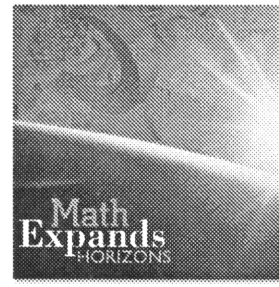
42. mezinárodní matematická olympiáda

Tato každoroční soutěž středoškoláků v řešení matematických úloh se prvních 21 let své existence konala vždy v některé evropské zemi. Teprve v roce 1981 opustila starý kontinent a zamířila do Washingtonu, hlavního města USA, kde její 22. ročník uspořádala vědecká společnost The Mathematical Association of America. Po dvaceti letech se soutěž vrátila téměř na stejné místo, když se hlavním dějištěm 42. ročníku MMO v červenci 2001 stal areál Univerzity George Masona, vzdálený od centra Washingtonu asi 30 km (v roce 1981 to byla Univerzita Georgetown, ke které se dostanete po 20 minutách chůze od Bílého domu). Během dvou desetiletí se sice nezměnila ani náplň soutěže (ve dvou dnech řeší jednotliví účastníci vždy tři úlohy po dobu 4,5 hodin), ani vyhodnocení dosažených výsledků (podle bodového zisku za všech šest soutěžních úloh získává nejlepší dvanáctina soutěžících zlaté medaile, další šestina stříbrné a další třetina bronzové medaile), významně však vzrostl rozsah celé akce: zatímco v roce 1981 se soutěže zúčastnilo 185 žáků z 27 zemí, v roce 2001 už to bylo 473 žáků z 83 zemí. Šestici našich soutěžících v roce 2001 tvořili *Jaroslav Hájek* (GMK Bílovec), *Jan Herman* (G Brno, tř. Kpt. Jaroše), *Jan Kynčl* (G Jilemnice), *Tomáš Protivínský* (G Brno, tř. Kpt. Jaroše), *Ondřej Suchý* (G Plzeň, Mikulášské nám.) a *Martin Tancer* (G Ch. Dopplera Praha). Vedoucím delegace České republiky byl doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc. (MÚ AV ČR Brno), družstvo doprovázel RNDr. *Jaroslav Švrček*, CSc. (PřF UP Olomouc).



Mezinárodní porota 42. MMO, tvořená vedoucími delegací jednotlivých zemí, zahájila svou práci pod předsednictvím známého amerického matematika *R. Grahama* 2. července 2001, den před příletem soutěžících. Úkolem poroty bylo vybrat šestici soutěžních úloh a připravit jejich znění v jazycích zúčastněných zemí. Jak se mnozí vedoucí před vlastní soutěží (konané 8. a 9. července) vyjádřili, vybraná šestice úloh byla neobvykle náročná. Přesto náš vedoucí věřil, že první a čtvrtá úloha budou českým soutěžícím vyhovovat a že většině z nich přinesou bodové zisky zaručující alespoň bronzové medaile. Nestalo se tak k našemu velkému zklamání, které nerozptýlil ani obdobný „výpadok“ slovenského družstva, jež v přípravě na soutěž vykazovalo lepší výsledky. Museli jsme se spokojit se ziskem dvou bronzových medailí *Jana Kynčla* a *Martina Tancera*. Kromě toho získali *Jaroslav Hájek* a *Tomáš Protivínský* čestné uznání, které se uděluje těm soutěžícím, kteří sice nedosáhli na žádnou z medailí, ale přitom za některou z úloh dostali plný počet sedmi bodů. Výsledky našich soutěžících najdete v přiložené tabulce.

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
243.–261.	Jaroslav Hájek, 3. roč. GMK Bílovec	7	0	0	3	0	0	10	
327.–346.	Jan Herman, 4. roč. gymnázia Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	0	0	2	1	0	5	
148.–163.	Jan Kynčl, 6. roč. gymnázia Jilemnice	7	0	0	2	7	0	16	III.
243.–261.	Tomáš Protivínský, 3. roč. gymnázia Brno, tř. Kpt. Jaroše	0	7	0	1	2	0	10	
398.–428.	Ondřej Suchý, 4. roč. gymnázia Plzeň, Mikulášské nám.	0	0	0	0	2	0	2	
181.–198.	Martin Tancer, 3. roč. G. Ch. Dopplera Praha 5	3	0	7	2	2	0	14	III.
	Celkem	19	7	7	10	14	0	57	

O náročnosti soutěžních úloh svědčí i nízké hranice pro zisk medailí: na bronzovou medaili stačilo 11 bodů, na stříbrnou 20 a na zlatou 30 z možného počtu 42 bodů. Žádný bod neztratili jen čtyři soutěžící: *Liang*

Xao s *Zhiquiang Zangem* z Číny a *Reid Barton* s *Gabrielem Carrollem* z USA. Jak je patrno z tabulky zúčastněných států, v neoficiálním hodnocení jednotlivých zemí podle celkového bodového zisku dopadly nejlépe (jak už je tradicí) Čína, Rusko a Spojené státy.

	I	II	III	body
ČLR	6	0	0	225
Rusko	5	1	0	196
USA	4	2	0	196
Bulharsko	3	3	0	185
Korea	3	3	0	185
Kazachstán	4	1	0	168
Indie	2	2	2	148
Ukrajina	1	5	0	143
Tchaj-wan	1	5	0	141
Vietnam	1	4	0	139
Turecko	1	3	2	136
Bělorusko	1	2	3	135
Japonsko	1	3	2	134
Německo	1	3	1	131
Rumunsko	1	2	2	129
Brazílie	0	4	2	120
Izrael	1	2	1	113
Írán	0	2	4	111
Hongkong	0	2	4	107
Polsko	0	3	1	107
Maďarsko	0	2	3	104
Argentina	0	3	2	103
Thajsko	0	2	2	103
Kanada	1	0	4	100
Austrálie	1	0	4	97
Kuba	1	1	3	92
Uzbekistán	0	1	3	91
Francie	0	2	3	88
Singapur	0	1	4	87
Řecko	0	1	3	86
Jugoslávie	0	1	3	79
Mongolsko	0	2	2	79
Velká Británie	0	1	3	79
Kypr	0	0	4	78
Chorvatsko	0	1	2	76
JAR	0	1	3	75
Estonsko	0	1	3	72
Gruzie	0	1	3	71
Lotyšsko	0	1	2	71
Moldavsko	0	2	1	70
Peru	0	0	4	67
Kolumbie	0	0	4	64

	I	II	III	body
Makedonie	0	0	2	59
Nový Zéland	0	1	1	58
Česká republika	0	0	2	57
Itálie	0	0	2	56
Mexiko	0	0	2	56
Slovensko	0	0	2	54
Venezuela	0	1	1	53
Norsko	0	1	1	48
Bosna a Hercegovina	0	1	1	47
Maroko	0	0	1	45
Arménie	0	0	2	44
Nizozemsko	0	0	2	42
Rakousko	0	0	1	41
Litva	0	0	1	39
Švýcarsko	0	0	2	38
Španělsko	0	0	1	37
Indonézie	0	1	0	36
Malajsie	0	0	0	36
Trinidad a Tobago	0	0	2	36
Tunisko	0	0	1	36
Finsko	0	0	1	32
Irsko	0	0	1	32
Macao	0	0	1	32
Turkmenistán	0	0	0	29
Slovinsko	0	0	0	27
Belgie	0	0	0	25
Dánsko	0	0	0	25
Švédsko	0	0	1	25
Srí Lanka	0	0	1	21
Albánie	0	0	0	20
Ázerbájdžán	0	0	1	19
Island	0	0	0	18
Filipíny	0	0	0	16
Guatemala	0	0	0	12
Uruguay	0	0	0	8
Portugalsko	0	0	0	6
Kirgizie	0	0	0	5
Lucembursko	0	0	0	4
Kuvajt	0	0	0	3
Paraguay	0	0	0	2
Ekvádor	0	0	0	0

Velkým překvapením je nevídaný úspěch Kazachstánu, jehož soutěžící se na olympiádu pečlivě připravovali během měsíčního internátního soustředění pod vedením pozvaného petrohradského matematika *S. Ruk-*

šina. Najdeme v budoucnu prostředky a časové možnosti pro obdobnou intenzívní přípravu i u nás?

Poděkování ovšem patří přerovskému podniku PRECHEZA, a.s., a společnosti AUTO NISSAN Kobliha v Přerově za jednotné oblečení celého českého družstva.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Nechť O je střed kružnice opsané ostroúhlému trojúhelníku ABC. Bod P strany BC je patou výšky z vrcholu A. Předpokládejme, že $|\sphericalangle BCA| \geqq |\sphericalangle ABC| + 30°$. Dokažte, že $|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle COP| < 90°$. (*Korea*)

2. Dokažte, že nerovnost

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqq 1$$

platí pro všechna kladná reálná čísla a, b, c. (*Korea*)

3. Matematické soutěže se zúčastnilo 21 dívek a 21 chlapců. Každý soutěžící vyřešil nejvýše šest úloh. Pro každou dívku a každého chlapce existuje alespoň jedna úloha, kterou vyřešili oba současně. Dokažte, že existuje úloha, kterou vyřešili alespoň tři dívky a alespoň tři chlapci. (*Německo*)

4. Nechť n je liché číslo větší než 1 a nechť $k_1, k_2, \ldots, k_n$ jsou daná celá čísla. Pro každou z $n!$ permutací $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ označme

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Dokažte, že existují dvě permutace b a c, $b \neq c$, pro které je číslo $n!$ dělitelem $S(b) - S(c)$. (*Kanada*)

5. V trojúhelníku ABC osa úhlu BAC protíná stranu BC v bodě P, osa úhlu ABC protíná stranu AC v bodě Q. Je známo, že $|\sphericalangle BAC| = 60°$ a že $|AB| + |BP| = |AQ| + |QB|$. Jaké jsou možné velikosti úhlů trojúhelníku ABC? (*Izrael*)

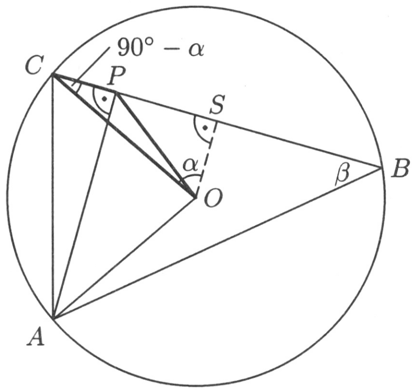
6. Nechť pro celá čísla a, b, c, d platí $a > b > c > d > 0$. Předpokládejme, že

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Dokažte, že $ab + cd$ není prvočíslo. (*Bulharsko*)

Řešení úloh

1. (Podle *Jana Kynčla.*) Označme vnitřní úhly v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem α, β, γ. Podle předpokladu platí $\gamma - \beta \geqq 30°$, tj. $\sin(\gamma - \beta) \geqq \frac{1}{2}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že kružnice opsaná uvažovanému trojúhelníku ABC má poloměr $r = 1$. Protože trojúhelník ABC je ostroúhlý, je bod P (pata výšky z vrcholu A) vnitřním bodem strany BC, jejíž střed označíme S.



Obr. 32

Z obr. 32 je patrné, že dokazovaná nerovnost $|\sphericalangle COP| < 90° - \alpha$ je ekvivalentní s nerovností $|CP| < |OP|$, neboť ze vztahu mezi středovým a obvodovým úhlem plyne $|\sphericalangle SOC| = \alpha$, takže $|\sphericalangle BCO| = 90° - \alpha$. Pro velikost tětivy AC s obvodovým úhlem β platí $|AC| = 2\sin\beta$ a podobně $|CS| = \sin\alpha$. Pomocí těchto vztahů snadno vyjádříme délky úseček CP a OP. Platí totiž $|CP| = |AC|\cos\gamma = 2\sin\beta\cos\gamma$. Aplikací Pythagorovy věty na pravoúhlý trojúhelník POS obdržíme konečně

$$|OP| = \sqrt{(\sin\alpha - 2\sin\beta\cos\gamma)^2 + \cos^2\alpha}.$$

Zbývá tedy dokázat, že pro libovolné vnitřní úhly α, β, γ ostroúhlého trojúhelníku ABC platí nerovnost

$$\sqrt{(\sin\alpha - 2\sin\beta\cos\gamma)^2 + \cos^2\alpha} > 2\sin\beta\cos\gamma.$$

Protože pravá strana této nerovnosti je kladné číslo, přejdeme (po umocnění obou stran nerovnosti na druhou) k ekvivalentní nerovnosti

$$(\sin^2\alpha - 4\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + 4\sin^2\beta\cos^2\gamma) + \cos^2\alpha > 4\sin^2\beta\cos^2\gamma.$$

Po její úpravě zjistíme, že je třeba dokázat nerovnost

$$1 - 4\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma > 0.$$

Užitím vztahu $2\sin\beta\cos\gamma = \sin(\beta+\gamma) + \sin(\beta-\gamma) = \sin\alpha + \sin(\beta-\gamma)$ však vidíme, že postupně platí

$$\begin{aligned} 1 - 4\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma &= 1 - 2\sin\alpha\bigl(\sin\alpha + \sin(\beta-\gamma)\bigr) = \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin(\beta-\gamma) \geqq \\ &\geqq 1 - 2\sin^2\alpha + \sin\alpha = (1+2\sin\alpha)(1-\sin\alpha) > 0, \end{aligned}$$

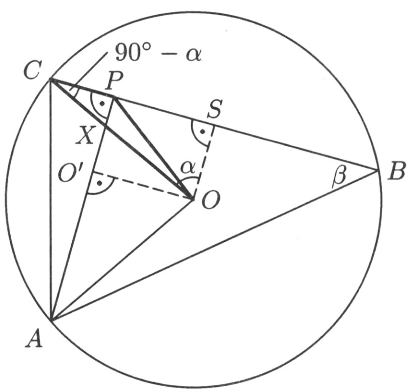
neboť pro každý ostrý úhel α platí současně $1+2\sin\alpha > 0$ a $1-\sin\alpha > 0$.

Tím je důkaz ukončen.

Jiné řešení. Stejně jako v předchozím řešení vyjdeme z toho, že dokazovaná nerovnost $|\sphericalangle COP| < 90° - \alpha$ je ekvivalentní s nerovností $|CP| < |OP|$. Ukážeme, že pro bod X, v němž výška AP protíná poloměr OC kružnice opsané, platí $|OX| \geqq \frac{1}{2}|OC|$, neboli $|OX| \geqq |CX|$, což dává

$$|CP| < |CX| \leqq |OX| < |OP|,$$

a tím jsme s důkazem hotovi.



Obr. 33

Platí totiž (obr. 33)

$$|\sphericalangle OAP| = |\sphericalangle BAP| - |\sphericalangle BAO| = (90° - \beta) - (90° - \gamma) = \gamma - \beta \geqq 30°,$$

a protože $\sin(\gamma-\beta) \geqq \frac{1}{2}$, je

$$\frac{1}{2} \leqq \sin(\gamma-\beta) = \frac{|OO'|}{|OA|} \leqq \frac{|OX|}{|OA|} = \frac{|OX|}{|OC|},$$

neboli $|OX| \geqq \frac{1}{2}|OC|$, což jsme potřebovali dokázat.

2. Má-li některé reálné číslo p tu vlastnost, že pro libovolná kladná a, b, c platí nerovnost

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geqq \frac{a^p}{a^p+b^p+c^p}, \tag{1}$$

je tvrzení úlohy nasnadě: stačí pak totiž sečíst nerovnost (1) s nerovnostmi

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} \geqq \frac{b^p}{b^p+c^p+a^p} \quad \text{a} \quad \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqq \frac{c^p}{c^p+a^p+b^p}.$$

Uvažujme prozatím obecné p a všimněme si, že z nerovností mezi aritmetickými a geometrickými průměry skupin čísel $\{b^p, c^p\}$ a $\{a^p, a^p, b^p, c^p\}$ plyne

$$\begin{aligned}(a^p+b^p+c^p)^2-(a^p)^2 &= (b^p+c^p)(a^p+a^p+b^p+c^p) \geqq \\ &\geqq 2(b^pc^p)^{\frac{1}{2}} \cdot 4(a^pa^pb^pc^p)^{\frac{1}{4}} = 8a^{\frac{1}{2}p}(bc)^{\frac{3}{4}p}.\end{aligned}$$

Odtud po přičtení členu $(a^p)^2$ získáme odhad

$$(a^p+b^p+c^p)^2 \geqq 8a^{\frac{p}{2}}(bc)^{\frac{3}{4}p}+(a^p)^2 = a^{\frac{1}{2}p}\cdot\left(a^{\frac{3}{2}p}+8(bc)^{\frac{3}{4}p}\right),$$

ve kterém nyní zvolíme $p=\frac{4}{3}$. Dostaneme

$$(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2 \geqq a^{\frac{2}{3}}\left(a^2+8bc\right),$$

odkud je již zřejmé, že nerovnost (1) pro zvolené p platí.

Jiné řešení. (Podle *Tomáše Protivínského.*) Předně si uvědomme, že daná nerovnost je homogenní. Vyhovuje-li totiž dané nerovnosti trojice (a,b,c) kladných čísel, vyhovuje jí rovněž každá trojice (ka,kb,kc), kde k je libovolné kladné číslo. Bez újmy na obecnosti lze tedy předpokládat, že platí $abc=1$. Na základě tohoto předpokladu ji můžeme dále upravit a užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvojice kladných čísel odhadnout např. první sčítanec na levé straně nerovnosti následujícím způsobem:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+8/a}} = \frac{1}{\sqrt{1+8/a^3}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{2}{a}\right)\left(1-\frac{2}{a}+\frac{4}{a^2}\right)}} \geqq \frac{2}{\left(1+\frac{2}{a}\right)+\left(1-\frac{2}{a}+\frac{4}{a^2}\right)} =$$
$$= \frac{2}{2+\frac{4}{a^2}} = \frac{1}{1+\frac{2}{a^2}} = \frac{1}{1+2b^2c^2}.$$

Podobně pro zbylé dva sčítance dostaneme odhady

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} \geqq \frac{1}{1+2c^2a^2} \quad \text{a} \quad \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqq \frac{1}{1+2a^2b^2}.$$

Jejich součtem pak dostáváme nerovnost

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqq$$
$$\geqq \frac{1}{1+2b^2c^2} + \frac{1}{1+2c^2a^2} + \frac{1}{1+2a^2b^2}.$$

Ukážeme-li nyní, že pro libovolná kladná čísla a, b, c ($abc = 1$) je splněna nerovnost

$$\frac{1}{1+2b^2c^2} + \frac{1}{1+2c^2a^2} + \frac{1}{1+2a^2b^2} \geqq 1,$$

jsme s důkazem hotovi.

Uvedeme-li nejprve levou stranu poslední nerovnosti na společného jmenovatele, dostaneme po několika zjednodušujících úpravách (za využití podmínky $abc = 1$) ekvivalentní nerovnost

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqq 3.$$

Užijeme-li nyní opět nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro trojici kladných čísel a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2, dostaneme

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqq 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4} = 3,$$

v níž rovnost nastává, právě když $a^2b^2 = b^2c^2 = c^2a^2$, tedy pro $a = b = c$ $(= 1)$.

Tím je důkaz nerovnosti ukončen.

Jiné řešení. (Podle *T. Laffeye*, vedoucího irské delegace.) I když půjde o řešení, které je ve srovnáním s autorským řešením poněkud delší, oceníme na něm to, že je méně trikové. Jeho prvním krokem je úprava, kterou běžně používáme při počítání s homogenními výrazy. Protože platí

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{1+8\frac{bc}{a^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+8\frac{ca}{b^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+8\frac{ab}{c^2}}},$$

zavedeme nové proměnné

$$x = \frac{bc}{a^2}, \quad y = \frac{ca}{b^2}, \quad z = \frac{ab}{c^2}$$

splňující podmínku $xyz = 1$ a ukážeme, že pro taková kladná čísla x, y, z platí

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}} + \frac{1}{\sqrt{1+8y}} + \frac{1}{\sqrt{1+8z}} \geqq 1.$$

Označíme ještě $u = \sqrt{1+8x}$, $v = \sqrt{1+8y}$, $w = \sqrt{1+8z}$ a dokazovanou nerovnost

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{v} \geqq 1$$

upravíme zřejmým způsobem na tvar $(uv + vw + wu)^2 \geqq (uvw)^2$. Obě strany poslední nerovnosti nyní vyjádříme takto:

$$\begin{aligned}
(uv + vw + wu)^2 &= \\
&= (uv)^2 + (vw)^2 + (wu)^2 + 2uvw(u+v+w) = \\
&= 3 + 16(x+y+z) + 64(xy+xz+yz) + 2uvw(u+v+w), \\
(uvw)^2 &= (1+8x)(1+8y)(1+8y) = \\
&= 1 + 8(x+y+z) + 64(xy+xz+yz) + 512.
\end{aligned}$$

Náš úkol se proto zřejmě redukuje na důkaz nerovnosti

$$4(x+y+z) + uvw(u+v+w) \geqq 255.$$

Protože $xyz = 1$, platí $(x + y + z) \geqq 3(xyz)^{\frac{1}{3}} = 3$ a také $xy + xz + yz \geqq 3\big((xyz)^2\big)^{\frac{1}{3}} = 3$. S pomocí AG-nerovnosti odhadneme i výraz $uvw(u + v + w)$:

$$\begin{aligned}
uvw(u+v+w) &\geqq uvw \cdot 3(uvw)^{\frac{1}{3}} = 3(u^2v^2w^2)^{\frac{2}{3}} = \\
&= 3\big((1+8x)(1+8y)(1+8z)\big)^{\frac{2}{3}} = \\
&= 3\big(1 + 8(x+y+z) + 64(xy+xz+yz) + 512\big)^{\frac{2}{3}} \geqq \\
&\geqq 3(1 + 8 \cdot 3 + 8^2 \cdot 3 + 8^3)^{\frac{2}{3}} = \\
&= 3\left[(1+8)^3\right]^{\frac{2}{3}} = 3 \cdot 81 = 243.
\end{aligned}$$

Sečtením obou odhadů dostaneme nerovnost, kterou jsme potřebovali dokázat.

3. (Podle *Martina Tancera.*) Soutěžní úlohy budeme značit písmenem p, soutěžící dívky písmenem g, soutěžící chlapce písmenem b. Trojici (g, p, b) nazveme *spojením,* pokud úlohu p vyřešili dívka g i chlapec b. Řekneme, že spojení (g, p, b) je G-vyhovující (resp. B-vyhovující), pokud byla příslušná úloha p vyřešena alespoň třemi dívkami (resp. alespoň třemi chlapci). Naším cílem je úvahou o počtu N všech spojení ukázat, že některé spojení je jak G-vyhovující, tak i B-vyhovující.

Protože pro každé g a každé b existuje alespoň jedno spojení $(g, *, b)$, je pro každé g počet všech spojení $(g, *, *)$ roven $21 + n(g)$, kde $n(g)$ je vhodné nezáporné celé číslo. Celkový počet N všech spojení je pak dán vzorcem

$$N = \sum_g \big(21 + n(g)\big) = 441 + \sum_g n(g)$$

(využili jsme toho, že počty chlapců i dívek se rovnají 21).

Připusťme nyní, že *některá* dívka g vyřešila *šest* (různých) úloh p_i a že přitom žádné z příslušných spojení $(g, p_i, *)$ není B-vyhovující, tedy že existují (při pevném i) vždy nejvýše dvě spojení $(g, p_i, *)$. Protože dívka g dle zadání žádnou další úlohu nevyřešila, je pak tato dívka zastoupena v nejvýše $2 \cdot 6 = 12$ spojeních, a to je spor, protože každá z dívek je zastoupena nejméně v 21 spojeních. Tak jsme zdůvodnili, že *každá* dívka g vyřešila *nejvýše pět* úloh p_i takových, že žádné ze spojení $(g, p_i, *)$ není B-vyhovující. Znamená to, že počet spojení $(g, *, *)$, která nejsou B-vyhovující, nepřevyšuje číslo 10. Odtud pro každé g plyne, že počet těch spojení $(g, *, *)$, která jsou naopak B-vyhovující, je alespoň

$21 + n(g) - 10$, tedy alespoň $11 + n(g)$. Sečteme-li tyto odhady přes všechna g, zjistíme, že počet všech B-vyhovujících spojení je alespoň

$$\sum_g (11 + n(g)) = 231 + \sum_g n(g) = N - 210.$$

Úplně stejně zdůvodníme, že počet všech G-vyhovujících spojení je alespoň $N-210$. Kdyby tudíž žádné spojení nebylo současně B-vyhovující i G-vyhovující, musela by platit nerovnost

$$N \geqq (N - 210) + (N - 210), \quad \text{neboli} \quad N \leqq 420.$$

To ale není možné, neboť $N \geqq 441$. Důkaz je ukončen.

4. Tvrzení úlohy dokážeme sporem, a to úvahou o součtu všech čísel $S(a)$.[1] Označme zmíněný součet písmenem S:

$$S = \sum_a S(a).$$

Připusťme tedy, že žádný z rozdílů $S(b) - S(c)$ není násobkem čísla $n!$, takže každé z $n!$ čísel $S(a)$ dává při dělení číslem $n!$ jiný zbytek. Všech možných zbytků je ale právě $n!$, proto je každý ze zbytků $0, 1, 2, \ldots, n!-1$ zastoupen mezi zbytky čísel $S(a)$ právě jednou. Znamená to, že součet S všech čísel $S(a)$ dává při dělení číslem $n!$ stejný zbytek jako součet

$$S^* = 0 + 1 + 2 + \ldots + (n! - 1) = n! \cdot \frac{n! - 1}{2}.$$

Součet S lze však vypočítat přímo: protože pro libovolná $i, j \in \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existuje právě $(n-1)!$ permutací a s vlastností $a_i = j$, je koeficient čísla k_i v součtu S roven $(n-1)! \cdot (1+2+\ldots+n) = n! \cdot \frac{1}{2}(n+1)$, takže platí rovnost

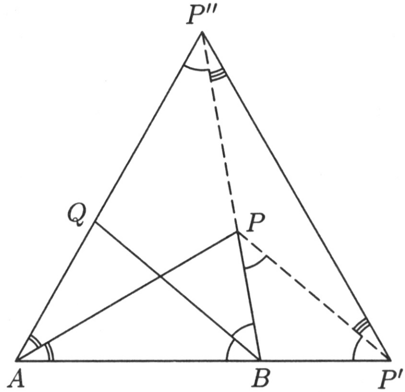
$$S = n! \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

Protože číslo n je dle předpokladu liché, je zlomek $\dfrac{n+1}{2}$ celé číslo, takže vyjádřená hodnota S je násobkem čísla $n!$. Pro žádné $n > 1$ však zlomek $\dfrac{n!-1}{2}$ z vyjádření čísla S^* nemá sudý čitatel, takže součet S^* není násobkem čísla $n!$. Čísla S a S^* tedy dávají při dělení číslem $n!$ různé zbytky, což je kýžený spor.

---

[1] S politováním konstatujeme, že uvažovat o tomto součtu nenapadlo žádného našeho soutěžícího. Nikdo z nich tuto úlohu, patrně nejjednodušší z celé soutěžní šestice, nevyřešil.

5. Uvažujme obvyklé značení vnitřních úhlů trojúhelníku ABC. Podle zadání je tedy $\alpha = 60°$. Na polopřímce AB (obr. 34) sestrojme bod P' za bodem B tak, že platí $|BP| = |BP'|$, neboli $|AP'| = |AB| + |BP|$.



Obr. 34

Trojúhelník $BP'P$ je tedy rovnoramenný s vnitřními úhly při základně $P'P$ velikosti $\frac{1}{2}\beta$. Na polopřímce AQ uvažujme podobně bod P'', pro který platí $|QP''| = |QB|$, neboli $|AP''| = |AQ| + |QB|$. Trojúhelník QBP'' je tedy rovněž rovnoramenný a pro jeho úhly platí $|\sphericalangle QP''B| = |\sphericalangle QBP''| = \frac{1}{2}\beta$. Protože platí

$$|AP'| = |AB| + |BP| = |AQ| + |QB| = |AP''|,$$

je i trojúhelník $AP'P''$ rovnoramenný, a dokonce rovnostranný, neboť jeden z jeho úhlů má velikost 60°. Protože bod P leží na ose AP úhlu při jeho vrcholu A, platí $|PP'| = |PP''|$ a zároveň $|\sphericalangle AP''P| = |\sphericalangle AP'P| = \frac{1}{2}\beta$. A protože $|\sphericalangle AP''P| = |\sphericalangle QP''P| = |\sphericalangle QP''B| = \frac{1}{2}\beta$, leží body B, P a P'' v přímce, proto je bod P'' totožný s vrcholem C trojúhelníku ABC.

Protože trojúhelník BCQ je rovnoramenný, platí

$$\frac{\beta}{2} = \gamma = 120° - \beta,$$

tudíž $\beta = 80°$ a $\gamma = 40°$.

Závěr: Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC jsou tedy $\alpha = 60°$, $\beta = 80°$ a $\gamma = 40°$.

6. Tvrzení úlohy dokážeme sporem. Připusťme tedy, že za podmínek úlohy je číslo $p = ab + cd$ prvočíslo. Rovnost ze zadání nejprve upravíme:

$$\begin{aligned} ac + bd &= (b+d)^2 - (a-c)^2, \\ ac + bd &= b^2 + 2bd + d^2 - a^2 + 2ac - c^2, \\ a^2 - ac + c^2 &= b^2 + bd + d^2. \end{aligned}$$

Všechny způsoby řešení, které známe, jsou založeny na objevení poznatku, že číslo $b^2 + bd + b^2$ je násobkem prvočísla p, a to s využitím některé rovnosti typu $r(b^2 + bd + d^2) = ps$, kde r a s jsou přirozená čísla, přičemž číslo r je buď samo menší než p, nebo je součinem čísel menších než p. Uveďme tři takové rovnosti

$$\begin{aligned} (ac + bd)(b^2 + bd + d^2) &= p(ad + bc), \\ (b - c)(b + c)(b^2 + bd + d^2) &= p(ab - cd - bc), \\ (a - d)(a + d)(b^2 + bd + d^2) &= p(ab - cd + ad) \end{aligned}$$

a dokažme například první z nich. Platí

$$\begin{aligned} (ac + bd)(b^2 + bd + d^2) &= ac(b^2 + bd + d^2) + bd(a^2 - ac + c^2) = \\ &= ab^2c + abcd + acd^2 + a^2bd - abcd + bc^2d = \\ &= ab \cdot bc + cd \cdot ad + ab \cdot ad + cd \cdot bc = \\ &= (ab + cd)(ad + bc) = p(ad + bc). \end{aligned}$$

Z dokázané rovnosti plyne, že prvočíslo p dělí alespoň jedno z přirozených čísel $ac + bd$, $b^2 + bd + d^2$. První z nich však dělit nemůže, neboť

$$p - (ac + bd) = (ab + cd) - (ac + bd) = (a - d)(b - c) > 0$$

(připomeňme, že $a > b > c > d$). Platí tedy $p \mid (b^2 + bd + d^2)$. Z nerovností $bd < b^2 < ab$ a $d^2 < cd$ ovšem plyne

$$b^2 + bd + d^2 < ab + ab + cd < 2(ab + cd) = 2p,$$

tudíž nutně $b^2 + bd + d^2 = p$. Odtud plyne, že čísla b, d jsou nesoudělná. Rovnost $b^2 + bd + d^2 = ab + cd$ lze upravit do tvaru $(b + d - a)b = d(c - d)$, z něhož vzhledem k nesoudělnosti čísel b, d plyne, že přirozené číslo $c - d$ je násobkem čísla b. To je však nemožné, neboť $c - d < c < b$. Tvrzení úlohy je tím dokázáno.