50. ročník matematické olympiády na středních školách

Přípravná soustředění před 42. MMO

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Tomáš Pitner (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 50. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2000/2001. 42. mezinárodní matematická olympiáda. 13. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2001. pp. 137–140.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405032

Přípravná soustředění před 42. MMO

V průběhu 50. ročníku se konalo výběrové soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu bezprostředně po skončeném celostátním kole kategorie A, a to od 9. do 13. dubna 2001 v Jevíčku. Na základě výsledků II. a III. kola bylo na ně pozváno 10 kandidátů na reprezentaci.

Soustředění bylo zaměřeno na řešení obtížných úloh v omezeném čase (v soutěžních podmínkách). Po odpolední relaxaci byl proveden detailní rozbor opravených řešení. Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Jan Herman	4/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	73
Martin Tancer	3/4, G Ch. Dopplera, Praha 5	72,5
Josef Křišťan	7/7, G Plzeň, Mikulášské nám.	64,5
Tomáš Protivínský	3/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	70
Ondřej Suchý	7/7, G Plzeň, Mikulášské nám.	69
Martin Káldy	2/4, G Ch. Dopplera, Praha 5	59,5
Marek Sulovský	4/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	59,5
Jan Kynčl	6/6, G Jilemnice	70,5
Pavel Čížek	2/4, G a OA Kralupy n. Vlt.	47
Jaroslav Hájek	3/4, GMK, Bílovec	68

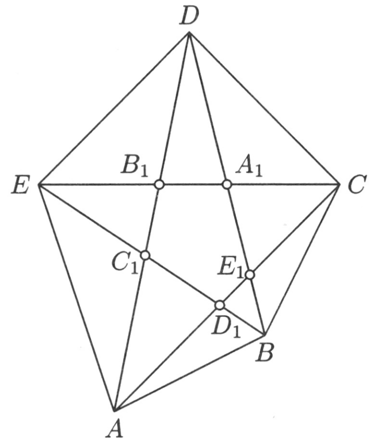
Na základě uvedených výsledků, v nichž jsou započítány i výsledky oblastního a celostátního kola, bylo vybráno šest reprezentantů a jeden náhradník. Ti pak byli ještě pozváni na přípravné soustředění, které se konalo opět v Jevíčku v týdnu od 29. května do 1. června a bylo věnováno nejen řešení úloh, ale i rozšíření znalostí našich olympioniků.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:
dr. *Karel Horák* (9. 4.),
dr. *Jaroslav Švrček* (10. 4.).
dr. *Martin Panák* a dr. *Pavel Calábek* (11. 4.)
a doc. *Jaromír Šimša* (12. a 13. 4.).

Úlohy zadané na přípravném soustředění

1. V rovině s kartézskou soustavou souřadnic je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$, jehož vrcholy mají celočíselné souřadnice. Dokažte, že uvnitř nebo na hranici pětiúhelníku $A_1B_1C_1D_1E_1$ (obr. 28) leží aspoň jeden bod s celočíselnými souřadnicemi.

2. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ s vepsanou kružnicí ω. Jeho strany AB a CD leží na různoběžkách, které se protínají v bodě O. Označme ω_1 kružnici, jež se dotýká strany BC v bodě K a prodloužení stran AB a CD, a ω_2 kružnici, jež se dotýká strany AD v bodě L a prodloužení stran AB a CD. Jestliže body O, K, L leží v přímce, potom leží v přímce i střed kružnice ω a středy stran BC a AD.



Obr. 28

3. V rovině je dán konvexní n-úhelník $P_1P_2\dots P_n$. Jestliže pro jeho dva libovolné vrcholy P_i, P_j existuje vrchol daného mnohoúhelníku, z něhož je úsečka P_iP_j vidět pod úhlem 60°, potom $n = 3$. Dokažte.

4. Nechť I značí střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, středy stran AB, AC označme po řadě C_1, B_1. Nechť přímky IC_1 a AC se protínají v bodě B_2 a přímky IB_1 a AB se protínají v bodě C_2. Stanovte velikost úhlu CAB, jsou-li rovny obsahy trojúhelníků ABC a AB_2C_2.

5. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány délky a, b, c, d jeho stran a délka m spojnice středů stran AB a CD.

6. Nechť D, E, F jsou po řadě vnitřní body stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC a r nechť značí poloměr kružnice jemu opsané. Dokažte, že platí nerovnost

$$\left(\frac{1}{|AD|}+\frac{1}{|BE|}+\frac{1}{|CF|}\right)(|DE|+|EF|+|FD|) \geqq \frac{|AB|+|BC|+|CA|}{r}.$$

7. Kružnice vepsaná čtyřúhelníku $ABCD$ se dotýká jeho stran DA, AB, BC, CD po řadě v bodech K, L, M, N. Nechť k_1, k_2, k_3, k_4 jsou kružnice vepsané po řadě trojúhelníkům AKL, BLM, CMN, DNK. Uvažujme společné vnější tečny ke dvojicím kružnic (k_1, k_2), (k_2, k_3), (k_3, k_4),

(k_4, k_1) různé od stran čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že úhlopříčky čtyřúhelníku, jehož strany leží na těchto společných vnějších tečnách, jsou navzájem kolmé.

8. Existuje rozklad množiny celých čísel na tři disjunktní podmnožiny takový, že pro libovolné celé číslo n leží čísla n, $n - 50$ a $n + 187$ vždy v různých podmnožinách?

9. Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonečná posloupnost přirozených čísel taková, že v rozkladu libovolného jejího členu na prvočísla se objevuje nejvýše 2 001 čísel (každé prvočíslo počítáme tolikrát, v jaké mocnině dělí daný člen). Dokažte, že z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ lze vybrat podposloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že největší společný dělitel libovolných dvou jejích členů (b_i, b_j) je vždy totéž číslo.

10. Nechť $a, a + d, a + 2d, \ldots$ je nekonečná aritmetická posloupnost. Dokažte, že obsahuje-li nějaké druhé mocniny přirozených čísel, tak alespoň jedna z nich je menší než $a + 2d\sqrt{a} + d^2$.

11. Nechť $\mathsf{A} = \{1, 2, \ldots, m + n\}$, kde m, n jsou přirozená čísla, a nechť funkce $f\colon \mathsf{A} \to \mathsf{A}$ je definována následujícím způsobem:

$$f(i) = i + 1 \qquad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m - 1, m + 1, \ldots, m + n - 1,$$
$$f(m) = 1 \qquad \text{a} \qquad f(m + n) = m + 1.$$

a) Dokažte: Nechť m a n jsou lichá čísla, pak existuje funkce $g\colon \mathsf{A} \to \mathsf{A}$ taková, že pro všechna $a \in \mathsf{A}$ platí $g\big(g(a)\big) = f(a)$.
b) Dokažte: Nechť m je sudé číslo, pak $m = n$, právě když existuje funkce $g\colon \mathsf{A} \to \mathsf{A}$ taková, že pro všechna $a \in \mathsf{A}$ platí $g\big(g(a)\big) = f(a)$.

12. Ukažte, že pro libovolné celé číslo n existuje právě jeden polynom Q s koeficienty z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ takový, že $Q(-2) = Q(-5) = n$.

13. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $f\big(x + yf(x)\big) = f(x) + xf(y)$ pro všechna reálná čísla x a y.

14. Dokažte, že pro libovolná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí nerovnost

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \leqq 3 + a^2b + b^2c + c^2a.$$

15. Hráči A a B hrají pro předem zvolené přirozené číslo n takovou hru. Začíná hráč A, který napíše libovolnou číslici z množiny

$\mathsf{M} = \{1,2,3,4,5,6\}$. K ní hráč B připíše opět číslici z M, k ní zase připíše hráč A číslici z M atd., až vznikne $2n$-místné číslo. Je-li toto číslo násobkem devíti, vyhrává hráč B; v opačném případě vyhrává hráč A. Který z hráčů má (v závislosti na čísle n) zaručenu výhru?

16. Najděte všechny dvojice celých čísel x a y, pro které platí

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1).$$

17. Dokažte, že existuje rostoucí nekonečná aritmetická posloupnost sestavená pouze z těch přirozených čísel, která nelze pro žádné $k < 10$ zapsat jako součet k druhých mocnin lichých celých čísel.

18. Množinu všech složených lichých přirozených čísel menších než 100 zapište jako sjednocení tří (nikoliv nutně disjunktních) aritmetických posloupností.

19. Doplňte celá čísla a_i, b_i v rovnici

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{a_1n + b_1}{a_2n + b_2} - \binom{a_3n + b_3}{a_4n + b_4}$$

tak, aby vzniklá rovnost platila pro každé přirozené číslo n.

20. Napište aspoň jednoho dělitele d čísla $N = 4^{545} + 545^4$ splňujícího odhady $2^{545} < d < N$.

21. Z písmen A, B je sestaveno libovolné slovo délky n, ve kterém je právě m slabik BA ($2m \leqq n$). Počet všech těchto slov zapište kombinačním číslem $\binom{N}{K}$, kde N a K jsou mnohočleny proměnných n a m.