva dny po příletu soutěžících, tedy 18. července se konalo slavnostní zahájení. Vlastní soutěž proběhla ve dnech 19. a 20. července v pavilonu univerzitní knihovny KAISTu. Jako obvykle žáci řešili v každém soutěžním dni po třech úlohách. Na každou trojici úloh měli vyhrazeny vždy 4,5 hodiny čistého času a za každou úlohu mohli získat maximálně 7 bodů.

Naše mladé družstvo nezklamalo. Svědčí o tom především zisk jedné stříbrné medaile *Janem Houšťkem* a dále tří bronzových medailí oproti jediné bronzové medaili z předešlé 40. MMO v Rumunsku. Jejich výsledky jsou uvedeny v následující tabulce:

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
395.–416.	Jaroslav Hájek, 2. roč. GMK Bílovec,	0	0	0	2	0	0	2	
205.–213.	Jan Herman, 3. roč. gymnázia, Brno, tř. Kpt. Jaroše	7	2	0	2	0	0	11	III.
90.–99.	Jan Houštěk, 7. roč. gymnázia, Pelhřimov	7	2	1	7	4	0	21	II.
139.–149.	Jan Kynčl, 5. roč. gymnázia, Jilemnice	7	1	4	2	0	2	16	III.
351.–368.	Rudolf Stolař, 3. roč. gymnázia, Brno, tř. Kpt. Jaroše	0	1	0	3	0	0	4	
205.–213.	Ondřej Suchý, 6. roč. gymnázia, Plzeň, Mikulášské nám.	7	0	0	2	0	2	11	III.
	Celkem	28	6	5	18	4	4	65	

O náročnosti soutěžních úloh svědčí i nízké hranice pro zisk medailí: na třetí cenu stačilo 11 bodů, druhá cena se udělovala za 21–30 bodů a první za alespoň 31 bodů. Řešitelů, kteří si z Taejonu odvezli zlatou medaili, bylo celkem 28. Mezi nimi byli ale čtyři, kteří získali plný počet 42 bodů: *Alexandr Usnič* z Běloruska, *Zhiwei Yun* z Číny a dva soutěžící *Alexej Pojarkov* a *Alexandr Gajfullin* z Ruska.

Neoficiální pořadí všech zúčastněných zemí s počtem získaných cen a celkovým bodovým ziskem (případná čísla v závorce upozorňují na nižší počet reprezentantů):

	I	II	III	body		I	II	III	body
ČLR	6	0	0	218	*Česká republika*	0	1	3	65
Rusko	5	1	0	215	Makedonie	0	1	2	63
USA	2	4	0	184	Kolumbie	0	0	2	61
Korea	3	3	0	172	Kuba	0	0	2	61
Bulharsko	2	3	1	169	Lotyšsko	0	0	3	60
Vietnam	3	2	1	169	Nizozemsko	0	0	2	60
Bělorusko	2	2	2	165	Brazílie	0	0	3	58
Tchaj-wan	2	3	1	164	Francie	0	0	3	58
Maďarsko	1	5	0	156	Itálie	0	0	3	57
Írán	1	4	1	155	Indonézie	0	0	2	54
Izrael	2	1	3	139	Finsko	0	0	3	52
Rumunsko	0	4	2	139	Belgie	0	0	2	51
Ukrajina	2	2	0	135	Lucembursko (4)	0	0	2	51
Indie	0	5	1	132	Maroko	0	0	1	48
Japonsko	1	2	3	125	Řecko	0	0	1	46
Austrálie	1	3	1	122	Norsko	0	0	1	45
Kanada	1	2	1	112	Estonsko	0	0	1	42
Slovensko	0	2	3	111	Trinidad a Tobago	0	0	0	40
Turecko	0	3	1	111	Island	0	0	0	37
Arménie	0	2	3	108	Dánsko	0	0	1	36
Německo	1	1	2	108	Litva	0	0	1	34
Velká Británie	0	2	4	96	Nový Zéland	0	0	0	34
Jugoslávie	0	1	3	93	Ázerbájdžán	0	0	0	32
Kazachstán	0	1	4	91	Kypr	0	0	0	32
Argentina	0	1	4	88	Malajsie (3)	0	0	2	32
Moldavsko (5)	0	2	3	84	Peru (4)	0	0	0	32
JAR	0	0	4	81	Španělsko	0	0	0	29
Hongkong	0	1	2	80	Irsko	0	0	0	28
Bosna a Hercegovina	0	0	4	78	Filipíny (4)	0	0	0	23
Thajsko	0	1	3	78	Uruguay (3)	0	0	0	23
Švédsko	0	2	0	77	Portugalsko	0	0	0	21
Mexiko	0	1	3	75	Srí Lanka (3)	0	0	0	21
Polsko	0	1	2	75	Ekvádor	0	0	0	19
Chorvatsko	0	0	4	73	Albánie (5)	0	0	0	17
Slovinsko	0	1	1	73	Kirgizie (4)	0	0	1	16
Gruzie	0	1	0	72	Macao	0	0	0	16
Singapur	0	1	2	71	Kuvajt (4)	0	0	0	12
Uzbekistán	0	0	2	70	Guatemala	0	0	0	11
Rakousko	0	2	1	68	Venezuela (2)	0	0	0	11
Mongolsko	0	0	4	67	Brunei (2)	0	0	0	8
Švýcarsko (4)	0	1	2	67	Portoriko	0	0	0	8

Jak je patrno z tabulky zúčastněných států, na prvních místech neoficiálního pořadí jednotlivých zemí podle celkového bodového zisku se už tradičně vyskytují Čína, Rusko, Spojené státy, Korea, Bulharsko a Vietnam. Naše umístění v druhé polovině této tabulky nás rozhodně nectí.

Slavnostní zakončení 41. MMO se konalo v mezinárodním kulturním centru státní univerzity Chungnam v Taejonu. Při této příležitosti pozvali zástupci USA všechny zúčastněné delegace k účasti na dalším ročníku MMO.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Jsou dány dvě kružnice k_1 a k_2, které se protínají v bodech M a N. Označme l jejich společnou tečnu takovou, že bod M je blíž l než bod N. Bod dotyku přímky l s k_1 označme A a bod dotyku s k_2 označme B. Přímka vedená bodem M rovnoběžně s l protíná kružnici k_1 v dalším bodě C a kružnici k_2 v dalším bodě D. Označme dále E průsečík přímek CA a DB, P průsečík přímek AN a CD a Q průsečík přímek BN a CD. Dokažte, že $|EP| = |EQ|$. (*Maďarsko*)

2. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla taková, že $abc = 1$. Dokažte, že

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqq 1.$$

(*Rusko*)

3. Nechť $n \geqq 2$ je přirozené číslo. Na počátku je na vodorovné přímce n blech, ne všechny v témž bodě. Pro kladné reálné číslo λ definujme *tah* následujícím způsobem:

vybereme libovolné dvě blechy v bodech A a B, přičemž bod A je nalevo od bodu B;

blechu z bodu A necháme skočit do bodu C dané přímky napravo od B, přičemž $|BC|/|AB| = \lambda$.

Určete všechny hodnoty λ takové, že pro libovolný bod M na dané přímce a pro libovolnou počáteční polohu n blech existuje konečná posloupnost tahů, která přesune všechny blechy na místa napravo od bodu M.

(*USA*)

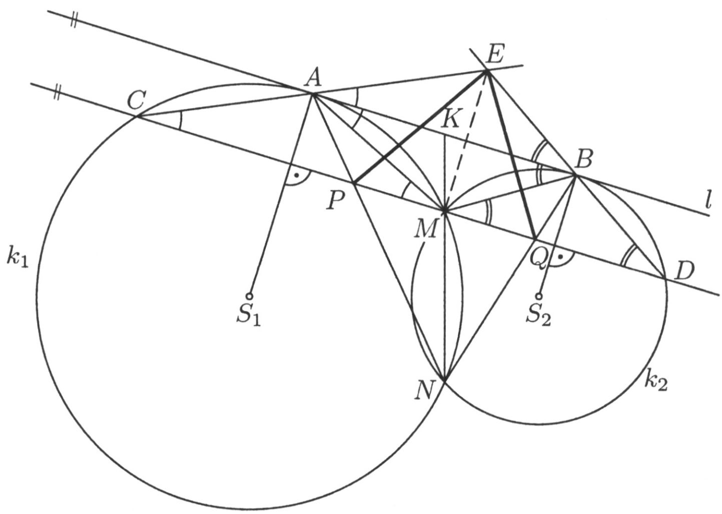
4. Kouzelník má sto karet očíslovaných od 1 do 100. Vloží je do tří krabic — červené, bílé a modré — tak, aby v každé byla aspoň jedna karta. Jeden z diváků si vybere dvě ze tří krabic, z každé vytáhne jednu kartu a oznámí součet čísel na vybraných kartách. Na základě tohoto součtu určí kouzelník krabici, z které divák kartu nevytáhl. Kolika způsoby lze rozdělit všechny karty do krabic, aby kouzelníkův trik vždy fungoval? (Rozdělení považujeme za různá, pokud se aspoň jedna karta objeví v jiné krabici.) (*Rusko*)

5. Rozhodněte, zda existuje kladné celé číslo n takové, že n je dělitelné přesně 2 000 různými prvočísly a $2^n + 1$ je dělitelné n. (*Bělorusko*)

6. Nechť AH_1, BH_2, CH_3 jsou výšky ostroúhlého trojúhelníku ABC. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se po řadě dotýká stran BC, CA, AB v bodech T_1, T_2, T_3. Označme po řadě l_1, l_2, l_3 přímky souměrně sdružené s přímkami H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 podle os T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2. Dokažte, že přímky l_1, l_2, l_3 určují trojúhelník, jehož vrcholy leží na kružnici vepsané trojúhelníku ABC. (*Rusko*)

Řešení úloh

1. Označme K průsečík přímky MN s tečnou l obou kružnic (obr. 65).



Obr. 65

Protože bod K leží na chordále obou kružnic, má vůči nim stejnou mocnost, tj.

$$|AK|^2 = |KM| \cdot |KN| = |KB|^2.$$

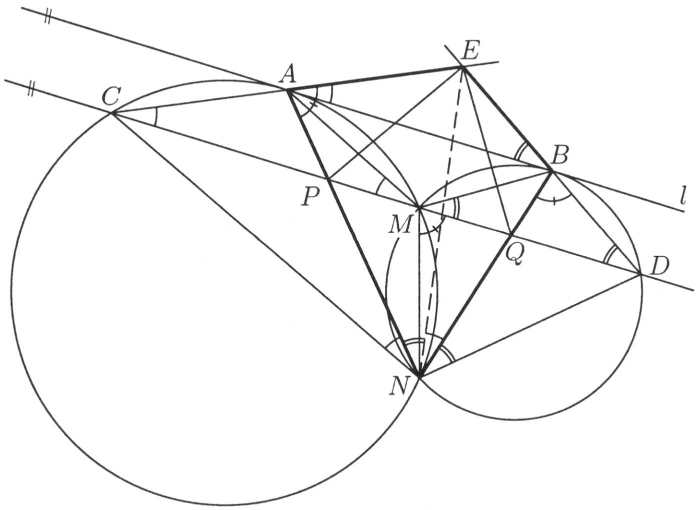
Je tedy $|AK| = |KB|$, a protože $PQ \parallel AB$, je díky stejnolehlosti trojúhelníků NPQ a NAB také $|PM| = |MQ|$. Stačí tedy ukázat, že je $EM \perp PQ$.

Protože úsečka CD je rovnoběžná s tečnou AB, půlí oba body dotyku A, B příslušné oblouky CAM a MBD, takže oba trojúhelníky CMA a MDB jsou rovnoramenné. Je tedy

$$\begin{aligned} |\sphericalangle BAM| &= |\sphericalangle AMC| = |\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle EAB|, \\ |\sphericalangle ABM| &= |\sphericalangle BMD| = |\sphericalangle BDM| = |\sphericalangle EBA|, \end{aligned} \tag{1}$$

což znamená, že body E a M jsou souměrně sdruženy podle přímky AB. Je proto $EM \perp AB$, a tedy i $EM \perp PQ$, což jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Využijeme zřejmé rovnosti (1) z předchozího řešení. Přímka CD odděluje body E a N, takže z vlastností obvodových úhlů



Obr. 66

v tětivových čtyřúhelnících $NDBM$ a $NMAC$ plynou rovnosti (obr. 66)

$$|\sphericalangle NBD| = |\sphericalangle NMD| = 180° - |\sphericalangle NMC| = 180° - |\sphericalangle NAC| = |\sphericalangle NAE|.$$

To znamená, že také čtyřúhelník $ANBE$ je tětivový. Je tedy

$$|\sphericalangle ANE| = |\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle PDE| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle BNE| = |\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle QCE|.$$

A tak i čtyřúhelníky $PNDE$ a $CNQE$ jsou tětivové. Navíc zřejmě platí

$$|\sphericalangle ANC| = |\sphericalangle AMC| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle BND| = |\sphericalangle BMD|,$$

takže

$$|\sphericalangle EQC| = |\sphericalangle ENC| = |\sphericalangle END| = |\sphericalangle EPD|.$$

Rovnost $|\sphericalangle EQC| = |\sphericalangle EPD|$ v trojúhelníku PQE ovšem znamená, že $|EP| = |EQ|$.

2. Danou nerovnost můžeme homogenizovat vhodnou změnou proměnných: Vezměme kladná čísla x, y a z tak, aby

$$a = \frac{x}{y}, \quad b = \frac{y}{z}, \quad c = \frac{z}{x}$$

(jedna možná volba je např. $x = 1$, $y = 1/a$ a $z = 1/(ab)$). Místo původní nerovnosti tak dostaneme

$$(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leqq xyz.$$

Protože každá dvě z čísel

$$u = x - y + z, \quad v = y - z + x, \quad w = z - x + y$$

mají kladný součet, je nejvýše jedno z nich záporné. V takovém případě je ovšem $uvw \leqq 0 < xyz$ a nerovnost triviálně platí.

Předpokládejme tedy, že $u \geqq 0$, $v \geqq 0$, $w \geqq 0$. Potom podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem platí

$$\sqrt{uv} = \sqrt{(x - y + z)(y - z + x)} \leqq \frac{(x - y + z) + (y - z + x)}{2} = x.$$

Podobně platí i $\sqrt{vw} \leqq y$ a $\sqrt{wu} \leqq z$, takže $uvw \leqq xyz$, jak jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Protože

$$b - 1 + \frac{1}{c} = b\left(1 - \frac{1}{b} + a\right),$$

je

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) = b\left(a^2 - \left(1 - \frac{1}{b}\right)^2\right) \leqq ba^2. \qquad (1)$$

Analogicky platí

$$\Big(b-1+\frac{1}{c}\Big)\Big(c-1+\frac{1}{a}\Big) \leqq cb^2 \text{ a } \Big(c-1+\frac{1}{a}\Big)\Big(a-1+\frac{1}{c}\Big) \leqq ac^2. \quad (2)$$

Jestliže jsou levé strany všech tří nerovností (1) a (2) nezáporné, můžeme nerovnosti (1) a (2) vynásobit a dostaneme, že kvadrát levé strany je nejvýše roven $ba^2cb^2ac^2 = 1$, čímž je nerovnost dokázána.

Připusťme, že je některý z činitelů záporný, např. $a - 1 + 1/b < 0$ (to můžeme dokonce předpokládat bez újmy na obecnosti, protože daná nerovnost je cyklická). Pak ovšem $a < 1 - 1/b < 1$ a $1/b < 1 - a < 1$, tj. $b > 1$, takže $c - 1 + 1/a > 0$ a $b - 1 + 1/c > 0$ a daná nerovnost je triviálně splněna. Tím je důkaz hotov.

Jiné řešení. Díky dané podmínce $abc = 1$ platí

$$\frac{1}{a}\Big(a-1+\frac{1}{b}\Big) + c\Big(b-1+\frac{1}{c}\Big) = 2,$$
$$\frac{1}{b}\Big(b-1+\frac{1}{c}\Big) + a\Big(c-1+\frac{1}{a}\Big) = 2,$$
$$\frac{1}{c}\Big(c-1+\frac{1}{a}\Big) + b\Big(a-1+\frac{1}{b}\Big) = 2.$$

Speciálně odtud plyne, že nejvýše jedno z čísel

$$u = a - 1 + \frac{1}{b}, \quad v = b - 1 + \frac{1}{c}, \quad w = c - 1 + \frac{1}{a}$$

je záporné. Pokud ano, pak daná nerovnost triviálně platí, jak už jsme ukázali v předchozích řešeních. Pokud $u \geqq 0$, $v \geqq 0$, $w \geqq 0$, máme podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$2 = \frac{1}{a}u + cv \geqq 2\sqrt{\frac{c}{a}uv}, \quad 2 = \frac{1}{b}v + aw \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}vw},$$
$$2 = \frac{1}{c}w + bu \geqq 2\sqrt{\frac{b}{c}wu}.$$

Je tedy $uv \leqq a/c$, $vw \leqq b/a$ a $wu \leqq c/b$, takže $(uvw)^2 \leqq 1$. Protože $uvw \geqq 0$, je důkaz hotov.

Jiné řešení (řešení *Jaroslava Hájka*, na které přišel po soutěži). Daná nerovnost je invariantní vůči cyklické permutaci čísel a, b, c, proto můžeme předpokládat, že je např. $a \leqq 1$ a $c \geqq 1$, takže platí

$$(a-1)(c-1) \leqq 0.$$

To lze zapsat jako $ac - a + 1 \leqq c$, zároveň však je $ac - a + 1 = a(c-1) + 1 \geqq 1 > 0$, tedy

$$0 < ac - a + 1 \leqq c.$$

Protože $1 - (bc - c)^2 \leqq 1$, plyne z předchozí nerovnosti nerovnost

$$\bigl(1 - (bc - c)^2\bigr)(ac - a + 1) \leqq c,$$

neboli

$$(1 - bc + c)(1 + bc - c)(ac - a + 1) \leqq c,$$

$$(1 - bc + c)\Bigl(\frac{1}{c} + b - 1\Bigr)(ac - a + 1) \leqq 1.$$

Vydělíme-li teď levou stranu poslední nerovnosti číslem $abc = 1$ tak, že první závorku vydělíme bc a třetí číslem a, dostaneme dokazovanou nerovnost.

Poznámka. V každém z uvedených řešení lze snadno nahlédnout, že rovnost platí, právě když $a = b = c = 1$.

3. (S využitím myšlenek *Jana Kynčla.*) Označme $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pozice jednotlivých blech zleva doprava v některém okamžiku a uvažujme součet $s = |A_1A_n| + |A_2A_n| + \ldots + |A_{n-1}A_n|$. Podívejme se, co se stane, provedeme-li tah pro blechy v bodech A_k, A_n ($1 \leqq k < n$): dostaneme tak novou posloupnost bodů $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$, pro kterou platí $A'_1 = A_1$, $A'_2 = A_2$, $\ldots$, $A'_{k-1} = A_{k-1}$, $A'_k = A_{k+1}$, $\ldots$, $A'_{n-1} = A_n$, $A'_n = A_n + \lambda(A_n - A_k)$, takže $|A'_nA'_i| = |A_nA_i| + \lambda|A_kA_n|$ pro $i < k$ a $|A'_nA'_i| = |A_nA_{i+1}| + \lambda|A_kA_n|$ pro $k \leqq i < n$. Nové poloze blech odpovídá součet s', přičemž

$$\begin{aligned} s' - s &= |A_kA_n| + (n-1)\lambda|A_kA_n| = \\ &= \bigl((n-1)\lambda - 1\bigr)|A_kA_n|. \end{aligned} \tag{1}$$

Je tedy zřejmé, že pro $(n-1)\lambda \geqq 1$, neboli $\lambda \geqq 1/(n-1)$ se příslušný součet s nezmenší. Volíme-li tahy tak, že postupně skáče vždy první blecha zleva za poslední, přesunou se tak po $n-1$ krocích všechny blechy za blechu, která byla poslední v počáteční pozici. Protože je vždy

$$s \leqq (n-1)|A_1A_n|, \quad \text{tj.} \quad |A_1A_n| \geqq s(0)/(n-1),$$

kde jsme jako $s(0)$ označili odpovídající součet s na začátku, octne se původně první blecha nejméně o $s(0)/(n-1)$ dále vpravo. Vidíme, že uvedeným postupem se lze se všemi blechami dostat libovolně daleko (jakmile se jedna blecha octne za nějakým bodem M, dostanou se tam v dalších krocích i všechny ostatní).

Nechť nyní $\lambda < 1/(n-1)$. Víme již, že při skoku k-té blechy ($1 \leqq k \leqq n-1$) přes poslední se příslušný součet s zmenší o hodnotu (1). Tím spíš se součet s zmenší skokem z k-té pozice přes l-tou blechu ($k < l < n$), i když se tím blecha dostane za poslední. Konečně skokem z k-té pozice přes l-tou někam vlevo od poslední blechy se příslušný součet s zmenší přesně o délku skoku, která je $(1+\lambda)|A_k A_l|$.

Vidíme tedy, že pokud se po nějakém skoku vůbec změní poloha poslední blechy, změní se nejvýše o $z \leqq \lambda|A_k A_n|$, zatímco odpovídající součet se dle (1) sníží alespoň o

$$\bigl(1-(n-1)\lambda\bigr)|A_k A_n| \geqq \bigl(1-(n-1)\lambda\bigr)z/\lambda = \lambda_0 z.$$

Ovšem tento součet se může celkem snížit nejvýše o hodnotu $s(0)$, kterou měl na počátku, to znamená, že poloha pravé krajní blechy se nikdy neposune dále než o $s(0)/\lambda$.

Odpověď. Úloze vyhovují všechna reálná čísla $\lambda \leqq 1/(n-1)$.

4. Ukážeme, že hledaný počet je 12.

Předpokládejme, že máme karty rozmístěny do tří krabic tak, že kouzelníkův trik funguje. Jsou-li a, b, c, d čtyři různá čísla z množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$ taková, že $a+b = c+d$ a karty s čísly a, b, c se nacházejí v různých krabicích, musí být karta s číslem d ve stejné krabici jako c. (Tuto základní úvahu využijeme i v dalších řešeních.)

Nechť existuje i takové, že karty s čísly i, $i+1$ a $i+2$ jsou vesměs v různých krabicích (označme je po řadě písmeny A, B a C). Protože $i+(i+3) = (i+1)+(i+2)$, musí být karta s číslem $i+3$ (pokud $i \leqq 97$) v krabici A. Vidíme, že tři po sobě jdoucí čísla karet v různých krabicích určují, v jaké krabici bude karta s následujícím číslem: rozmístění karet do krabic se cyklicky opakuje. Stejný argument můžeme samozřejmě použít i opačným směrem. Stačí tedy přiřadit barvy krabic číslům 1, 2 a 3, což lze učinit šesti způsoby. Dvě karty pak budou ve stejné krabici, právě když jejich čísla dávají při dělení třemi stejný zbytek. Takové rozdělení zřejmě vyhovuje, protože součet dvou čísel s různými zbytky modulo 3 dává třetí možný zbytek.

Předpokládejme nyní, že žádná taková trojice po sobě jdoucích čísel ve třech různých krabicích neexistuje. Označme A krabici, která obsahuje kartu s číslem 1, a nechť i je nejmenší číslo, které v krabici A není, nechť je v krabici označené B. Nejmenší číslo ve zbývající třetí krabici C označme k. Z právě uvedených předpokladů plyne, že je $i + 1 < k$.

Předpokládejme, že $k < 100$. Protože $i + k = (i - 1) + (k + 1)$, musí být $k+1 \in A$. Na druhou stranu z rovnosti $i+(k+1) = (i+1)+k$ plyne, že $i + 1 \in C$, a to odporuje předpokladu, že nejmenší číslo v krabici C je k. Je tedy $k = 100$.

Protože $(i-1)+100 = i+99$, je 99 v krabici B. Ukažme, že v takovém případě už musejí být v krabici B všechna čísla mezi 1 a 100: Kdyby nějaké $t > 1$ bylo v krabici A, muselo by být $t - 1$ v krabici C, to však odporuje předchozímu závěru, neboť $t + 99 = (t - 1) + 100$.

Dostali jsme tak další obarvení čísel, které rovněž vyhovuje: je-li součet vybraných čísel nejvýše 100, je zbývající krabice C; je-li součet 101, zbývá B, a je-li součet větší než 101, zbývá A. Počet takových obarvení, resp. uspořádání karet do krabic je opět šest. Tím je úloha vyřešena.

Jiné řešení. Jsou dvě možnosti, jak karty rozmístit do krabic: buď dáme do stejné krabice vždy všechny karty, jejichž čísla dávají stejný zbytek při dělení třemi, anebo kartu s číslem 1 dáme do jedné krabice, kartu s číslem 100 do druhé a zbývající karty s čísly $2, \ldots, 99$ do zbylé krabice. Protože krabice se liší barvou, je v obou případech šest možností pro výběr příslušných krabic. Snadno ověříme, že obě popsaná rozdělení karet mají požadované vlastnosti.

Pro $n \geqq 3$ označme H_n tvrzení, že jiné rozdělení n karet do tří krabic, při němž popsaný trik funguje, neexistuje. Dokážeme H_n matematickou indukcí. Tvrzení H_3 triviálně platí (obě popsaná rozdělení dokonce splývají). Předpokládejme, že H_n platí pro nějaké $n \geqq 3$, a uvažujme $n + 1$ karet (očíslovaných všemi čísly z množiny $\{1, 2, \ldots, n + 1\}$).

Pokud je karta s číslem $n + 1$ sama v jedné krabici, zatímco karta s číslem 1 je v krabici ještě s jinými kartami, označme N součet největších čísel v obou zbývajících krabicích, takže $n+2 \leqq N \leqq n+(n-1) = 2n-1$. To však znamená, že číslo N můžeme dostat i jako součet z jiné dvojice krabic: $N = (n + 1) + (N - n - 1)$. Karta s číslem 1 musí tedy být také samostatně.

Pokud je karta s číslem $n+1$ v krabici ještě s jiným číslem, dostaneme po jejím odstranění situaci s n kartami, což nemá na fungování triku vliv. Podle indukčního předpokladu jsou možná nejvýše dvě různá rozdělení karet do krabic. Protože $(n + 1) + (n - 2) = n + (n - 1)$, musí být $n + 1$ v krabici s číslem $n - 2$. Je-li n karet rozděleno do krabic podle zbytků modulo 3, bude i karta s číslem $n + 1$ v odpovídající krabici, protože

$n+1 \equiv n-2 \pmod 3$; pokud je n karet (pro $n > 3$) rozděleno do krabic druhým možným způsobem, vyjde nám, že karta s číslem $n+1$ by musela být zároveň i v krabici s číslem 1, neboť $(n+1)+1 = n+2$, což nejde. Tím je důkaz indukcí hotov: ani pro $n+1$ jiné rozdělení karet do krabic, při němž trik funguje, neexistuje.

Vzhledem k tomu, že krabice jsou rozlišeny třemi barvami, existuje pro každé z uvedených rozdělení šest permutací barev, takže pro každé $n > 3$ existuje $2 \cdot 6 = 12$ různých rozdělení karet, pro něž kouzelníkův trik funguje.

Jiné řešení. Předpokládejme, že máme karty rozmístěny do tří krabic tak, že kouzelníkův trik funguje. Karty s čísly 1 a 2 nemohou být ve stejné krabici: Jestliže je $1, 2, \ldots, i-1 \in A$, karta s číslem $i > 2$ je v krabici B a j je nejmenší číslo karty v krabici C, musí být karta s číslem $j-1$ v krabici B, protože $(j-1)+i = j+(i-1)$. To však nejde, protože součet $1+j = 2+(j-1)$ nedovoluje určit zbývající krabici.

Pro $1 \in A$ a $2 \in B$ označme j nejmenší číslo karty v krabici C. Pokud $j = 3$, dostáváme rozdělení karet do krabic podle zbytku jejich čísla při dělení třemi, pro které trik funguje.

Pokud $j = 100$, plyne z rovnosti $100+1 = 99+2$, že $99 \in B$, a z rovnosti $k+99 = 100+(k-1)$ pak plyne, že krabice A nemůže obsahovat žádné $k > 1$. Dostáváme tak rozdělení karet do krabic, při němž v krabici B budou všechny karty s čísly $2, 3, \ldots, 99$, což je rozmístění, které rovněž vyhovuje.

Kdyby však bylo $3 < j < 100$, vyjde z rovnosti $j+2 = (j+1)+1$, že karta s číslem $j+1$ je v A, a z rovnosti $j+3 = (j+1)+2$ zas, že karta s číslem 3 je v krabici C. To je ve sporu s definicí čísla j.

Existují tedy jen dvě různá rozmístění karet do krabic, a protože krabice jsou rozlišeny třemi barvami, je celkem $2 \cdot 6 = 12$ různých rozdělení karet, pro něž kouzelníkův trik funguje.

Jiné řešení. Předpokládejme, že v jedné krabici jsou karty s čísly $a_1 < \ldots < a_m$, v druhé s čísly $b_1 < \ldots < b_n$ a v třetí s čísly $c_1 < \ldots < c_p$, přičemž $m \geqq 1$, $n \geqq 1$, $p \geqq 1$.

Uvažujme množiny

$$\{a_1+b_1, a_1+b_2, \ldots, a_1+b_n, a_2+b_n, \ldots, a_m+b_n\},$$
$$\{b_1+c_1, b_1+c_2, \ldots, b_1+c_p, b_2+c_p, \ldots, b_n+c_p\},$$
$$\{c_1+a_1, c_1+a_2, \ldots, c_1+a_m, c_2+a_m, \ldots, c_p+a_m\},$$

které mají postupně $m+n-1$, $n+p-1$ a $p+m-1$ různých prvků vždy uspořádaných do rostoucí posloupnosti. Aby kouzelníkův trik fungoval, musejí být uvedené tři množiny navzájem disjunktní, přitom dohromady obsahují $2(m+n+p)-3=197$ různých čísel, z nichž nejmenší je aspoň $1+2=3$ a největší nejvýše $100+99=199$, takže jsou to vlastně *všechny* možné součty. Jinými slovy to znamená, že pokud trik funguje, má množina součtů $\{a_i+b_j\}$ právě $m+n-1$ prvků, množina součtů $\{b_j+c_k\}$ právě $n+p-1$ prvků a množina součtů $\{c_k+a_i\}$ právě $p+m-1$ prvků. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $m \geqq n \geqq p$.

Pokud $n \geqq 2$, uvažujme pro $1 \leqq i \leqq m-1$ dvě množiny

$$\{a_1+b_1,\dots,a_i+b_1,a_{i+1}+b_1,a_{i+1}+b_2,\dots,a_m+b_2,\dots,a_m+b_n\},$$
$$\{a_1+b_1,\dots,a_i+b_1,a_i+b_2,a_{i+1}+b_2,\dots,a_m+b_2,\dots,a_m+b_n\}.$$

Obě mají právě $m+n-1$ různých prvků uspořádaných do rostoucí posloupnosti, takže se musejí rovnat, je tudíž

$$a_{i+1}+b_1=a_i+b_2 \qquad \text{neboli} \qquad a_{i+1}-a_i=b_2-b_1.$$

Podobně pro $p \geqq 2$ dostaneme

$$c_{i+1}-c_i=b_2-b_1,\ 1 \leqq i \leqq p-1, \qquad b_{i+1}-b_i=a_2-a_1,\ 1 \leqq i \leqq n-1.$$

To znamená, že v každé z krabic, v níž jsou aspoň dvě karty, tvoří příslušná čísla aritmetickou posloupnost s jednou společnou diferencí $d=a_2-a_1$. Kdyby bylo $d>3$, nemohli bychom všechny karty rozmístit do tří krabic. Pokud $d=3$, musí být karty s čísly 1, 2 a 3 v různých krabicích a vychází, že obsah jednotlivých krabic tvoří karty s čísly $1,4,7,\dots,100$, $2,5,8,\dots,98$ a $3,6,9,\dots,99$.

Je-li $d \leqq 2$, nemůže se stát, že by část jedné z možných aritmetických posloupností s diferencí d byla v jedné krabici a část v druhé: jakmile je $c_i-b_j=d=a_2-a_1$, je $a_1+c_i=a_2+b_j$ a trik nemůže fungovat. Vidíme, že pro $d=2$ by musela být krabice neobsahující 1 nebo 2 prázdná a podobně i pro $d=1$.

Zůstává ještě možnost $n=p=1$, $m=98$. Nechť $b_1<c_1$ a označme $d=c_1-b_1$. Kdyby bylo $d<99$, pak určitě existují $a_i<a_j$ tak, že $a_j-a_i=d=c_1-b_1$ a trik by nemohl fungovat. Musí tudíž být $c_1-b_1=99$, neboli $b=1$, $c_1=100$ a v první krabici jsou všechna čísla $2,3,\dots,99$. Snadno ověříme, že při takovém uspořádání karet bude kouzelníkův trik fungovat.

Našli jsme dvě principiálně odlišná rozdělení karet do nerozlišených krabic, a protože barvy krabic můžeme permutovat šesti způsoby, je počet různých rozdělení karet celkem 12.

5. Nejprve ukážeme, že pro každé přirozené a platí

$$3^a \mid 2^{3^a} + 1. \tag{1}$$

Pro $a = 1$ je $3 \mid 2^3 + 1 = 9$; předpokládejme, že pro nějaké přirozené k platí $3^k \mid 2^{3^k} + 1$. Protože

$$2^{3^{k+1}} + 1 = \left(2^{3^k} + 1\right)\left(2^{2\cdot 3^k} - 2^{3^k} + 1\right),$$

stačí ukázat, že výraz v druhé závorce je dělitelný třemi. Je ovšem $2^{2\cdot 3^k} - 2^{3^k} + 1 \equiv 1 - (-1) + 1 \equiv 0 \pmod 3$, takže $3^{k+1} \mid 2^{3^{k+1}} + 1$ a dle principu matematické indukce platí (1) pro každé $a \in \mathbb{N}$.

Číslo $2^{3^a} + 1$ může ovšem mít i další dělitele, dokonce libovolný počet různých prvočinitelů. Najdeme-li tedy a tak, že $2^{3^a} + 1$ má dalších 1 999 různých prvočinitelů $3 < p_1 < \ldots < p_{1999}$, bude řešením úlohy například číslo $n = 3^a p_1 p_2 \ldots p_{1999}$, které má právě 2 000 různých prvočinitelů a dělí číslo $2^n + 1$, neboť dělí jeho dělitele $2^{3^a} + 1$:

$$2^{3^a} + 1 \mid (2^{3^a})^{p_1 \ldots p_{1999}} + 1 = 2^n + 1.$$

Ukažme, že číslo $2^{3^a} + 1$ má pro dostatečně velké a dostatečný počet různých prvočinitelů. Vyjdeme opět z rozkladu

$$m^3 + 1 = (m + 1)(m^2 - m + 1).$$

Protože je zároveň

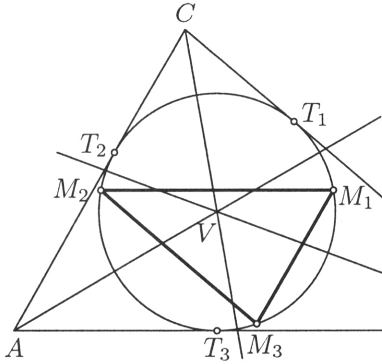
$$m^2 - m + 1 = (m + 1)(m - 2) + 3,$$

je největší společný dělitel čísel $m + 1$ a $m^2 - m + 1$ dělitelem čísla 3. Přitom je-li číslo $m + 1$ dělitelné třemi, je i $m - 2$ dělitelné třemi, takže $(m + 1)(m - 2) + 3$ je dělitelné třemi, ale ne devíti. Pro $m > 2$ tak musí mít $m^2 - m + 1$ alespoň jednoho prvočinitele $p > 3$, který nedělí $m + 1$. Z rozkladu

$$2^{3^{a+1}} + 1 = \left(2^{3^a}\right)^3 + 1 = (2^{3^a} + 1)\left(2^{2\cdot 3^a} - 2^{3^a} + 1\right)$$

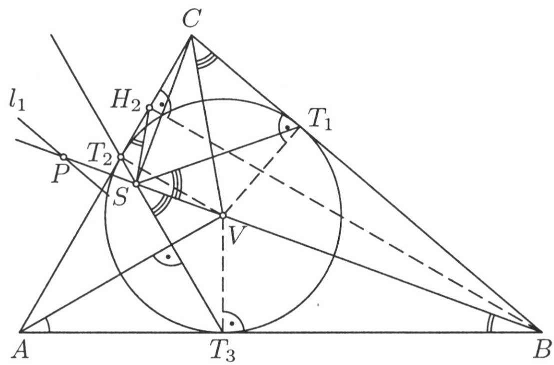
proto plyne, že číslo $2^{3^{a+1}} + 1$ má přinejmenším aspoň jednoho dalšího prvočinitele, který není dělitelem čísla $2^{3^a} + 1$. Pro $a > 1999$ tak bude mít číslo $2^{3^a} + 1$ aspoň 2 000 různých prvočinitelů. To je vše, co jsme potřebovali dokázat.

6. Označme V střed vepsané kružnice a M_1, M_2, M_3 po řadě body souměrné s body T_1, T_2, T_3 podle příslušných os úhlů AV, BV a CV. Body M_1, M_2, M_3 (obr. 67) tudíž leží na kružnici vepsané trojúhelníku ABC. Ukážeme, že to jsou vrcholy trojúhelníku tvořeného přímkami l_1, l_2, l_3.



Obr. 67

S ohledem na symetrii celé situace stačí, když dokážeme, že bod M_2 leží na přímce l_1. Body T_2 a H_2 leží vždy v téže polorovině určené přímkou BV. Budeme se zabývat pouze případem, kdy vrchol C trojúhelníku ABC leží ve stejné polorovině (druhý případ se vyřeší analogicky). Označme S průsečík polopřímky BV se spojnicí T_2T_3 a P průsečík polo-



Obr. 68

přímky BV s přímkou l_1 (obr. 68). Protože $|T_1S| = |T_3S|$ a $|\sphericalangle VST_3| = |\sphericalangle AT_3T_2| - \frac{1}{2}\beta = (90° - \frac{1}{2}\alpha) - \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\gamma$, je $|\sphericalangle VST_1| = |\sphericalangle VCT_1| = \frac{1}{2}\gamma$.

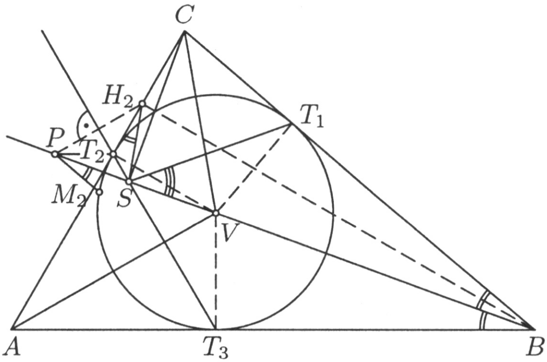
Oba body C i S leží ve stejné polorovině určené VT_1, takže čtyřúhelník VT_1CS je tětivový a navíc $CS \perp BV$. To ovšem znamená, že i čtyřúhelník BCH_2S je tětivový. Odtud plynou rovnosti

$$|\sphericalangle PSH_2| = \gamma \quad \text{a} \quad |\sphericalangle SH_2T_2| = \frac{\beta}{2}.$$

Z konstrukce bodu P je tak patrné (obr. 69, úhly PST_2 a BST_3 jsou vrcholové), že

$$|\sphericalangle PSH_2| = \gamma = 2|\sphericalangle PST_2|,$$

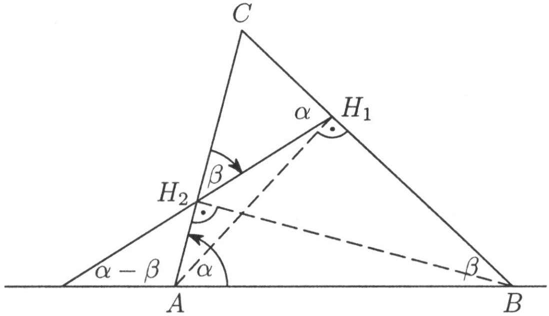
takže bod P je obrazem bodu H_2 v souměrnosti podle přímky T_2T_3. Z této souměrnosti navíc vychází, že $|\sphericalangle SPT_2| = |\sphericalangle SH_2T_2| = \frac{1}{2}\beta$. Z vlastností střídavých úhlů tudíž plyne, že $PT_2 \parallel AB$ a $PM_2 \parallel BC$. Abychom se tedy ujistili, že bod M_2 leží na l_1, ukážeme, že l_1 je rovnoběžná s BC. Tím bude důkaz tvrzení úlohy hotov.



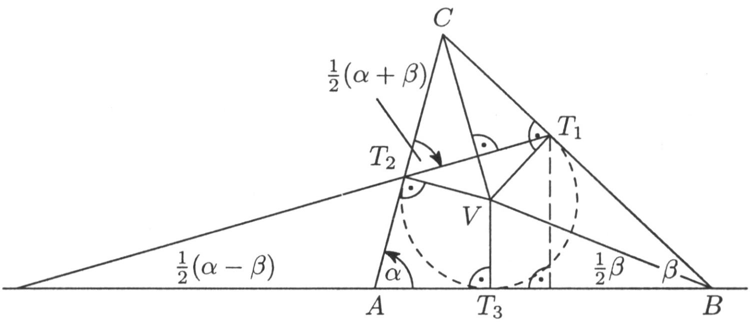
Obr. 69

Ukážeme nejprve, že přímka l_3, která je obrazem přímky H_1H_2 v souměrnosti podle osy T_1T_2, je rovnoběžná se stranou AB daného trojúhelníku. Pokud je trojúhelník ABC rovnoramenný ($\alpha = \beta$), je $T_1T_2 \parallel H_1H_2 \parallel AB$ a tvrzení je zřejmé. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\alpha > \beta$. V tom případě (obr. 70) z tětivového čtyřúhelníku ABH_1H_2 plyne, že je $|\sphericalangle H_1H_2C| = \beta$, takže H_1H_2 svírá s přímkou AB úhel $\alpha - \beta$. Podobně z tětivového čtyřúhelníku T_1CT_2V (obr. 71) zjistíme, že $|\sphericalangle T_1T_2C| = 90° - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, takže T_1T_2 svírá s přímkou AB úhel $\alpha - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Obraz přímky H_1H_2 v souměrnosti podle přímky T_1T_2 svírá tedy s přímkou AB úhel $(\alpha - \beta) - 2 \cdot \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 0°$.

Podobně zjistíme, že i přímky l_1 a l_2 jsou rovnoběžné s odpovídajícími stranami trojúhelníku ABC.



Obr. 70



Obr. 71

Jiné řešení. Jak jsme ukázali na závěr předchozího řešení, jsou přímky l_1, l_2, l_3 jsou rovnoběžné s odpovídajícími stranami trojúhelníku ABC. To ovšem znamená, že existuje stejnolehlost h, která převádí trojúhelník $A'B'C'$ určený přímkami l_1, l_2, l_3 na trojúhelník ABC. Abychom dokázali, že trojúhelník $A'B'C'$ je vepsán kružnici vepsané danému trojúhelníku ABC, musíme ukázat, že obrazem této kružnice ve stejnolehlosti h je právě kružnice trojúhelníku ABC opsaná. Přitom je zřejmé, že příslušný koeficient podobnosti musí být r/R, kde r značí poloměr vepsané a R poloměr opsané kružnice trojúhelníku ABC.

Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a uvažujme bod J, který dělí úsečku VO v uvedeném poměru, tj. $|VJ| : |JO| = r : R$, a stejnolehlost $h(J, -r/R)$. Ukážeme, že trojúhelník $A'B'C'$, který je obrazem trojúhelníku ABC ve stejnolehlosti h, je trojúhelník tvořený přímkami l_1, l_2 a l_3. Vzhledem k symetrii prvků v trojúhelníku stačí ukázat, že bod T_1 leží na ose souměrnosti přímek H_1H_2 a $A'B'$, tj. že vzdálenost bodu T_1 od přímky H_1H_2 je stejná jako od přímky $A'B'$. Protože analogicky i vzdálenost bodu T_2 od obou přímek $A'B'$ a H_1H_2 je stejná, bude to znamenat, že přímka $A'B'$ je obrazem přímky H_1H_2 v souměrnosti podle přímky T_1T_2, takže $l_3 = A'B'$.

Nejdříve zjistíme vzdálenost obou rovnoběžek AB a $A'B'$. Protože vzdálenost bodu O od strany AB je $R\cos\gamma$, plyne ze stejnolehlosti h, že vzdálenost bodu V od strany $A'B'$ je $\frac{r}{R}\cdot R\cos\gamma = r\cos\gamma$. Vzdálenost AB a $A'B'$ je tedy $r(1+\cos\gamma) = 2r\cos^2\frac{1}{2}\gamma$.

Vzdálenost bodu T_1 od strany AB je (obr. 71) $|T_1B|\sin\beta = 2|T_1B| \times \times \sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta = 2r\cos^2\frac{1}{2}\beta$, protože $|T_1B| = |T_3B| = r\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta$. Odečtením od vzájemné vzdálenosti přímek AB a $A'B'$ vychází, že vzdálenost bodu T_1 od $A'B'$ je

$$2r\left|\cos^2\frac{\gamma}{2} - \cos^2\frac{\beta}{2}\right| = r|\cos\gamma - \cos\beta|. \qquad (1)$$

Zbývá spočítat vzdálenost bodu T_1 od přímky H_1H_2. Z tětivového čtyřúhelníku ABH_1H_2 (obr. 70) máme $|\sphericalangle H_2H_1C| = \alpha$, takže příslušná vzdálenost je

$$|H_1T_1|\sin\alpha = \big||CH_1| - |CT_1|\big|\sin\alpha = \sin\alpha\left|b\cos\gamma - r\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\right|,$$

přičemž $b = r(\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma)$, takže

$$\begin{aligned}
|H_1T_1|\sin\alpha &= r\sin\alpha\left|\cos\gamma\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\right) - \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\right| = \\
&= r\sin\alpha\left|\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\cos\gamma - \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}(1-\cos\gamma)\right| = \\
&= r\left|\sin\alpha\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\cos\gamma - \sin\alpha\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right| = \\
&= r\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\cos\gamma - 2\sin\alpha\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right| = \\
&= r\left|2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma\right| = \\
&= r|(1+\cos\alpha)\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma| = \\
&= r|\cos\gamma + \cos(\alpha+\gamma)| = r|\cos\gamma - \cos\beta|.
\end{aligned}$$

Zjistili jsme, že vzdálenost bodu T_1 od přímky H_1H_2 je stejná jako vzdálenost (1) téhož bodu od přímky $A'B'$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.