Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Je-li S obsah trojúhelníku o stranách a, b, c a T obsah trojúhelníku o stranách $a+b$, $b+c$, $c+a$, pak platí $T \geqq 4S$. Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost. *(P. Kaňovský)*

A – I – 2

V oboru celých čísel x, y řešte rovnici

$$(x_5)^2 + (y^4)_5 = 2xy^2 + 51,$$

kde n_5 značí násobek pěti nejbližší k číslu n, například $(-9)_5 = -10$. *(P. Černek)*

A – I – 3

V daném trojúhelníku ABC protíná osa úhlu ACB stranu AB v bodě K a kružnici opsanou v bodě L $(L \neq C)$. Označme V střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, S střed kružnice opsané trojúhelníku KBV a Z průsečík přímek AB a SL. Dokažte, že přímka SK je tečnou kružnice opsané trojúhelníku KLZ. *(J. Földes)*

A – I – 4

Nechť $n \geqq 2$ je dané přirozené číslo. Pro které hodnoty reálného parametru p má soustava rovnic

$$\begin{aligned} x_1^4 + \frac{2}{x_1^2} &= p x_2, \\ x_2^4 + \frac{2}{x_2^2} &= p x_3, \\ \dots\dots\dots&\dots\dots\dots \\ x_{n-1}^4 + \frac{2}{x_{n-1}^2} &= p x_n, \\ x_n^4 + \frac{2}{x_n^2} &= p x_1 \end{aligned}$$

alespoň dvě řešení v oboru reálných čísel? (*J. Švrček*)

A – I – 5

Najděte všechny mnohočleny $P(x)$ s reálnými koeficienty, které pro každé reálné číslo x splňují rovnost

$$(x+1)\,P(x-1) + (x-1)\,P(x+1) = 2x\,P(x).$$

(*E. Kováč*)

A – I – 6

Najděte všechny čtyřstěny, které mají síť tvaru deltoidu a právě čtyři hrany dané délky a. (Deltoidem rozumíme konvexní čtyřúhelník souměrný podle *jediné* ze svých úhlopříček; nepatří k nim tedy ani čtverec, ani kosočtverec.) (*P. Leischner*)

A – S – 1

V oboru celých čísel x řešte rovnici

$$3(x^2)_5 + (3x)_5 = (3x-2)(x+2),$$

kde n_5 značí násobek pěti nejbližší číslu n, např. $(-3)_5 = -5$.

(*J. Šimša*)

A – S – 2

Označme S střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC a P, Q paty kolmic z vrcholu C k přímkám, na kterých leží osy vnitřních úhlů BAC a ABC. Dokažte, že přímky AB a PQ jsou rovnoběžné.

(*J. Švrček*)

A – S – 3

Zjistěte, pro která reálná čísla p má soustava rovnic

$$\begin{aligned} x^2+1 &= (p+1)x+py-z, \\ y^2+1 &= (p+1)y+pz-x, \\ z^2+1 &= (p+1)z+px-y \end{aligned}$$

s neznámými x, y, z právě jedno řešení v oboru reálných čísel.

(*E. Kováč*)

A – II – 1

Dokažte, že pro libovolná čísla $\alpha, \beta \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi)$ platí nerovnost

$$\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta} \geqq 2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}.$$

Zjistěte rovněž, kdy nastane rovnost. (*E. Kováč*)

A – II – 2

Najděte všechny dvojice přirozených čísel x a y, pro které platí

$$x^2 = 4y + 3\cdot n(x,y),$$

kde $n(x,y)$ značí nejmenší společný násobek čísel x a y. (*P. Černek*)

A – II – 3

Do kružnice k je vepsán čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD není průměrem. Dokažte, že průsečík přímek, jež se kružnice k dotýkají v bodech B a D, leží na přímce AC, právě když platí $|AB|\cdot|CD| = |AD|\cdot|BC|$.

(*E. Kováč*)

A – II – 4

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
x^2 - 1 &= p(y + z),\\
y^2 - 1 &= p(z + x),\\
z^2 - 1 &= p(x + y)
\end{aligned}
$$

s neznámými x, y, z a parametrem p. Proveďte diskusi počtu řešení.

(*E. Kováč*)

A – III – 1

V oboru celých čísel řešte soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
(4x)_5 + 7y &= 14,\\
(2y)_5 - (3x)_7 &= 74,
\end{aligned}
$$

kde $(n)_k$ značí násobek čísla k nejbližší číslu n. (*P. Černek*)

A – III – 2

Uvažujme libovolný rovnostranný trojúhelník KLM, jehož vrcholy K, L a M leží po řadě na stranách AB, BC a CD daného čtverce $ABCD$. Najděte množinu středů stran KL všech takových trojúhelníků KLM.

(*J. Zhouf*)

A – III – 3

Dokažte, že přirozené číslo A je druhou mocninou některého přirozeného čísla, právě když pro každé přirozené n je aspoň jeden z rozdílů

$$(A + 1)^2 - A,\ (A + 2)^2 - A,\ (A + 3)^2 - A,\ \ldots,\ (A + n)^2 - A$$

dělitelný číslem n. (*P. Kaňovský*)

A – III – 4

Najděte všechny dvojice reálných čísel a, b, pro které má rovnice

$$\frac{ax^2 - 24x + b}{x^2 - 1} = x$$

v oboru reálných čísel právě dvě řešení, přičemž jejich součet je 12.

(*P. Černek*)

A – III – 5

V rovině je dán trojúhelník KLM a bod A ležící na polopřímce opačné k polopřímce KL. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$, jehož vrcholy B, C a D leží po řadě na přímkách KM, KL a LM. *(P. Calábek)*

A – III – 6

Nechť $\mathbb{R}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ rovnost

$$f\bigl(xf(y)\bigr) = f(xy) + x.$$

(P. Kaňovský)

A – I – 1

Vyjádření obsahu S obecného trojúhelníku z délek jeho stran a, b, c je dáno Heronovým vzorcem

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{kde} \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Bez označení s pro poloviční obvod je zápis Heronova vzorce poněkud delší:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}. \tag{1}$$

Udělejme malou odbočku a všimněme si, jak Heronův vzorec nepřímo „testuje“ známé nerovnosti, které zaručují existenci trojúhelníku: *Čísla a, b, c jsou délkami stran některého trojúhelníku, právě když všichni činitelé pod odmocninou ve vzorci* (1) *jsou kladní.*

Podle vzorce (1) je obsah T trojúhelníku o stranách $a+b$, $b+c$, $c+a$ roven

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{(2a+2b+2c)(2c)(2a)(2c)} = \sqrt{abc(a+b+c)}.$$

Dokazovanou nerovnost $T \geqq 4S$ tudíž rozepíšeme jako

$$\sqrt{abc(a+b+c)} \geqq \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)};$$

v ekvivalentní nerovnosti mezi odmocňovanými výrazy zkrátíme činitel $(a+b+c)$ a dostaneme tak nerovnost

$$abc \geqq (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c), \tag{2}$$

kterou nyní (pro strany a, b, c obecného trojúhelníku) několika způsoby dokážeme.

Při prvním z nich využijeme zřejmých nerovností

$$\begin{aligned} a^2 &\geqq a^2-(b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c),\\ b^2 &\geqq b^2-(c-a)^2 = (b-c+a)(b+c-a),\\ c^2 &\geqq c^2-(a-b)^2 = (c-a+b)(c+a-b). \end{aligned} \tag{3}$$

Protože jde o tři nerovnosti mezi kladnými výrazy, součin jejich levých stran není menší než součin jejich pravých stran:

$$a^2b^2c^2 \geqq (b+c-a)^2(a+c-b)^2(a+b-c)^2,$$

odkud po odmocnění dostaneme nerovnost (2). Tím je nerovnost $T \geqq 4S$ dokázána. Z našeho postupu rovněž plyne, že rovnost $T = 4S$ nastane, právě když budou splněny současně tři rovnosti

$$a^2 = a^2 - (b-c)^2, \; b^2 = b^2 - (c-a)^2, \; c^2 = c^2 - (a-b)^2,$$

tj. právě když bude platit $a = b = c$ (případ rovnostranného trojúhelníku).

Poznamenejme, že důkazu (2) jsme dosáhli vynásobením tří analogických nerovností (3). První z nich po odmocnění obou stran získá tvar nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (kladných) čísel $u = a+b-c$ a $v = a-b+c$:

$$a = \frac{(a+b-c)+(a-b+c)}{2} \geqq \sqrt{(a+b-c)(a-b+c)},$$

Využít takovou AG-nerovnost vás možná napadne, když dokazovanou nerovnost (2) přepíšete z původních proměnných a, b, c do nových proměnných

$$u = a+b-c > 0, \; v = a-b+c > 0, \; w = -a+b+c > 0.$$

Protože $a = \frac{1}{2}(u+v)$, $b = \frac{1}{2}(u+w)$ a $z = \frac{1}{2}(v+w)$, přejde nerovnost (2) v nerovnost

$$(u+v)(u+w)(v+w) \geqq 8uvw \tag{2'}$$

a souvislost s AG-nerovnostmi

$$\frac{u+v}{2} \geqq \sqrt{uv}, \; \frac{u+w}{2} \geqq \sqrt{uw}, \; \frac{v+w}{2} \geqq \sqrt{vw}$$

je nasnadě. Dokázat transformovanou nerovnost (2′) můžeme ovšem i užitím jediné AG-nerovnosti: po roznásobení levé strany (2′) a zřejmé úpravě dostaneme

$$\frac{u^2v+u^2w+v^2u+v^2w+w^2u+w^2v}{6} \geqq uvw,$$

což je AG-nerovnost pro skupinu šesti členů

$$u^2v,\ u^2w,\ v^2u,\ v^2w,\ w^2u,\ w^2v,$$

neboť jejich geometrický průměr je roven

$$\sqrt[6]{u^2v\cdot u^2w\cdot v^2u\cdot v^2w\cdot w^2u\cdot w^2v}=uvw.$$

Na závěr uveďme ještě jeden algebraický důkaz nerovnosti (2). S ohledem na symetrii předpokládejme, že $a\leqq\min\{b,c\}$, položme $x=b-a\geqq 0$, $y=c-a\geqq 0$ a přepišme nerovnost (2) jako nerovnost pro mnohočlen proměnné a s koeficienty závislými na x a y:

$$\begin{aligned}
&abc-(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=\\
&\quad=a(a+x)(a+y)-(a+x+y)(a+y-x)(a+x-y)=\\
&\quad=a[a^2+a(x+y)+xy]-[a+(x+y)][a^2-(x-y)^2]=\\
&\quad=[a^3+a^2(x+y)+axy]-\\
&\qquad-[a^3+a^2(x+y)-a(x-y)^2-(x+y)(x-y)^2]=\\
&\quad=a[xy+(x-y)^2]+(x+y)(x-y)^2.
\end{aligned}$$

Poslední výraz je (vzhledem k tomu, že $a>0$, $x\geqq 0$, $y\geqq 0$) zřejmě nezáporný, přičemž nule se rovná, právě když platí $xy=0$ a $x-y=0$, neboli $x=y=0$.

A – I – 2

Nechť dvojice celých čísel x, y vyhovuje dané rovnici. Protože součet $(x_5)^2+(y^4)_5$ je dělitelný pěti, dává číslo $2xy^2$ při dělení pěti zbytek 4, tj. $5\mid(2xy^2-4)$. Číslo y proto není dělitelné pěti, takže platí buď $y=5k\pm 1$, nebo $y=5k\pm 2$, kde $5k=y_5$. Obě možnosti teď posoudíme odděleně.

Případ $y=5k\pm 1$. Protože $y^2=25k^2\pm 10k+1$, platí $5\mid(y^2-1)$, a proto z podmínky $5\mid(2xy^2-4)$ plyne $5\mid(2x-4)=2(x-2)$, tedy $x=5n+2$, kde $5n=x_5$. Z podmínky $5\mid(y^2-1)$ plyne rovněž $5\mid(y^4-1)$, neboli $(y^4)_5=y^4-1$, tudíž daná rovnice získává tvar

$$(5n)^2+(y^4-1)=2\cdot(5n+2)\cdot y^2+51.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$
\begin{aligned}
(y^4 - 10ny^2 + 25n^2) - 4y^2 &= 52,\\
(y^2 - 5n)^2 - 4y^2 &= 52,\\
(y^2 - 5n - 2y)(y^2 - 5n + 2y) &= 52. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Na levé straně poslední rovnice je součin dvou celých čísel lišících se o $4y$, tedy o násobek čtyř; protože $52 = 2^2 \cdot 13$, stojí na levé straně (1) součin čísel 2 a 26, nebo součin čísel -2 a -26. Tak či onak platí $|4y| = 26 - 2 = 24$, odkud $y = \pm 6$, takže *menší* z obou činitelů v (1) je roven $6^2 - 5n - 12 = 24 - 5n$. Zatímco rovnice $24 - 5n = 2$ žádné celočíselné řešení n nemá, rovnice $24 - 5n = -26$ má řešení $n = 10$, kterému odpovídá $x = 5 \cdot 10 + 2 = 52$. Podmínku $y = 5k \pm 1$ tedy splňují právě dvě řešení dané rovnice: $(x, y) = (52, 6)$ a $(x, y) = (52, -6)$.

Případ $y = 5k \pm 2$. Protože $y^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$, platí $5 \mid (y^2 + 1)$, a proto z podmínky $5 \mid (2xy^2 - 4)$ plyne $5 \mid (-2x - 4) = -2(x + 2)$, tedy $x = 5n - 2$, kde $5n = x_5$. Z podmínky $5 \mid (y^2 + 1)$ plyne rovněž $5 \mid (y^4 - 1)$, neboli $(y^4)_5 = y^4 - 1$, tudíž daná rovnice získává tvar

$$(5n)^2 + (y^4 - 1) = 2 \cdot (5n - 2) \cdot y^2 + 51.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$
\begin{aligned}
(y^4 - 10ny^2 + 25n^2) + 4y^2 &= 52,\\
(y^2 - 5n)^2 + 4y^2 &= 52. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Oba sčítanci v levé straně poslední rovnice jsou nezáporní, takže nepřevyšují číslo 52 z pravé strany. Z nerovnosti $4y^2 \leqq 52$ plyne $y^2 \leqq 13$, což s ohledem na podmínku $y = 5k \pm 2$ znamená, že buď $y = \pm 2$, nebo $y = \pm 3$. Je-li $y = \pm 2$, je rovnice (2) splněna, právě když $(4 - 5n)^2 = 36$, což nastane pro jediné celé číslo $n = 2$, kterému odpovídá $x = 5 \cdot 2 - 2 = 8$. Je-li $y = \pm 3$, přejde (2) v rovnici $(9 - 5n)^2 = 16$ s jediným celočíselným kořenem $n = 1$, kterému odpovídá $x = 5 \cdot 1 - 2 = 3$. Podmínku $y = 5k \pm 2$ tedy splňují právě čtyři řešení (x, y) dané rovnice: dvojice $(8, 2)$, $(8, -2)$, $(3, 3)$ a $(3, -3)$.

Odpověď. Daná rovnice má v oboru celých čísel celkem šest řešení (x, y): dvojice $(52, 6)$, $(52, -6)$, $(8, 2)$, $(8, -2)$, $(3, 3)$ a $(3, -3)$.[1]

---

[1] Doporučujeme provést zkoušku, i když není nutnou součástí takto podaného řešení.

Poznámka. Pro každé celé z je číslo z_5 rovno jednomu z čísel $z-2$, $z-1$, z, $z+1$ nebo $z+2$ (tomu z nich, které je násobkem pěti). Danou úlohu by bylo možné proto řešit tak, že bychom danou rovnici posoudili v jednotlivých případech $x = 5n+r$ a $y = 5k+q$, kde čísla r a q probíhají (navzájem nezávisle) množinu $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Taková diskuse by ovšem byla zdlouhavá, výše podané řešení je jejím promyšleným zkrácením.

Uvědomme si, že při našem postupu jsme nejdříve vyloučili případ $q = 0$ a poté jsme již rozlišili pouze případy $q = \pm 1$ a $q = \pm 2$. Bylo to umožněno tím, že číslo y^2 má při dělení pěti zbytek nezávislý na znaménku čísla q a že podle tohoto zbytku lze z dané rovnice jednoznačně určit obdobný zbytek čísla x, tedy hodnotu r.

Poslední „trik", který jsme při řešení uplatnili, spočíval v tom, že jsme do dané rovnice nedosazovali vyjádření $y = 5k \pm 1$ resp. $y = 5k \pm \pm 2$, čímž se nám poněkud zjednodušil zápis příslušných rovnic (1) a (2). Dodejme ještě, že algebraické úpravy dané rovnice vedoucí k rovnicím (1) a (2) patří při řešení rovnic v oboru celých čísel k těm nejobvyklejším postupům.

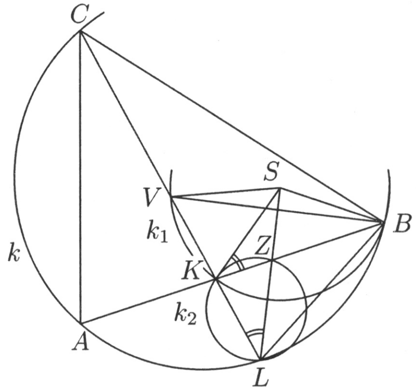
A – I – 3

Kružnice opsané trojúhelníkům ABC, KBV a KLZ označme po řadě k, k_1 a k_2 (obr. 22). Naší úlohou je dokázat, že přímka SK je tečnou kružnice k_2; k tomu stačí vysvětlit, proč jsou shodné úhly SKZ a KLZ, vyznačené na obr. 22 obloučky. Kromě toho ovšem musíme zdůvodnit, proč body L a S vždy leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou AB (jak je tomu v případě našeho obrázku).

Střed V kružnice vepsané je vždy vnitřním bodem trojúhelníku ABC, neboť je průsečíkem os jeho vnitřních úhlů. Proto je bod V vnitřním bodem úsečky CK, zatímco bod L leží na jejím prodloužení za bod K. Body V a L proto leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou AB. Označíme-li jako obvykle α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, má trojúhelník BCV u vrcholů B a C vnitřní úhly velikostí $\frac{1}{2}\beta$ a $\frac{1}{2}\gamma$, takže pro jeho vnější úhel při vrcholu V platí

$$|\sphericalangle BVK| = \frac{\beta+\gamma}{2} < 90^\circ.$$

Úhel BVK je tudíž ostrý, a proto střed S kružnice k_1 leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou BK jako bod V, což spolu s předchozím tvrzením o poloze bodů V a L znamená, že body L a S skutečně leží



Obr. 22

v opačných polorovinách s hraniční přímkou AB, jak jsme potřebovali ověřit. Podle věty o obvodových a středových úhlech v kružnici k_1 platí

$$|\sphericalangle BSK| = 2|\sphericalangle BVK| = \beta + \gamma,$$

z rovnoramenného trojúhelníku BKS tudíž plyne

$$|\sphericalangle SKZ| = |\sphericalangle SKB| = \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle BSK|) = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta - \gamma) = \frac{1}{2}\alpha.$$

Zbývá nám proto dokázat, že také úhel KLZ má velikost $\frac{1}{2}\alpha$. Provedeme to dvěma nezávislými postupy.

Při prvním z nich nejprve určíme velikost úhlu LBV. Protože $|\sphericalangle LBA| = |\sphericalangle LCA| = \frac{1}{2}\gamma$ (obvodové úhly v kružnici k) a $|\sphericalangle ABV| = \frac{1}{2}\beta$, vzhledem k vzájemné poloze úseček LV a AB můžeme psát

$$|\sphericalangle LBV| = |\sphericalangle LBA| + |\sphericalangle ABV| = \frac{1}{2}(\beta + \gamma).$$

Již dříve jsme zjistili, že takovou velikost má i úhel BVK (neboli úhel BVL), a tak je trojúhelník BVL rovnoramenný: $|BL| = |VL|$. Zároveň ovšem platí $|BS| = |VS|$, takže oba body L a S leží na ose úsečky BV (čtyřúhelník $BLVS$ je tedy deltoid, případně kosočtverec nebo čtverec). Odtud plyne, že úsečky BV a SL jsou navzájem kolmé, úhel KLZ je proto doplňkový k úhlu BVK:

$$|\sphericalangle KLZ| = 90^\circ - |\sphericalangle BVK| = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) = \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Při druhém způsobu určení velikosti úhlu KLZ si nejdříve všimneme, že platí $|\sphericalangle BLK| = |\sphericalangle BLC| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$ (obvodové úhly v kružnici k), což spolu s dříve odvozenou rovností $|\sphericalangle BSK| = \beta + \gamma$ znamená, že ve čtyřúhelníku $BLKS$ je součet vnitřních úhlů u protějších vrcholů L a S roven $180°$, jedná se proto o čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici. V ní jsou KBS a KLS shodné obvodové úhly nad tětivou KS, a proto platí

$$|\sphericalangle KLZ| = |\sphericalangle KLS| = |\sphericalangle KBS| = \tfrac{1}{2}\alpha$$

(připomínáme, že BKS je rovnoramenný trojúhelník s úhly $\frac{1}{2}\alpha$ při základně BK).

A – I – 4

Protože daná soustava je velmi složitá a patrně neexistuje postup, jak v konečném algebraickém tvaru vyjádřit všechna její řešení, budeme jednak přemýšlet o podmínkách řešitelnosti této soustavy, jednak hledat některá její speciální řešení.

Všimněme si nejdříve, že daná soustava nemá žádné řešení pro hodnotu $p = 0$, protože hodnoty levých stran rovnic jsou kladná čísla. Také druhé zjištění, které nyní uvedeme, je zřejmé: n-tice čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je řešením dané soustavy s hodnotou parametru p, právě když n-tice opačných čísel $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ je řešením dané soustavy s opačnou hodnotou parametru $-p$. Hodnoty levých i pravých stran všech rovnic soustavy se totiž při změně všech hodnot $x_i \mapsto -x_i$ a $p \mapsto -p$ nezmění, protože pro libovolná $x \neq 0$ a p platí

$$(-x)^4 + \frac{2}{(-x)^2} = x^4 + \frac{2}{x^2} \quad \text{a} \quad (-p)(-x) = px.$$

Daná soustava s hodnotou parametru p má tedy právě tolik řešení, kolik jich má daná soustava s hodnotou parametru $-p$. Budeme proto hledat pouze všechna *kladná* čísla p, pro která má daná soustava aspoň dvě řešení (a v odpovědi k nim připojíme všechna opačná čísla $-p$.)

Až do závěru řešení budeme tedy uvažovat jen kladné hodnoty parametru p dané soustavy. Z kladnosti jejích levých stran plyne, že také všechny pravé strany px_i musí být kladné, a proto (s ohledem na předpoklad $p > 0$) musí platit $x_i > 0$ pro každé i. Libovolné řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dané soustavy je tedy sestaveno z n kladných čísel.

Předpokládejme nyní, že pro dané $p > 0$ nějaké řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dané soustavy existuje, a všech n rovnic mezi sebou vynásobme. Pro kladná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ tak dostaneme rovnost

$$\left(x_1^4 + \frac{2}{x_1^2}\right)\left(x_2^4 + \frac{2}{x_2^2}\right)\dots\left(x_n^4 + \frac{2}{x_n^2}\right) = p^n x_1 x_2 \dots x_n. \tag{1}$$

Každý činitel na levé straně odhadneme zdola podle známé nerovnosti

$$u + v \geqq 2\sqrt{uv},$$

která platí pro libovolná kladná čísla u a v, přičemž rovnost nastane, právě když $u = v$ (je to v podstatě nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem čísel u a v, plynoucí snadno ze zřejmé nerovnosti $(\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 \geqq 0$). Proto pro každý index i platí

$$x_i^4 + \frac{2}{x_i^2} \geqq 2\sqrt{x_i^4 \cdot \frac{2}{x_i^2}} = |x_i| \cdot 2\sqrt{2} = x_i \cdot 2\sqrt{2}. \tag{2}$$

Důsledkem rovnosti (1) je tudíž nerovnost

$$\left(x_1 2\sqrt{2}\right)\left(x_2 2\sqrt{2}\right)\dots\left(x_n 2\sqrt{2}\right) \leqq p^n x_1 x_2 \dots x_n, \tag{3}$$

ze které po krácení (kladným) součinem $x_1 x_2 \dots x_n$ dostaneme podmínku na číslo p ve tvaru

$$p^n \geqq (2\sqrt{2})^n, \quad \text{neboli} \quad p \geqq 2\sqrt{2}.$$

Zformulujme, co jsme právě zjistili: *má-li daná soustava pro pevné $p > 0$ alespoň jedno řešení, pak pro toto číslo p platí odhad $p \geqq 2\sqrt{2}$.*

Pro „krajní" hodnotu $p = 2\sqrt{2}$ nyní danou soustavu úplně vyřešíme, tj. najdeme *všechna* její řešení. Je-li $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ libovolné řešení dané soustavy s hodnotou $p = 2\sqrt{2}$, pak podle úvah z předchozího odstavce nastane v nerovnosti (3) rovnost, což je možné jedině tak, že rovnosti nastanou ve všech násobených nerovnostech (2). Proto tehdy pro každý index i platí

$$x_i^4 = \frac{2}{x_i^2}, \quad \text{neboli} \quad x_i^6 = 2, \quad \text{tj.} \quad x_i = \sqrt[6]{2}.$$

Pro hodnotu $p = 2\sqrt{2}$ má tedy daná soustava jediné (!) řešení

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sqrt[6]{2}, \sqrt[6]{2}, \dots, \sqrt[6]{2}\right).$$

Z výsledků předchozích dvou odstavců plyne: *má-li daná soustava pro pevné $p > 0$ alespoň dvě řešení, pak pro toto číslo p platí ostrá nerovnost* $p > 2\sqrt{2}$. Najdeme-li proto dvě řešení dané soustavy s libovolnou hodnotou parametru $p > 2\sqrt{2}$, budeme znát odpověď na otázku ze zadání úlohy. Zmíněná dvě řešení budeme hledat mezi n-ticemi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ složenými z n stejných čísel; taková n-tice $(x, x, \ldots, x)$ je zřejmě řešením dané soustavy, právě když je číslo x řešením (jediné) rovnice

$$x^4 + \frac{2}{x^2} = px, \qquad \text{neboli} \quad x^6 - px^3 + 2 = 0.$$

Poslední rovnice je kvadratická vzhledem k neznámé $y = x^3$ a má v oboru reálných čísel y dvě různá řešení

$$y_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 8}}{2}$$

pro každou z námi uvažovaných hodnot $p > 2\sqrt{2}$, neboť pro ně platí $p^2 - 8 > 0$. Pro každé takové p má tedy původní soustava dvě řešení

$$(x_1, \ldots, x_n) = (\sqrt[3]{y_1}, \ldots, \sqrt[3]{y_1}) \quad \text{a} \quad (x_1, \ldots, x_n) = (\sqrt[3]{y_2}, \ldots, \sqrt[3]{y_2}).$$

(Nevylučujeme, že kromě těchto řešení tehdy existují i řešení jiná, totiž taková, že $x_i \neq x_j$ pro některá $i \neq j$.)

Odpověď. Všechny hledané hodnoty p tvoří množinu $\left(-\infty; -2\sqrt{2}\right) \cup \cup \left(2\sqrt{2}; \infty\right)$.

A – I – 5

Dvěma odlišnými postupy ukážeme, že vyhovující mnohočleny jsou právě mnohočleny tvaru $P(x) = ax^3 - ax + d$, kde a a d jsou libovolná reálná čísla. Při prvním postupu uplatníme metodu, která je užitečná i při řešení mnoha jiných úloh o mnohočlenech; říká se jí *metoda neurčitých koeficientů.* Jako obvykle budeme členy mnohočlenů zapisovat v sestupném pořadí podle mocnin proměnné x; pomocí prvních koeficientů hledaného mnohočlenu

$$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + \ldots \tag{1}$$

vyjádříme první koeficienty obou stran dané rovnice a pak je porovnáme. Zápisem (1) jsme naznačili, že budeme skutečně počítat s prvními *čtyřmi* koeficienty mnohočlenu $P(x)$. Ukáže se totiž, že výpočty s *menším počtem* koeficientů k vyřešení úlohy nestačí. Abychom pro mnohočleny stupně nejvýše 3 nemuseli provádět další samostatné výpočty, nebudeme prozatím předpokládat, že koeficient a u mocniny x^n v zápisu (1) je různý od nuly.

Najdeme nejdříve první členy mnohočlenu $P(x-1)$:

$$\begin{aligned}
P(x-1) &= a(x-1)^n + b(x-1)^{n-1} + c(x-1)^{n-2} + d(x-1)^{n-3} + \ldots = \\
&= a\bigl(x^n - \tbinom{n}{1}x^{n-1} + \tbinom{n}{2}x^{n-2} - \tbinom{n}{3}x^{n-3} + \ldots\bigr) + \\
&\quad + b\bigl(x^{n-1} - \tbinom{n-1}{1}x^{n-2} + \tbinom{n-1}{2}x^{n-3} - \ldots\bigr) + \\
&\quad + c\bigl(x^{n-2} - \tbinom{n-2}{1}x^{n-3} + \ldots\bigr) + d\bigl(x^{n-3} - \ldots\bigr) + \ldots = \\
&= ax^n + \bigl[-\tbinom{n}{1}a + b\bigr]x^{n-1} + \bigl[\tbinom{n}{2}a - \tbinom{n-1}{1}b + c\bigr]x^{n-2} + \\
&\quad + \bigl[-\tbinom{n}{3}a + \tbinom{n-1}{2}b - \tbinom{n-2}{1}c + d\bigr]x^{n-3} + \ldots
\end{aligned}$$

Obdobným výpočtem zjistíme, že

$$\begin{aligned}
P(x+1) &= ax^n + \bigl[\tbinom{n}{1}a + b\bigr]x^{n-1} + \bigl[\tbinom{n}{2}a + \tbinom{n-1}{1}b + c\bigr]x^{n-2} + \\
&\quad + \bigl[\tbinom{n}{3}a + \tbinom{n-1}{2}b + \tbinom{n-2}{1}c + d\bigr]x^{n-3} + \ldots
\end{aligned}$$

Nyní můžeme určit první členy mnohočlenu $(x+1)P(x-1)+(x-1)P(x+1)$, totiž členy s mocninami x^{n+1}, x^n, x^{n-1} a x^{n-2} (vypsali jsme je předem, abychom při následujícím výpočtu zbytečně nevypisovali členy s nižšími mocninami x):

$$\begin{aligned}
&(x+1)P(x-1) + (x-1)P(x+1) = \\
&= xP(x-1) + P(x-1) + xP(x+1) - P(x+1) = \\
&= ax^{n+1} + \bigl[-\tbinom{n}{1}a + b\bigr]x^n + \bigl[\tbinom{n}{2}a - \tbinom{n-1}{1}b + c\bigr]x^{n-1} + \\
&\quad + \bigl[-\tbinom{n}{3}a + \tbinom{n-1}{2}b - \tbinom{n-2}{1}c + d\bigr]x^{n-2} + \ldots + \\
&\quad + ax^n + \bigl[-\tbinom{n}{1}a + b\bigr]x^{n-1} + \bigl[\tbinom{n}{2}a - \tbinom{n-1}{1}b + c\bigr]x^{n-2} + \ldots + \\
&\quad + ax^{n+1} + \bigl[\tbinom{n}{1}a + b\bigr]x^n + \bigl[\tbinom{n}{2}a + \tbinom{n-1}{1}b + c\bigr]x^{n-1} + \\
&\quad + \bigl[\tbinom{n}{3}a + \tbinom{n-1}{2}b + \tbinom{n-2}{1}c + d\bigr]x^{n-2} + \ldots - \\
&\quad - ax^n - \bigl[\tbinom{n}{1}a + b\bigr]x^{n-1} - \bigl[\tbinom{n}{2}a + \tbinom{n-1}{1}b + c\bigr]x^{n-2} - \ldots = \\
&= 2ax^{n+1} + 2bx^n + \bigl[2\tbinom{n}{2}a - 2\tbinom{n}{1}a + 2c\bigr]x^{n-1} + \\
&\quad + \bigl[2\tbinom{n-1}{2}b - 2\tbinom{n-1}{1}b + 2d\bigr]x^{n-2} + \ldots
\end{aligned}$$

Našli jsme první členy levé strany dané rovnice. Vypsat první členy její pravé strany je snadné:

$$2xP(x) = 2ax^{n+1} + 2bx^n + 2cx^{n-1} + 2dx^{n-2} + \ldots.$$

Vidíme, že první dva členové levé strany se shodují s prvními dvěma členy pravé strany, ať je mnohočlen $P(x)$ vybrán jakkoliv. Třetí a čtvrté členy se již obecně neshodují a jejich rovnosti jsou vyjádřeny podmínkami

$$2\binom{n}{2}a - 2\binom{n}{1}a + 2c = 2c \quad \text{a} \quad 2\binom{n-1}{2}b - 2\binom{n-1}{1}b + 2d = 2d,$$

ze kterých po rozepsání kombinačních čísel dostaneme rovnice tvaru $n(n-3)a = 0$ a $(n-1)(n-4)b = 0$.[2] V případě $n > 3$ tedy musí platit $a = 0$, což znamená, že se můžeme omezit pouze na případ $n = 3$. Tehdy je první rovnice splněna pro každé $a \in \mathbb{R}$, zatímco z druhé rovnice pak plyne $b = 0$. Hledaný mnohočlen $P(x)$ je proto nutně tvaru

$$P(x) = ax^3 + cx + d \tag{2}$$

a po dosazení libovolného takového mnohočlenu do obou stran dané rovnice dostaneme dva mnohočleny, které se shodují v prvních členech s mocninami x^4, x^3, x^2 a x^1. Zbývá tedy porovnat poslední (absolutní) členy obou mnohočlenů

$$(x+1)P(x-1) + (x-1)P(x+1) \quad \text{a} \quad 2xP(x).$$

Místo algebraického výpočtu využijeme obvyklý obrat, který je založen na tomto zřejmém tvrzení: *absolutní člen mnohočlenu p je jeho hodnota $p(0)$ v bodě* 0. V našem případě proto zjistíme, kdy platí rovnost $P(-1) - P(1) = 0 \cdot P(0)$, tedy podle (2)

$$(-a - c + d) - (a + c + d) = 0.$$

Je to zřejmě právě tehdy, když $c = -a$. Proto jsou řešeními úlohy právě mnohočleny tvaru $P(x) = ax^3 - ax + d$, kde a, d jsou libovolná reálná čísla.

Jiné řešení. Využijeme postup, který se používá při řešení funkcionálních rovnic. Získáváme při něm významné informace o neznámých funkcích tak, že do rovnic, které hledané funkce splňují, opakovaně *dosazujeme vhodně vybrané hodnoty* proměnných.[3] Nechť je tedy P libovolný

---

[2] Všimněte si, že rovnice pro koeficient b se liší od rovnice pro koeficient a pouze tím, že je v ní číslo n zaměněno číslem $n-1$. Koeficient b totiž převezme roli „vedoucího" koeficientu a, když v zápise (1) vynecháme první člen součtu (čímž snížíme stupeň n o jedničku).

[3] To jsme ostatně učinili již v závěru „algebraického" řešení, kdy k určení absolutního členu jsme do mnohočlenu dosadili hodnotu $x = 0$.

mnohočlen splňující v proměnné $x \in \mathbb{R}$ danou rovnici. Dosadíme-li do ní nejprve hodnotu $x = 1$ a pak hodnotu $x = -1$, dostaneme rovnosti

$$2 \cdot P(0) + 0 \cdot P(2) = 2 \cdot P(1) \quad \text{a} \quad 0 \cdot P(-2) - 2 \cdot P(0) = -2 \cdot P(-1),$$

ze kterých plyne, že $P(1) = P(0) = P(-1)$. Označíme-li proto $P(0) = d$, má rovnice $P(x) = d$ kořeny $x = 0$, $x = 1$ a $x = -1$. Existuje tudíž mnohočlen $Q(x)$ takový, že $P(x) = x(x-1)(x+1)Q(x)+d$. Toto vyjádření dosadíme do dané rovnice, abychom zjistili, jaké podmínky musí splňovat mnohočlen $Q(x)$ a koeficient d:

$$\begin{aligned}(x+1)x(x-1)(x-2)Q(x-1) + d(x+1) &+ \\ +(x-1)(x+1)x(x+2)Q(x+1) + d(x-1) &= \\ = 2x^2(x-1)(x+1)Q(x) + 2dx.&\end{aligned}$$

Členy s koeficientem d se v poslední rovnici navzájem zruší a zbylé členy je možné zkrátit společným činitelem $x(x-1)(x+1)$. Získáme tak rovnici

$$(x-2)Q(x-1) + (x+2)Q(x+1) = 2xQ(x) \tag{3}$$

pro neznámý mnohočlen $Q(x)$. Ze způsobu odvození plyne, že rovnice (3) platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, které je různé od 0, 1 a -1; protože však obě strany (3) jsou mnohočleny proměnné x, které mají stejnou hodnotu pro nekonečně mnoho čísel x, musí jít o mnohočleny totožné, a proto rovnost (3) platí i pro $x \in \{0, 1, -1\}$.

Protože $a(x-2)+a(x+2) = 2ax$, rovnici (3) splňuje každý konstantní mnohočlen $Q(x) = a$. Původní rovnici proto vyhovuje každý mnohočlen

$$P(x) = x(x-1)(x+1)a + d = ax^3 - ax + d \quad (a, d \in \mathbb{R}).$$

Jiné vyhovující mnohočleny $P(x)$ neexistují, pokud ukážeme, že *každý mnohočlen $Q(x)$ splňující rovnici* (3) *je konstantní*. Nechť je tedy $Q(x)$ libovolný takový mnohočlen; označme $Q(2) = a$ a dosaďme do rovnice (3) hodnotu $x = 2$. Dostaneme

$$0 \cdot Q(1) + 4Q(3) = 4Q(2), \quad \text{odkud} \quad Q(3) = Q(2) = a.$$

Nyní volbou $x = 3$ v rovnici (3) získáme rovnost

$$Q(2) + 5Q(4) = 6Q(3), \quad \text{odkud} \quad Q(4) = \frac{6Q(3) - Q(2)}{5} = \frac{6a - a}{5} = a.$$

Dále volbou $x = 4$ zjistíme, že $Q(5) = a$, atd. Dokažme proto indukcí, že $Q(n) = a$ pro každé celé $n \geqq 2$. Platí-li pro nějaké n rovnosti $Q(n) = Q(n+1) = a$ (jak je tomu pro $n = 2$), pak volbou $x = n+1$ v rovnici (3) dostaneme

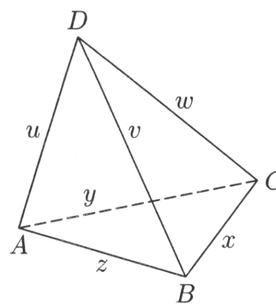
$$Q(n+2) = \frac{2(n+1)Q(n+1) - (n-1)Q(n)}{n+3} = \frac{2(n+1)a - (n-1)a}{n+3} = a.$$

Důkaz indukcí je hotov. Zjistili jsme, že rovnost $Q(x) = a$ platí pro nekonečně mnoho čísel x, což je možné, jedině když $Q(x) = a$ pro každé x (kdyby byl Q mnohočlen některého stupně $N > 0$, měla by rovnice $Q(x) = a$ nejvýše N kořenů). Celé řešení je tím ukončeno.

A – I – 6

V první (podstatnější) části řešení najdeme všechny čtyřstěny, které mají síť tvaru deltoidu; poté již poměrně snadno zjistíme, které z nalezených čtyřstěnů mají právě čtyři shodné hrany.

Uvažujme proto libovolný čtyřstěn $ABCD$ a popišme délky jeho hran písmeny x, y, z, u, v, w podle obr. 23. Všechny sítě čtyřstěnu $ABCD$ rozdělíme do dvou skupin. Do první z nich zařadíme ty sítě, v nichž některá stěna čtyřstěnu sousedí s třemi ostatními stěnami; do druhé skupiny budou patřit ostatní sítě, v nichž každá stěna sousedí s nejvýše dvěma stěnami. Protože jsme označení vrcholů čtyřstěnu předem nijak neupřesnili, budeme dále uvažovat jen po jedné síti z každé z obou skupin, totiž sítě znázorněné na obr. 24 a 25. Zabývejme se každou z nich samostatně.

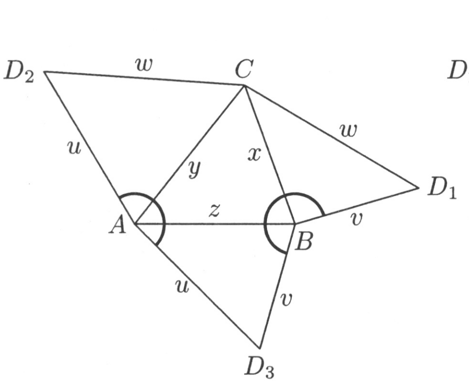


Obr. 23

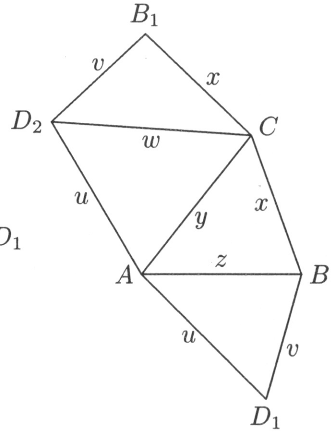
Síť na obr. 24 je (obecně vzato) šestiúhelníkem $AD_3BD_1CD_2$, o čtyřúhelník půjde jedině tehdy, když dva z jeho úhlů u vrcholů A, B, C budou přímé (tj. budou mít velikost 180°). Je totiž jasné, že přímý úhel nemůže být u žádného z vrcholů D_1, D_2, D_3. S ohledem na již zmíněnou libovůli značení předpokládejme, že přímé jsou úhly D_2AD_3 a D_3BD_1 (vyznačené na obr. 24). Naše síť je tehdy čtyřúhelníkem $D_2D_3D_1C$, jehož strany mají (v pořadí, v jakém za sebou cyklicky následují) délky $2u$, $2v$,

w a w. Je-li tento čtyřúhelník deltoid (a ne kosočtverec), musí zřejmě platit $u = v$ a $2u \neq w$ (obr. 26a). Z osové souměrnosti podle přímky D_3C pak zjišťujeme, že platí $y = x$; čtyřstěn s „deltoidní“ sítí z obr. 26a vidíte na obr. 26b. Je to čtyřstěn souměrný podle roviny souměrnosti hrany AB. Dodejme, že kromě nerovnosti $2u \neq w$ musí platit rovněž nerovnost $z < w$, která plyne z vlastnosti střední příčky AB trojúhelníku $D_1D_2D_3$ a trojúhelníkové nerovnosti pro rovnoramenný trojúhelník CD_1D_2:

$$2z = 2|AB| = |D_1D_2| < |D_1C| + |D_2C| = 2w.$$



Obr. 24



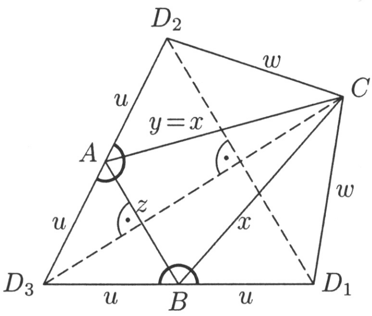
Obr. 25

Síť z obr. 25 je (obecně vzato) šestiúhelníkem $AD_1BCB_1D_2$, o čtyřúhelník půjde jen v těch případech, kdy právě dva z jeho úhlů při vrcholech A, B, C, D_2 budou přímé (takové totiž nemohou být úhly při vrcholech D_1 a B_1). S ohledem na libovůli značení stačí uvažovat jen tři následující případy.

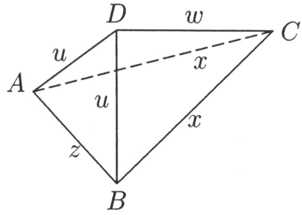
a) *Přímé úhly u vrcholů A a D_2.* Síť je čtyřúhelník B_1D_1BC, jehož strany mají v pořadí délky $2u + v$, v, x, x. Zřejmě nejde o deltoid, neboť $2u + v \neq v$.

b) *Přímé úhly u vrcholů A a C.* Síť je čtyřúhelník $D_2D_1BB_1$, jehož strany mají v pořadí délky $2u$, v, $2x$, v. Protože dvojice protějších stran má tutéž délku v, nejde o deltoid.

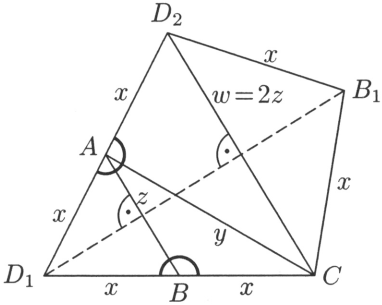
c) *Přímé úhly u vrcholů A a B.* Síť je čtyřúhelník $D_2D_1CB_1$, jehož strany mají v pořadí délky $2u$, $x + v$, x, v. Jde-li o deltoid, pak s ohledem na



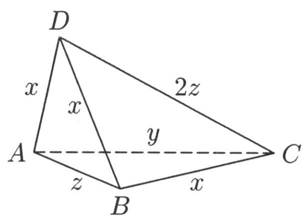
Obr. 26a



Obr. 26b



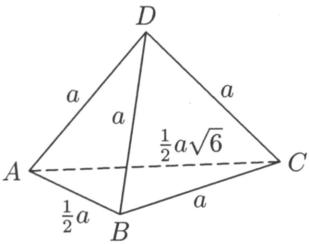
Obr. 27a



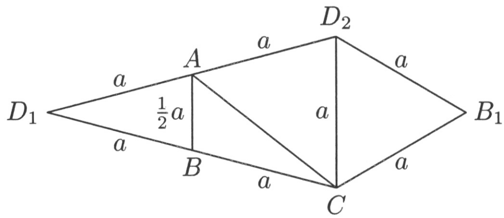
Obr. 27b

nerovnost $x + v > x$ musí platit $2u = x + v$ a $x = v$, tedy $x = u = v$. V trojúhelníku D_2D_1C je úsečka AB střední příčkou (obr. 27a), takže platí $w = |D_2C| = 2|AB| = 2z$. Příslušný čtyřstěn vidíte na obr. 27b.

Shrňme výsledky našich dosavadních úvah: Pouze dva typy čtyřstěnů (obr. 26b a 27b) mají síť tvaru deltoidu. Naším úkolem je nyní zjistit, kdy tyto čtyřstěny mají právě čtyři shodné hrany (dané délky a). Zabývejme se nejdříve čtyřstěnem z obr. 26b, jehož hrany mají délky x, x, z, u, u, w. Předpokládejme tedy, že právě čtyři z nich jsou rovny a, které to jsou? Předně musí platit $x = a$, jinak by muselo platit $a = z = u = w$, což je ale ve sporu s nerovností $z < w$, odvozenou výše. Protože jsou vyloučeny i rovnosti $z = u$ a $u = w$ (v obou případech by délku a mělo *pět* hran čtyřstěnu $ABCD$), musí platit $u = a$. V případě $x = u$ je ovšem čtyřúhelník AD_3BC kosočtverec; z rovnoběžnosti přímek AC a D_3B plyne rovnost souhlasných úhlů CAD_2 a BD_3A. Rovnoramenné trojúhelníky CAD_2 a BD_3A jsou tehdy shodné podle věty *sus*, takže $|D_2C| = |AB|$, neboli $z = w$, což je opět spor.[4] *Žádný čtyřstěn z obr. 26b proto není řešením naší úlohy.* Přejděme nyní k druhému typu čtyřstěnů a předpokládejme, že právě čtyři z hran některého čtyřstěnu $ABCD$ z obr. 27b mají délku a. Protože tři jeho hrany mají délku x, musí platit $x = a$; která (jediná) z ostatních délek y, z, $2z$ je rovna a? V síti na obr. 27a z trojúhelníku B_1CD_2 plyne $x + x > 2z$, tedy $x > z$. V téže síti má trojúhelník ABC tupý vnitřní úhel u vrcholu B, neboť jeho vnější úhel ABD_1 je vnitřním úhlem při základně AB rovnoramenného trojúhelníku ABD_1, takže je nutně ostrý. Proto je nejdelší stranou trojúhelníku ABC strana AC, což zapíšeme takto: $y > \max\{x, z\}$. Dohromady dostáváme $y > x > z$, s ohledem na rovnost $x = a$ proto nezbývá, než aby platilo $2z = a$. Nalezenými podmínkami je již čtyřstěn $ABCD$ jednoznačně (až na shodnost) určen. Délku y poslední hrany AC vypočteme jako těžnici ke straně D_1D_2 trojúhelníku CD_1D_2 o stranách $2a$, $2a$, a. Vyjde nám $y = \frac{1}{2}a\sqrt{6}$. *Řešením naší úlohy je jediný čtyřstěn z obr. 28a, jeho síť tvaru deltoidu je na obr. 28b.*



Obr. 28a



Obr. 28b

Odpověď. Hledaný čtyřstěn je jediný: jeho tři hrany délky a vycházejí z jednoho vrcholu, hrany protilehlé stěny mají délku a, $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a\sqrt{6}$. Jedna ze sítí tohoto čtyřstěnu má tvar deltoidu o stranách a, a, $2a$, $2a$.[5]

A – S – 1

Podle zbytku při dělení čísla x číslem 5 můžeme rozlišit pět případů: (i) $x = 5k$, (ii) $x = 5k+1$, (iii) $x = 5k+2$, (iv) $x = 5k+3$ a (v) $x = 5k+4$

[4] V případě $w = z$ má „deltoidní" síť z obr. 26a přímý úhel u vrcholu C, takže nejde o deltoid, ale o trojúhelník.

[5] Doporučujeme řešitelům, aby takový deltoid vystřihli z papíru a pak model čtyřstěnu složili.

(k značí libovolné celé číslo). Protože ale levá strana rovnice je zřejmě násobkem pěti pro každé celé x, musí být násobkem pěti aspoň jeden z činitelů $3x-2$, $x+2$ pravé strany. Číslo $3x-2$ je dělitelné pěti pouze pro $x=5k+4$, číslo $x+2$ pouze pro $x=5k+3$. Proto stačí rozebrat případy (iv) a (v) (L značí levou a P pravou stranu dané rovnice):

(iv) Pro $x=5k+3$ platí $x^2=25k^2+30k+9$, $(x^2)_5=25k^2+30k+10$, $3x=15k+9$, $(3x)_5=15k+10$, $L=75k^2+105k+40$ a $P=75k^2+$ $+110k+35$, takže z $L=P$ vychází $k=1$, čemuž odpovídá $x=5+3=8$.

(v) Pro $x=5k+4$ platí $x^2=25k^2+40k+16$, $(x^2)_5=25k^2+$ $+40k+15$, $3x=15k+12$, $(3x)_5=15k+10$, $L=75k^2+135k+55$ a $P=75k^2+140k+60$, takže z $L=P$ vychází $k=-1$, čemuž odpovídá $x=-5+4=-1$.

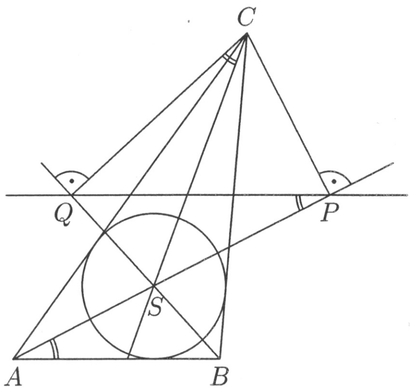
Odpověď: Daná rovnice má právě dvě celočíselná řešení, a to $x=-1$ a $x=8$.

A – S – 2

Označme jako obvykle α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníku ABC. Protože platí (obr. 29)

$$|\sphericalangle ASC| = 180^\circ - |\sphericalangle SAC| - |\sphericalangle SCA| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\beta}{2},$$

je úhel ASC tupý, takže bod P leží na polopřímce opačné k polopřímce SA. Obdobně zdůvodníme, že bod Q leží na polopřímce opačné k polopřímce SB. Přímky AB a PQ jsou rovnoběžné, právě když střídavé



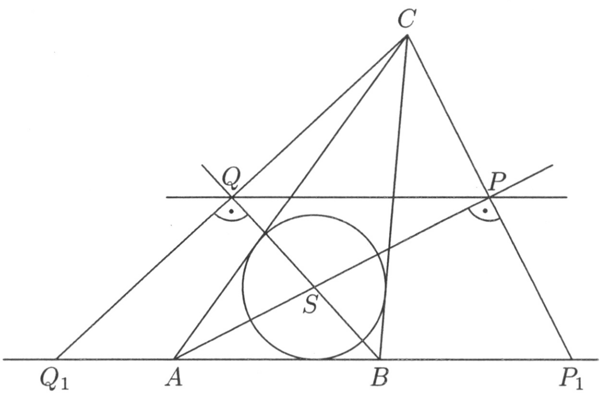
Obr. 29

úhly BAP a APQ jsou shodné. Vzhledem k tomu, že $|\sphericalangle BAP| = \dfrac{\alpha}{2}$ a $|\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle SPQ|$, stačí ukázat, že $|\sphericalangle SPQ| = \dfrac{\alpha}{2}$. Protože body P a Q leží na Thaletově kružnici nad průměrem CS, je úhel SPQ shodný s úhlem SCQ (obvodové úhly nad tětivou SQ zmíněné kružnice). Velikost úhlu SCQ snadno vyjádříme z trojúhelníků BCS a BCQ:

$$|\sphericalangle SCQ| = |\sphericalangle BCQ| - |\sphericalangle BCS| = \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

což jsme potřebovali ukázat.

Jiné řešení. Označme P_1, Q_1 odpovídající průsečíky polopřímek CP a CQ s přímkou AB (obr. 30, pořadí bodů A, S, P a bodů B, S, Q na obou osách bylo vysvětleno v prvním řešení). Výška AP trojúhelníku P_1CA leží na ose AS jeho vnitřního úhlu P_1AC, takže jde o rovnoramenný trojúhelník, který má základnu P_1C se středem P. Obdobně pomocí rovnoramenného trojúhelníku Q_1CB zdůvodníme, že bod Q je středem úsečky Q_1C. Úsečka PQ je tedy střední příčkou trojúhelníku P_1Q_1C, takže je rovnoběžná s přímkou AB.



Obr. 30

A – S – 3

Všimněme si, že rovnice dané soustavy se mezi sebou liší jen cyklickou záměnou neznámých x, y a z. Má-li proto soustava za řešení trojici čísel $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$, jsou jejími řešeními rovněž trojice $(x, y, z) = (y_0, z_0, x_0)$ a trojice $(x, y, z) = (z_0, x_0, y_0)$. Je-li řešení soustavy (při pevném p) jediné, musí být uvedené trojice shodné, musí tedy platit $x_0 = y_0 = z_0$. Trojice (x_0, x_0, x_0) je zřejmě řešení dané soustavy, právě když je číslo $x = x_0$ řešením rovnice $x^2 + 1 = 2px$. Pro každé hledané p proto musí mít poslední rovnice jediné řešení, takže její diskriminant $D = 4p^2 - 4$ musí být nulový. Odtud vychází, že nutně $p = \pm 1$.

Nyní ukážeme, že pro $p = 1$ je $x = y = z = 1$ skutečně jediné řešení původní soustavy tří rovnic a že totéž platí i v případě $p = -1$ o jejím řešení $x = y = z = -1$. Porovnáme-li součet levých stran se součtem pravých stran soustavy, zjistíme, že její libovolné řešení (x, y, z) splňuje též rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 2p(x + y + z),$$

ze které úpravou dostaneme

$$(x - p)^2 + (y - p)^2 + (z - p)^2 = 3(p^2 - 1). \tag{1}$$

Pro obě hodnoty $p = \pm 1$ platí ovšem $p^2 - 1 = 0$, takže tehdy se součet nezáporných čísel $(x - p)^2$, $(y - p)^2$ a $(z - p)^2$ rovná nule. To je možné, jedině když $x = y = z = p$.

Odpověď: Hledané hodnoty p jsou dvě: $p = 1$ a $p = -1$.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešením získáme sečtením tří daných rovnic rovnici (1). Z ní vyplývá tento závěr: má-li soustava při daném p aspoň jedno řešení (x, y, z) v oboru reálných čísel, pak platí nerovnost $p^2 \geqq 1$, neboli $|p| \geqq 1$. Je-li ovšem $|p| > 1$, můžeme snadno vypsat dvě různá řešení zkoumané soustavy, totiž trojice (x_1, x_1, x_1) a (x_2, x_2, x_2), kde $x_{1,2}$ jsou kořeny rovnice $x^2 + 1 = 2px$ (jejíž diskriminant je díky předpokladu $|p| > 1$ kladný). Proto nám zbývá posoudit pouze hodnoty $p = \pm 1$, pro které však z rovnice (1) okamžitě plyne: má-li původní soustava vůbec nějaké řešení, je jím trojice $(x, y, z) = (p, p, p)$. Triviální zkouška dosazením ukazuje, že jde skutečně o řešení (pro $p = 1$ jakož i pro $p = -1$).

A – II – 1

Protože pro libovolná $\alpha, \beta \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\pi \right)$ platí

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \leqq \frac{1}{\cos \alpha \cos \beta}, \tag{1}$$

stačí místo nerovnosti ze zadání úlohy dokázat nerovnost

$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}}. \tag{2}$$

To je ale snadné, neboť po převedení odmocniny z pravé strany na levou dostaneme po úpravě „na čtverec" zřejmou nerovnost

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\cos\beta}}\right)^2 \geqq 0. \tag{2'}$$

Tím je celý důkaz hotov. Dodejme, že nerovnost (2) též plyne z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (kladných) čísel $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ a $\dfrac{1}{\cos\beta}$.

Rovnost v dokázané nerovnosti nastane, právě když nastanou rovnosti v obou nerovnostech (1) a (2′). To lze zřejmě vyjádřit podmínkami

$$\sin(\alpha+\beta) = 1 \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\beta},$$

které jsou pro nějaká $\alpha, \beta \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi)$ splněny, právě když $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$ a $\alpha = \beta$, neboli $\alpha = \beta = \frac{1}{4}\pi$.

A – II – 2

Protože číslo x je dělitelem obou čísel $n(x,y)$ a x^2, plyne z dané rovnice, že číslo x také dělí číslo $4y$. Číslo $4y$ je tedy společný násobek čísel x a y, takže jejich *nejmenší* společný násobek $n(x,y)$ je dělitelem čísla $4y$ (a zároveň násobkem čísla y). Číslo $n(x,y)$ je tudíž rovno jednomu z čísel y, $2y$ nebo $4y$. Tyto tři případy, jež se pro přirozené y navzájem vylučují, nyní posoudíme odděleně.

(i) $n(x,y) = y$. Platí $y = kx$ pro vhodné přirozené k. Dosazením do rovnice dostaneme $x^2 = 4kx + 3kx$, odkud $x = 7k$, a proto $y = 7k^2$. Protože $n(7k, 7k^2) = 7k^2$ pro každé k, je odpovídající dvojice $(x,y) = (7k, 7k^2)$ skutečně řešení.

(ii) $n(x,y) = 2y$. Platí $2y = kx$ pro vhodné liché k (pro k sudé dostaneme, že x dělí y, což je případ (i)). Dosazením do rovnice dostaneme $x^2 = 2kx + 3kx$, odkud $x = 5k$, a proto $2y = 5k^2$. To je spor s tím, že k je liché.

(iii) $n(x,y) = 4y$. Platí $4y = kx$ pro vhodné liché k (pro k sudé dostaneme, že x dělí y nebo $2y$, což vede na případ (i) nebo (ii)). Dosazením do rovnice dostaneme $x^2 = kx + 3kx$, odkud $x = 4k$, a proto $y = k^2$. Protože $n(4k, k^2) = 4k^2$ pro každé liché k, je odpovídající dvojice $(x,y) = (4k, k^2)$ skutečně řešení.

Odpověď: Hledaných dvojic (x,y) je nekonečně mnoho; jsou to jednak dvojice $(7k, 7k^2)$, kde k je libovolné přirozené číslo, jednak dvojice $(4k, k^2)$, kde k je libovolné liché přirozené číslo.

Jiné řešení. Označme d největší společný dělitel hledaných čísel x a y. Potom $x = dx_1$ a $y = dy_1$, kde x_1 a y_1 jsou nesoudělná přirozená čísla, a $n(x,y) = dx_1y_1$. Po dosazení do dané rovnice dostaneme $d^2x_1^2 = 4dy_1 + 3dx_1y_1$, což po krácení číslem d přepíšeme do tvaru

$$x_1(dx_1 - 3y_1) = 4y_1. \tag{1}$$

Přirozené číslo $4y_1$ je tedy násobkem čísla x_1. Čísla x_1 a y_1 jsou ale nesoudělná, tudíž číslo x_1 je dělitelem čísla 4, a proto $x_1 \in \{1, 2, 4\}$.

Je-li $x_1 = 1$, pak z (1) vychází $d = 7y_1$, takže $x = dx_1 = 7y_1$ a $y = dy_1 = 7y_1^2$. Dvojice čísel $x = 7k$ a $y = 7k^2$ je řešením původní rovnice pro každé k.

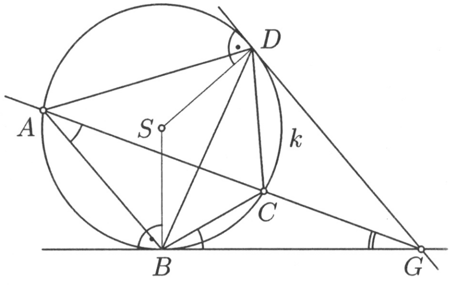
Je-li $x_1 = 2$, pak podle (1) platí $2d = 5y_1$, takže číslo y_1 je sudé stejně jako číslo x_1, což odporuje jejich předpokládané nesoudělnosti.

Je-li $x_1 = 4$, pak z (1) vychází $d = y_1$, takže $x = dx_1 = 4d$ a $y = dy_1 = d^2$. Čísla $x_1 = 4$ a $y_1 = d$ jsou ovšem nesoudělná, jenom když je d liché číslo. Pro každé takové d je dvojice $x = 4d$ a $y = d^2$ řešením původní rovnice.

A – II – 3

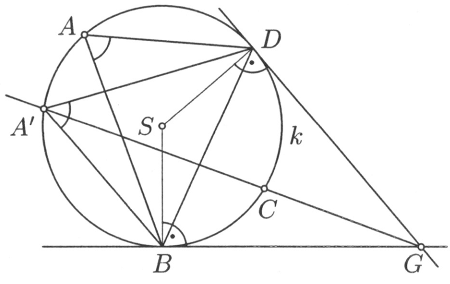
Protože úsečka BD není průměrem kružnice k, její tečny v bodech B a D nejsou rovnoběžné, takže se protínají v bodě, který označíme G.

(i) Předpokládejme, že bod G leží na přímce AC, například na polopřímce opačné k CA (obr. 31). (Leží-li bod G na polopřímce opačné k AC, vyměníme označení vrcholů A a C, které nic nemění na rovnosti, kterou máme dokázat.) Trojúhelníky ABG a BCG se shodují jak ve vnitřních úhlech u společného vrcholu G, tak ve vnitřních úhlech BAG a CBG (podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu pro tětivu BC kružnice k). Proto jsou tyto trojúhelníky podobné, tudíž platí $|AB| : |BC| = |GB| : |GC|$. Analogická úměra $|AD| : |CD| = |GD| : |GC|$ plyne z podobných trojúhelníků ADG a DCG. Porovnáme-li obě úměry a přihlédneme-li k rovnosti $|GB| = |GD|$ (úseky tečen z bodu G ke kružnici k), zjistíme, že platí $|AB| : |BC| = |AD| : |CD|$, odkud již plyne rovnost $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$.



Obr. 31

(ii) Předpokládejme nyní, že platí rovnost $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$ a že bod G leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou BD jako bod C (jinak opět vyměníme označení bodů A a C, které přímka BD odděluje.) Pak polopřímka GC protíná kružnici k ve dvou bodech, v bodě C a v bodě, který označíme A' (obr. 32). Pro čtyřúhelník $A'BCD$ můžeme



Obr. 32

použít tvrzení dokázané v části (i), dostaneme tak rovnost $|A'B| \cdot |CD| = |A'D| \cdot |BC|$. Porovnáním s rovností $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$ zjistíme, že platí $|A'B| : |AB| = |A'D| : |AD|$. Tato úměra spolu se shodností úhlů $BA'D$ a BAD (obvodové úhly nad tětivou BD kružnice k) znamená, že trojúhelníky $BA'D$ a BAD jsou podobné podle věty *sus*. Protože však straně BD odpovídá strana BD, jde o shodné trojúhelníky (ležící ve stejné polorovině s hraniční přímkou BD), tudíž body A a A' splývají. Bod G proto leží na přímce AC.

A – II – 4

Odečtením prvních dvou rovnic soustavy dostaneme

$$x^2 - y^2 = p(y - x), \quad \text{neboli} \quad (x - y)(x + y + p) = 0.$$

Odtud plyne, že aspoň jeden z činitelů $(x - y)$ a $(x + y + p)$ je roven nule, takže číslo y je rovno x nebo $-p - x$. Obdobně odečtením první a třetí rovnice soustavy zjistíme, že rovněž $z \in \{x, -p - x\}$. Dohromady to znamená, že každé řešení (x, y, z) dané soustavy je (až na pořadí) trojice tvaru (u, u, u) nebo $(u, u, -p - u)$.

(i) Trojice (u, u, u) je řešením, právě když číslo u splňuje rovnici $u^2 - 1 = 2pu$. Její úpravou dostaneme $(u - p)^2 = p^2 + 1$, odkud je vidět, že pro každé reálné p existují dvě různá čísla u a jsou rovna $p \pm \sqrt{p^2 + 1}$. Jim odpovídají první dvě řešení původní soustavy

$$x_1 = y_1 = z_1 = p + \sqrt{p^2 + 1} \quad \text{a} \quad x_2 = y_2 = z_2 = p - \sqrt{p^2 + 1}. \qquad (1)$$

(ii) Hledejme nyní všechna řešení soustavy tvaru $(u, u, -p-u)$. Snadno si uvědomíme, že trojice čísel $(u, u, -p - u)$ (v jakémkoliv pořadí) je řešením původní soustavy, právě když číslo u současně vyhovuje dvěma rovnicím

$$u^2 - 1 = p(u - p - u) \quad \text{a} \quad (-p - u)^2 - 1 = p(u + u).$$

Je zřejmé, že každá z těchto rovnic je ekvivalentní s rovnicí $u^2 = 1 - p^2$. Vidíme, že v případě $|p| > 1$ číslo u neexistuje, v případě $|p| = 1$ platí $u = 0$, konečně v případě $|p| < 1$ existují dvě čísla u a jsou rovna $\pm\sqrt{1 - p^2}$. Odpovídající řešení původní soustavy jsou dvě trojice čísel

$$\begin{aligned} x_3 = y_3 = \sqrt{1 - p^2} \quad &\text{a} \quad z_3 = -p - \sqrt{1 - p^2}, \\ x_4 = y_4 = -\sqrt{1 - p^2} \quad &\text{a} \quad z_4 = -p + \sqrt{1 - p^2}, \end{aligned} \qquad (2)$$

a dále všechny jejich permutace

$$\begin{aligned} (x_5, y_5, z_5) = (x_3, z_3, x_3), \quad & (x_6, y_6, z_6) = (x_4, z_4, x_4), \\ (x_7, y_7, z_7) = (z_3, x_3, x_3), \quad & (x_8, y_8, z_8) = (z_4, x_4, x_4). \end{aligned} \qquad (3)$$

(Vzorce (2) a (3) můžeme použít i v případě $|p| = 1$, musíme však mít na paměti, že poskytují jen tři různá řešení, neboť třetí řešení splývá se čtvrtým, páté s šestým a sedmé s osmým.) Nyní ještě posoudíme, kdy některá řešení uvedená v (2) a (3) splývají s řešeními uvedenými v (1). Taková situace nastane, pokud platí $|p| \leqq 1$ a je splněna některá z rovnic

$$\sqrt{1-p^2} = -p - \sqrt{1-p^2} \quad \text{respektive} \quad -\sqrt{1-p^2} = -p + \sqrt{1-p^2}.$$

Snadným výpočtem zjistíme, že první rovnice má jediné řešení $p = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (pro takové p třetí, páté a sedmé řešení splývají s prvním řešením) a že druhá rovnice má jediné řešení $p = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (pro takové p čtvrté, šesté a osmé řešení splývají s druhým řešením).

Odpověď: Všechna řešení (x_i, y_i, z_i) dané soustavy rovnic jsou popsána vzorci (1), (2) a (3). Je-li $|p| > 1$, existují právě dvě různá řešení (s indexy $i = 1, 2$). Je-li $|p| < 1$ a $|p| \neq \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, existuje právě osm různých řešení (s indexy $i = 1, 2, \ldots, 8$). Je-li $|p| = 1$ nebo $|p| = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, existuje právě pět různých řešení (s indexy $i = 1, 2, 3, 5, 7$ pro hodnoty $p = 1$, $p = -1$, $p = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ a s indexy $i = 1, 2, 4, 6, 8$ pro $p = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$).

A – III – 1

Z první rovnice dané soustavy plyne, že číslo $7y - 14 = 7(y-2)$ je dělitelné pěti, takže $y = 5s + 2$ pro vhodné celé s. Potom platí $2y = 10s + 4$, a proto $(2y)_5 = 10s + 5$. Po dosazení do soustavy dostaneme dvojici rovnic $(4x)_5 + 35s = 0$ a $10s - (3x)_7 = 69$. Odečteme-li od dvojnásobku první rovnice sedminásobek druhé rovnice, vyloučíme neznámou s a pro neznámou x tak dostaneme rovnici $2(4x)_5 + 7(3x)_7 = -483$. Protože funkce $F(t) = 2(4t)_5 + 7(3t)_7$ je v celočíselné proměnné t neklesající a platí $F(-18) = -532$, $F(-17) = -483$ a $F(-16) = -473$, má naše rovnice $F(x) = -483$ jediné řešení $x = -17$. Z rovnice $(4x)_5 + 35s = 0$ pak plyne $s = 2$, takže $y = 12$. Zkoušku pro dvojici $(x, y) = (-17, 12)$ provedeme snadno dosazením.

Daná soustava má jediné řešení $(x, y) = (-17, 12)$.

Jiné řešení. Pro každé celé číslo t zřejmě platí nerovnosti $t - 2 \leqq (t)_5 \leqq t + 2$ a $t - 3 \leqq (t)_7 \leqq t + 3$. Podle nich dostaneme z dané soustavy rovnic soustavu nerovnic

$$
\begin{aligned}
12 \leqq 4x + 7y \leqq 16,\\
69 \leqq 2y - 3x \leqq 79.
\end{aligned}
$$

Z této soustavy vyloučíme například neznámou x: pro výraz $3(4x+7y)+$ $+ 4(2y - 3x)$, který se rovná $29y$, tak dostaneme odhady

$$29y \leqq 3 \cdot 16 + 4 \cdot 79 = 364 \quad \text{a} \quad 29y \geqq 3 \cdot 12 + 4 \cdot 69 = 312.$$

Z nerovností $312 \leqq 29y \leqq 364$ ovšem plyne $y \in \{11, 12\}$. Z první rovnice původní soustavy pro $y = 11$ vychází $(4x)_5 = -63$, což není násobek pěti, zatímco pro $y = 12$ vychází $(4x)_5 = -70$, odkud $-72 \leqq 4x \leqq -68$, takže $x \in \{-18, -17\}$. Nutně tedy platí $y = 12$; po dosazení do druhé rovnice soustavy zjistíme, že tato rovnice je splněna pro $x = -17$, ne však pro $x = -18$. Jediným řešením je tedy dvojice $(x, y) = (-17, 12)$.

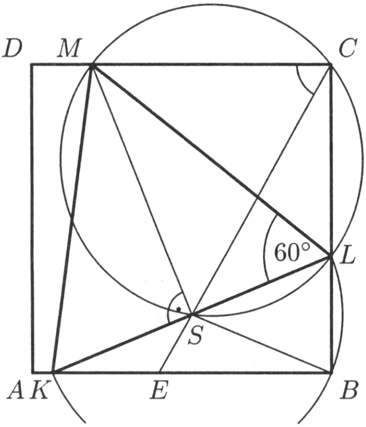
A – III – 2

Označme S střed strany KL libovolného z uvažovaných trojúhelníků KLM (obr. 33). Protože oba úhly LCM a LSM jsou pravé, je čtyřúhelník $CMSL$ tětivový, a proto platí $|\sphericalangle MCS| = |\sphericalangle MLS| = 60°$. Bod S tudíž leží na fixní úsečce CE, jejíž krajní bod $E \in AB$ je dán rovností $|\sphericalangle ECD| = 60°$. Ukážeme, že hledanou množinou všech středů S je jistá úsečka mezi body C a E, která je určena podmínkami $S \in CE$,

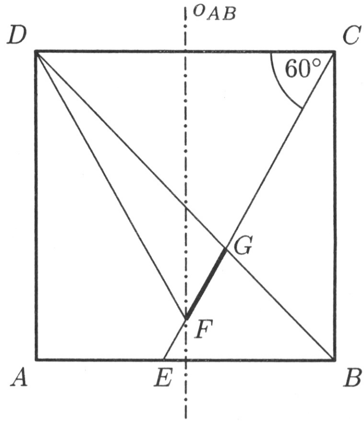
$$\text{(i)} \quad |AS| \geqq |BS| \quad \text{a} \quad \text{(ii)} \quad |\sphericalangle CBS| \geqq 45°.$$

Z těchto podmínek zřejmě plyne, že se jedná o úsečku FG, kde F je vrchol rovnostranného trojúhelníku CDF a G je ten bod strany CF, který leží na úhlopříčce BD, obr. 34. Z bodů úsečky CE totiž podmínku (i) splňují právě body úsečky CF, podmínku (ii) právě body úsečky EG.

Zmíněné tvrzení dokážeme tak, že uvnitř úsečky CE zvolíme libovolný bod S a pokusíme se rekonstruovat vyhovující trojúhelník KLM, jehož strana KL má střed ve zvoleném bodě S. Zjistíme, že takový trojúhelník KLM existuje, právě když bod S splňuje obě podmínky (i) a (ii). Vraťme se znovu k obr. 33. Protože úhel KBL je pravý, jsou podle Thaletovy věty všechny tři úsečky SK, SB a SL shodné. Proto podle bodu S lze body K, L určit jako průsečíky úseček AB resp. BC s kružnicí o středu S a poloměru $|SB|$. Takový průsečík K ($K \neq B$) existuje,



Obr. 33



Obr. 34

právě když platí podmínka (i), průsečík L ($L \neq B$) existuje, právě když platí nerovnost $|BS| \leqq |CS|$, neboli $|\sphericalangle BCS| \leqq |\sphericalangle CBS|$. Protože však $|\sphericalangle BCS| = 30°$, je poslední nerovnost zaručena silnější podmínkou (ii), jejíž nutnost se vyjeví za chvíli. Známe-li již body K a L, můžeme určit bod M jako průsečík strany CD s osou úsečky KL. Předpokládejme, že takový průsečík M existuje; sestrojený rovnoramenný trojúhelník KLM je pak skutečně rovnostranný, neboť čtyřúhelník $CMSL$ je tětivový (úhly u vrcholů C a S jsou pravé), a proto platí $|\sphericalangle MLS| = |\sphericalangle MCS| = 60°$. Zbývá proto posoudit, kdy existuje průsečík úsečky CD s osou úsečky KL, tedy kdy body C, D leží v opačných polorovinách určených zmíněnou osou, jež jsou popsány nerovnicemi $|KX| \leqq |LX|$ a $|KX| \geqq |LX|$. Protože platí $|KC| \geqq |BC|$ a $|BC| \geqq |LC|$, tedy $|KC| \geqq |LC|$, je naším úkolem zjistit, kdy je splněna nerovnost $|KD| \leqq |LD|$. Z pravoúhlých trojúhelníků KDA a LDC usoudíme, že poslední nerovnost platí, právě když $|AK| \leqq |LC|$, neboli $|KB| \geqq |LB|$, neboli $|\sphericalangle BLK| \geqq 45°$. Úhel BLK je ale shodný s úhlem CBS (víme totiž, že $|SB| = |SL|$), a tak dostáváme podmínku (ii). Důkaz je hotov.

A – III – 3

(i) Předpokládejme nejprve, že $A = d^2$ pro některé přirozené d. Pak pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$(A + j)^2 - A = (d^2 + j)^2 - d^2 = (d^2 - d + j)(d^2 + d + j);$$

protože jedno z n po sobě jdoucích čísel $(d^2 - d + j)$, kde $j = 1, 2, \ldots, n$, je dělitelné číslem n, je číslem n dělitelné i příslušné číslo $(A + j)^2 - A$.

(ii) Předpokládejme nyní, že číslo A není druhou mocninou žádného přirozeného čísla. V rozkladu čísla A na prvočinitele se pak některé prvočíslo p vyskytuje v lichém počtu exemplářů, tedy $p^{2k-1} \mid A$ a $p^{2k} \nmid A$ pro vhodné přirozené k. Ukažme, že například číslo $n = p^{2k}$ nemá vlastnost z textu úlohy. Připusťme naopak, že pro některé $j = 1, 2, \ldots, p^{2k}$ je rozdíl $(A + j)^2 - A$ dělitelný číslem p^{2k}. Čísla $(A + j)^2$ a A pak dávají stejné zbytky při dělení číslem p^{2k}, a tedy i při dělení číslem p^{2k-1}. Protože číslo A je dělitelné číslem p^{2k-1}, ne však číslem p^{2k}, platí totéž i o číslu $(A + j)^2$. To je ale spor, neboť $(A + j)^2$ je druhá mocnina přirozeného čísla.

A - III - 4

Po vynásobení obou stran rovnice výrazem $x^2 - 1$ (který je roven nule, právě když $x \in \{-1, 1\}$) a po převedení všech členů na jednu stranu dostaneme kubickou rovnici

$$x^3 - ax^2 + 23x - b = 0. \tag{1}$$

Jak dobře víme, každá kubická rovnice s reálnými koeficienty má v oboru reálných čísel buď *jeden*, nebo *tři* kořeny (počítáme-li je s přihlédnutím k jejich násobnosti). Protože obě řešení původní rovnice jsou kořeny rovnice (1), musí mít tato rovnice *tři* reálné kořeny. Pro tato čísla x_1, x_2, x_3 a pro koeficienty rovnice (1) platí známé Viètovy vzorce

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 23, \\ x_1x_2x_3 &= b. \end{aligned} \tag{2}$$

Abychom se dále vyhnuli některým zkouškám, připomeňme známý fakt, že *každé* řešení soustavy rovnic (2) je tvořeno trojicí kořenů rovnice (1), všechna řešení (2) jsou tedy permutace téže trojice čísel.

Předpoklad o dvou řešeních původní rovnice znamená, že buď právě jeden z kořenů x_1, x_2, x_3 patří do množiny $\{-1, 1\}$ a ostatní dva kořeny jsou různé, nebo je jeden z kořenů x_1, x_2, x_3 dvojnásobný a žádný z nich do množiny $\{-1, 1\}$ nepatří. Řešení původní rovnice lze proto označit

s a $12-s$ tak, že nastane jedna z následujících možností: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, s, 12-s)$, $(x_1, x_2, x_3) = (1, s, 12-s)$, nebo $(x_1, x_2, x_3) = (s, s, 12-s)$; vždy přitom platí $s \notin \{-1, 1, 6, 11, 13\}$. Vyjmenované možnosti teď jednotlivě posoudíme.

(i) $(x_1, x_2, x_3) = (-1, s, 12-s)$. Soustava (2) má po dosazení a úpravě tvar

$$a = 11, \quad s^2 - 12s - 35 = 0, \quad b = -s(12-s).$$

Druhá rovnice má dva kořeny $s = 5$ a $s = 7$, kterým podle třetí rovnice odpovídá stejná hodnota $b = -35$. Dvojice $(a, b) = (11, -35)$ je řešením úlohy.

(ii) $(x_1, x_2, x_3) = (1, s, 12-s)$. Soustava (2) má po dosazení a úpravě tvar

$$a = 13, \quad s^2 - 12s + 11 = 0, \quad b = s(12-s).$$

Druhá rovnice má kořeny $s = 1$ a $s = 11$, které však patří k nepřípustným hodnotám s (viz výše).

(iii) $(x_1, x_2, x_3) = (s, s, 12-s)$. Soustava (2) má po dosazení a úpravě tvar

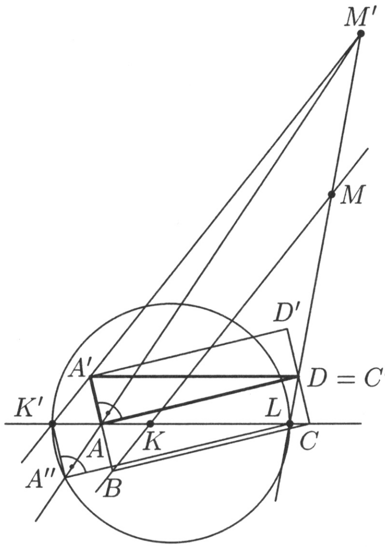
$$a = s + 12, \quad s^2 - 24s + 23 = 0, \quad b = s^2(12-s).$$

Druhá rovnice má kořeny $s = 1$ a $s = 23$. Hodnota $s = 1$ je nepřípustná, hodnotě $s = 23$ podle první a třetí rovnice odpovídají hodnoty $a = 35$ a $b = -11 \cdot 23^2 = -5\,819$. Dvojice $(a, b) = (35, -5\,819)$ je řešením úlohy.

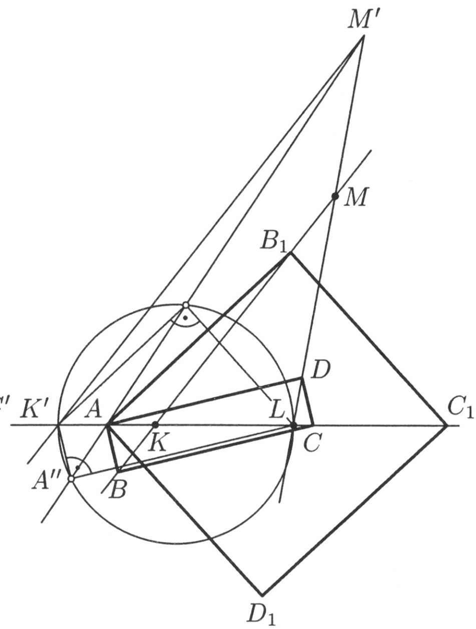
Hledané dvojice (a, b) jsou dvojice $(11, -35)$ a $(35, -5\,819)$.

A – III – 5

Předpokládejme, že $ABCD$ je hledaný pravoúhelník, a označme $A'B'C'D'$ jeho obraz v posunutí o vektor $\boldsymbol{BA}$ (obr. 35, $B' = A$). Bod A' leží na přímce souměrně sdružené s přímkou KM podle středu A — odpovídající průsečíky této přímky s přímkami LK a LM označme K' a M'. Protože úhlopříčka AC hledaného pravoúhelníku leží na přímce KL, je úhlopříčka $A'C'$ posunutého obdélníku $A'B'C'D'$ s KL rovnoběžná. Ve stejnolehlosti se středem M', která převádí bod A' do bodu K' (a bod $C' = D$ do bodu L) odpovídá pravoúhlému trojúhelníku $A'AC'$ trojúhelník $K'A''L$. Bod A'' už dovedeme sestrojit, protože leží na Thaletově kružnici nad průměrem $K'L$ a na přímce $M'A$. Nyní již snadno sestrojíme hledaný pravoúhelník $ABCD$: nejprve určíme body A' a $C' = D$, které jsou obrazy bodů K' a L ve stejnolehlosti se středem M', jež převádí bod A''



Obr. 35



Obr. 36

do bodu A, a k nim doplníme vrcholy B a C jako obrazy bodů $B' = A$, $C' = D$ v posunutí o vektor $\boldsymbol{A'A} = \boldsymbol{AB}$.

Protože bod A leží uvnitř úsečky $K'L$ a $M' \neq A$, protíná přímka $M'A$ Thaletovu kružnici nad průměrem $K'L$ vždy ve dvou bodech. Je-li A'' jeden z průsečíků uvedené Thaletovy kružnice s přímkou $M'A$ a $M' \neq \neq A''$, určují body A, A'' hledanou stejnolehlost se středem M'. Pokud tedy bod M'' neleží na kružnici s průměrem $K'L$, má úloha dvě různá řešení $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ (obr. 36). V opačném případě má úloha pouze jedno řešení.

A – III – 6

Dosadíme-li do dané rovnice za x hodnotu $f(x)$, dostaneme rovnici

$$f\big(f(x)f(y)\big) = f\big(f(x)y\big) + f(x),$$

ze které vyjádříme $f\big(f(x)y\big) = f\big(f(x)f(y)\big) - f(x)$. Jiné vyjádření téhož výrazu $f\big(f(x)y\big)$ dostaneme, když v původní rovnici vyměníme navzájem hodnoty x a y; vyjde nám $f\big(f(x)y\big) = f(yx) + y$. Porovnáním obou vyjádření tak dostaneme rovnici

$$f\big(f(x)f(y)\big) = f(yx) + y + f(x),$$

jejíž levá strana se nezmění, vyměníme-li navzájem hodnoty x a y. Stejnou vlastnost musí proto mít i pravá strana této rovnice, takže musí platit

$$f(yx) + y + f(x) = f(xy) + x + f(y), \quad \text{neboli} \quad y + f(x) = x + f(y).$$

Další zřejmou úpravou dostáváme rovnici $f(x) - x = f(y) - y$, která musí být splněna pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$. Znamená to, že funkce $x \mapsto f(x) - x$ je na množině $\mathbb{R}^+$ konstantní, tedy hledaná funkce f musí být tvaru $f(x) = x + c$ pro vhodné číslo c. Po dosazení tohoto předpisu do obou stran původní rovnice

$$\begin{aligned} f\big(xf(y)\big) &= xf(y) + c = x(y + c) + c = xy + cx + c \\ f(xy) + x &= (xy + c) + x = xy + x + c \end{aligned}$$

zjišťujeme, že vyhovuje jedině $c = 1$. Hledaná funkce f je tudíž jediná a je určena vzorcem $f(x) = x + 1$.