# 43. mezinárodní matematická olympiáda

V pořadí již 43. ročník této prestižní mezinárodní soutěže uspořádal United Kingdom Mathematics Trust ve Skotsku v městě Glasgow na University of Strathclyde v době od 19. do 30. července 2002.

V posledních ročnících MMO byl téměř vždy vytvořen nový rekord v počtu zúčastněných zemí. Nejinak tomu bylo i letos, kdy se soutěže zúčastnilo 84 zemí, což je o jednu více než loni. Každou zemi reprezentuje vždy nejvýše šest soutěžících; letos jich bylo celkem 485.

Výběr soutěžících za Českou republiku byl proveden v Kostelci nad Černými lesy na závěrečném soutěžním soustředění prvních devíti vítězů celostátního kola. Vybraní soutěžící se pak ještě zúčastnili trojutkání v polském Zwardoni mezi Českou republikou, Slovenskem a Polskem, kde soutěžili reprezentanti zúčastněných zemí za podmínek podobných jako při soutěži na MMO. Po této přípravě odjela do Skotska tato šestice soutěžících: *Josef Cibulka* z Gymnázia Štěpánská v Praze, *Jaroslav Hájek* z Gymnázia M. Koperníka v Bílovci, *Vítězslav Kala* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Jan Moláček* z Gymnázia J. K. Tyla v Hradci Králové, *Tomáš Protivínský* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně a *Martin Tancer* z Gymnázia Ch. Dopplera v Praze. Vedoucím české delegace byl doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., z Masarykovy Univerzity v Brně, zástupcem vedoucího byl RNDr. *Jaroslav Zhouf*, Ph.D., z Pedagogické fakulty UK v Praze. Vedoucí delegace přicestoval do Skotska kvůli výběru úloh již 19. července, ostatní čeští účastníci pak o tři dny později.

Druhý den po příletu soutěžících do Glasgowa se konalo v Barony Hall (v katedrále přebudované na univerzitní aulu) slavnostní zahájení. Další dva dny, tj. 24. a 25. 7., proběhla vlastní soutěž ve výstavním komplexu nedaleko Glasgow Science Centre. Každý z těchto dnů řešili soutěžící trojici úloh po dobu 4,5 hodiny. Za každou úlohu mohli získat maximálně 7 bodů.

O náročnosti soutěžních úloh svědčí i nízké hranice pro zisk medailí: na bronzovou medaili stačilo 14 bodů, na stříbrnou 23 a na zlatou 29 z možného počtu 42 bodů. Všichni tři naši loňští olympionici si zřetelně v celkovém pořadí polepšili. V neoficiálním pořadí zemí podle celkového počtu bodů družstva jsme spolu se Slovenskem dokonce poskočili o rovných dvacet míst — až na to, že tentokrát vyššího součtu dosáhli naši středoevropští rivalové. Výsledky našich jsou uvedeny v následující tabulce:

| | | **Body za úlohu** | | | | | | **Body** | **Cena** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Umístění** | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | |
| 99.–116. | Josef Cibulka,<br>4. roč. gymnázia<br>Štěpánská 22, Praha 1 | 6 | 6 | 0 | 3 | 7 | 1 | 23 | II. |
| 86.–98. | Jaroslav Hájek,<br>4. roč. GMK<br>Bílovec | 7 | 7 | 1 | 7 | 2 | 0 | 24 | II. |
| 233.–248. | Vítězslav Kala,<br>2. roč. gymnázia<br>Brno, tř. Kpt. Jaroše | 6 | 0 | 0 | 6 | 1 | 0 | 13 | |
| 145.–159. | Jan Moláček,<br>2. roč. GJKT<br>Hradec Králové | 7 | 7 | 0 | 4 | 2 | 0 | 20 | III. |
| 191.–200. | Tomáš Protivínský,<br>4. roč. gymnázia<br>Brno, tř. Kpt. Jaroše | 7 | 0 | 0 | 7 | 2 | 0 | 16 | III. |
| 160.–167. | Martin Tancer,<br>4. roč. G. Ch. Dopplera<br>Praha 5 | 3 | 7 | 1 | 7 | 1 | 0 | 19 | III. |
| | Celkem | 36 | 27 | 2 | 34 | 15 | 1 | 115 | |

Žádný bod neztratili jen tři soutěžící: *Yunhao Fu* s *Botongem Wangem* z Číny a *Andrej Chaliavin* z Ruska.

Jak je patrno z tabulky zúčastněných států, v neoficiálním hodnocení jednotlivých zemí podle celkového bodového zisku dopadly nejlépe (jak už je pomalu tradicí) Čína, Rusko a Spojené státy.

| | I | II | III | body | | I | II | III | body |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ČLR | 6 | 0 | 0 | 212 | Makedonie | 0 | 1 | 1 | 73 |
| Rusko | 6 | 0 | 0 | 204 | Norsko | 1 | 0 | 1 | 72 |
| USA | 4 | 1 | 0 | 171 | Chorvatsko | 0 | 0 | 2 | 70 |
| Bulharsko | 3 | 2 | 1 | 167 | Mexiko | 0 | 0 | 3 | 67 |
| Vietnam | 3 | 1 | 2 | 166 | Řecko | 0 | 0 | 2 | 62 |
| Korea | 1 | 5 | 0 | 163 | Moldavsko | 0 | 0 | 2 | 60 |
| Tchaj-wan | 1 | 4 | 1 | 161 | Švédsko | 0 | 0 | 2 | 60 |
| Rumunsko | 2 | 3 | 1 | 157 | Uzbekistán | 0 | 0 | 0 | 60 |
| Indie | 1 | 3 | 2 | 156 | Peru | 0 | 0 | 2 | 59 |
| Německo | 2 | 1 | 2 | 144 | Belgie | 0 | 0 | 1 | 58 |
| Írán | 0 | 4 | 2 | 143 | Venezuela | 0 | 1 | 1 | 58 |
| Kanada | 1 | 3 | 1 | 142 | Nizozemsko | 0 | 0 | 1 | 55 |
| Maďarsko | 1 | 2 | 3 | 142 | Dánsko | 0 | 0 | 0 | 53 |
| Bělorusko | 1 | 2 | 3 | 135 | Macao | 0 | 0 | 3 | 50 |
| Turecko | 1 | 1 | 4 | 135 | Rakousko | 0 | 0 | 1 | 50 |
| Japonsko | 1 | 3 | 1 | 133 | Slovinsko | 0 | 0 | 1 | 46 |
| Kazachstán | 0 | 3 | 3 | 133 | Turkmenistán | 0 | 0 | 1 | 45 |
| Izrael | 0 | 3 | 3 | 130 | Španělsko | 0 | 0 | 1 | 44 |
| Francie | 0 | 2 | 3 | 127 | Švýcarsko | 0 | 0 | 1 | 44 |
| Ukrajina | 1 | 3 | 0 | 124 | Bosna a Hercegovina | 0 | 0 | 1 | 42 |
| Brazílie | 0 | 1 | 5 | 123 | Maroko | 0 | 0 | 1 | 39 |
| Polsko | 0 | 4 | 1 | 123 | Indonézie | 0 | 0 | 1 | 38 |
| Thajsko | 0 | 2 | 2 | 123 | Ázerbájdžán | 0 | 0 | 1 | 37 |
| Hongkong | 1 | 2 | 2 | 120 | Island | 0 | 0 | 0 | 36 |
| *Slovensko* | 0 | 2 | 4 | 119 | Arménie | 0 | 0 | 0 | 33 |
| Austrálie | 1 | 2 | 1 | 117 | Kypr | 0 | 0 | 0 | 29 |
| Velká Británie | 0 | 2 | 2 | 116 | Malajsie | 0 | 0 | 0 | 26 |
| *Česká republika* | 0 | 2 | 3 | 115 | Albánie | 0 | 0 | 1 | 25 |
| Jugoslávie | 0 | 1 | 5 | 114 | Irsko | 0 | 0 | 0 | 25 |
| Singapur | 0 | 2 | 2 | 112 | Trinidad a Tobago | 0 | 0 | 0 | 22 |
| Argentina | 0 | 0 | 5 | 96 | Tunisko | 0 | 0 | 0 | 22 |
| JAR | 0 | 1 | 3 | 90 | Filipíny | 0 | 0 | 0 | 18 |
| Itálie | 0 | 0 | 5 | 88 | Kirgizie | 0 | 0 | 0 | 17 |
| Gruzie | 0 | 0 | 2 | 84 | Portoriko | 0 | 0 | 0 | 17 |
| Mongolsko | 0 | 0 | 3 | 82 | Srí Lanka | 0 | 0 | 0 | 16 |
| Nový Zéland | 1 | 0 | 0 | 82 | Portugalsko | 0 | 0 | 0 | 15 |
| Kolumbie | 0 | 0 | 3 | 81 | Lucembursko | 0 | 0 | 0 | 12 |
| Finsko | 0 | 0 | 3 | 79 | Paraguay | 0 | 0 | 0 | 11 |
| Kuba | 0 | 0 | 2 | 78 | Guatemala | 0 | 0 | 0 | 4 |
| Estonsko | 0 | 2 | 0 | 75 | Ekvádor | 0 | 0 | 0 | 3 |
| Lotyšsko | 0 | 1 | 2 | 75 | Kuvajt | 0 | 0 | 0 | 2 |
| Litva | 0 | 1 | 2 | 74 | Uruguay | 0 | 0 | 0 | 1 |

## Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

**1.** Nechť $n$ je přirozené číslo a nechť $\mathsf{T}$ je množina všech bodů $(x, y)$ v rovině, kde $x$ a $y$ jsou celá nezáporná čísla a $x + y < n$. Každý bod z množiny $\mathsf{T}$ je obarven buď červeně, nebo modře. Je-li bod $(x, y)$ červený, jsou červené i všechny body $(x', y') \in \mathsf{T}$, pro které platí $x' \leqq x$ a $y' \leqq y$. Definujme $X$-množinu jako množinu $n$ modrých bodů mających různé $x$-ové souřadnice a $Y$-množinu jako množinu $n$ modrých bodů majících různé $y$-ové souřadnice. Dokažte, že počet $X$-množin je roven počtu $Y$-množin. *(Kolumbie)*

**2.** Nechť $BC$ je průměr kružnice $\Gamma$ se středem $O$. Bod $A$ leží na kružnici $\Gamma$ tak, že $0° < |\sphericalangle AOB| < 120°$. Nechť $D$ je střed toho oblouku $AB$, na kterém neleží bod $C$. Přímka vedená bodem $O$ rovnoběžně s $DA$ protne přímku $AC$ v bodě $J$. Osa úsečky $OA$ protne kružnici $\Gamma$ v bodech $E$ a $F$. Dokažte, že bod $J$ je střed kružnice vepsané trojúhelníku $CEF$.

*(Korea)*

**3.** Najděte všechny dvojice přirozených čísel $m, n \geqq 3$ takové, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel $a$, pro která je

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

celé číslo. *(Rumunsko)*

**4.** Nechť $n$ je přirozené číslo větší než 1. Všechny kladné dělitele čísla $n$ označíme $d_1, d_2, \ldots, d_k$, kde

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n.$$

Položme $D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ldots + d_{k-1} d_k$.

(a) Dokažte, že $D < n^2$.

(b) Určete všechna $n$, pro která je číslo $D$ dělitelem čísla $n^2$.

*(Rumunsko)*

**5.** Nechť $\mathbb{R}$ značí množinu všech reálných čísel. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\big(f(x) + f(z)\big)\big(f(y) + f(t)\big) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

pro libovolná $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. *(Indie)*

**6.** V rovině jsou dány kružnice $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ o poloměru 1, kde $n \geqq 3$. Jejich středy označme po řadě $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Předpokládejme, že každá přímka protíná nejvýše dvě z daných kružnic. Dokažte, že

$$\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \frac{1}{|O_i O_j|} \leqq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

(*Ukrajina*)

**Řešení úloh**

**1.** Pro každé $i = 0, 1, \ldots, n$ označme jako $a_i$ (resp. $b_i$) počet modrých bodů s $x$-ovou (resp. $y$-ovou) souřadnicí rovnou číslu $i$. Protože $X$-množina je každá množina modrých bodů, jejichž $x$-ové souřadnice jsou čísla $0, 1, \ldots, n-1$ (každé právě jednou), je počet všech $X$-množin roven součinu $a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$; podobně počet všech $Y$-množin je roven součinu $b_0 b_1 \ldots b_{n-1}$. Naší úlohou je dokázat rovnost

$$a_0 a_1 \ldots a_{n-1} = b_0 b_1 \ldots b_{n-1}. \tag{1}$$

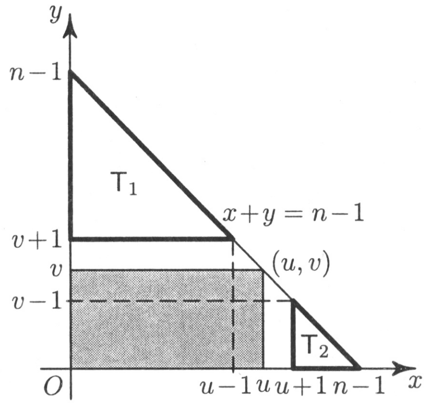
Ukážeme, že na obou stranách (1) stojí dva stejné soubory činitelů, které se mohou lišit jen pořadím, což budeme zapisovat jako rovnost neuspořádaných $n$-tic

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}] = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}]. \tag{2}$$

Rovnost (2) dokážeme matematickou indukcí podle čísla $n$.

Představme si, že body z $\mathsf{T}$ jsou rozděleny do skupin na jednotlivých přímkách $x + y = k$ ($0 \leqq k \leqq n-1$). Je-li $n = 1$, je vše jasné: tehdy totiž platí buď $a_0 = b_0 = 1$, nebo $a_0 = b_0 = 0$ (podle toho, zda je bod $(0,0)$ modrý, nebo červený). Předpokládejme nyní, že $n > 1$. Je-li červený některý bod $(u, v)$ na „krajní“ přímce $x + y = n - 1$, můžeme použít indukční předpoklad pro množiny mřížových bodů ležících v trojúhelnících $\mathsf{T}_1$ a $\mathsf{T}_2$ z obr. 38 (ostatní body z $\mathsf{T}$ leží ve vybarveném obdélníku[6] a jsou všechny jako bod $(u, v)$ červené): pro množinu $\mathsf{T}_1$ platí rovnost $u$-tic $[a_0, a_1, \ldots, a_{u-1}] = [b_{v+1}, b_{v+2}, \ldots, b_{n-1}]$, pro množinu $\mathsf{T}_2$

[6] Rovná-li se některé z čísel $u$, $v$ nule, je jeden z trojúhelníků $\mathsf{T}_1$, $\mathsf{T}_2$ prázdná množina a vybarvený obdélník degeneruje v úsečku.




Obr. 38

zase rovnost $v$-tic $[a_{u+1}, a_{u+2}, \dots, a_{n-1}] = [b_0, b_1, \dots, b_{v-1}]$; protože navíc $a_u = b_v = 0$, je rovnost (2) dokázána.

Jsou-li naopak na přímce $x+y = n-1$ pouze modré body, odstraníme je z množiny $\mathsf{T}$ a pro redukovanou množinu $\mathsf{T}' = \{(x,y) \in \mathsf{T} : x + y < n - 1\}$ využijeme indukční předpoklad: přiřadíme-li množině $\mathsf{T}'$ čísla $a'_i, b'_i$ $(0 \leqq i \leqq n-2)$ stejně, jako jsme dříve přiřadili čísla $a_i, b_i$ množině $\mathsf{T}$, jsou $(n-1)$-tice $[a'_0, a'_1, \dots, a'_{n-2}]$ a $[b'_0, b'_1, \dots, b'_{n-2}]$ shodné; s ohledem na modré body na přímce $x+y = n-1$ ovšem máme $a_i = a'_i + 1$ a $b_i = b'_i + 1$ $(0 \leqq i \leqq n-2)$ a k tomu ještě $a_{n-1} = b_{n-1} = 1$, takže rovnost (2) platí i v tomto případě. Důkaz indukcí je ukončen a úloha je vyřešena.

Popišme nyní elegantní způsob, jakým rovnost (2) dokázal náš soutěžící *J. Hájek*.

**Jiné řešení.** Protože všechna čísla $a_i$ a $b_j$ leží v množině $\{0, 1, \dots, n\}$, stačí dokázat, že pro každý její prvek $k$ je počet indexů $i$ s vlastností $a_i = k$ roven počtu indexů $j$ s vlastností $b_j = k$. Z podmínky úlohy zřejmě plyne, že libovolný bod $(i,j) \in \mathsf{T}$ je modrý, právě když spolu s ním jsou modré i všechny body z $\mathsf{T}$ nad ním a vpravo od něj. Proto počet indexů $i$ s vlastností $a_i = k$ dostaneme, když od počtu $p_k$ modrých bodů na přímce $x + y = n - k$ odečteme počet $p_{k+1}$ modrých bodů na přímce $x + y = n - (k+1)$; přitom klademe $p_0 = n$ a $p_{n+1} = 0$, abychom „ošetřili" i krajní hodnoty $k = 0$ a $k = n$. Témuž rozdílu $p_k - p_{k+1}$ je ovšem roven i počet indexů $j$ s vlastností $b_j = k$. Tím jsme dokázali rovnost (2), a tedy i tvrzení úlohy.

Jako **třetí řešení** uvedeme postup, kterým soutěžící *T. Protivínský* dokázal rovnost součinů (1), aniž využil rovnost (2). Všechny červené body z $T$ (pokud vůbec existují, jinak je (1) triviálně splněna) zřejmě vyplní sjednocení několika (řekněme $q$) obdélníků $0 \leqq x \leqq u_i$, $0 \leqq y \leqq v_i$, jejichž (červené!) pravé horní vrcholy $(u_i, v_i)$ $(1 \leqq i \leqq q)$ očíslujeme tak, aby platilo $0 \leqq u_1 < u_2 < \ldots < u_q \leqq n-1$ a $n-1 \geqq v_1 > v_2 > > \ldots > v_q \geqq 1$ (obr. 39). Pokud některý bod $(u_i, v_i)$ leží na přímce $x+y=n-1$, platí $a_{u_i} = b_{v_i} = 0$, takže součiny na obou stranách (1) jsou nulové. Proto dále předpokládejme, že $u_i + v_i < n-1$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$ (odtud mj. plyne, že $u_q < n-1$ a $v_1 < n-1$). Nyní snadno vyjádříme (kladné!) počty $a_i$ v jednotlivých intervalech $0 \leqq i \leqq u_1$, $u_1 < i \leqq u_2$, ..., $u_q < i \leqq n-1$ jako počty bodů z T, které leží nad horní stranou příslušného „červeného" obdélníku:

$$
\begin{aligned}
a_i &= n-1-i-v_1 \quad (0 \leqq i \leqq u_1),\\
a_i &= n-1-i-v_2 \quad (u_1 < i \leqq u_2),\\
&\vdots\\
a_i &= n-1-i-v_q \quad (u_{q-1} < i \leqq u_q),\\
a_i &= n-1-i+1 \quad (u_q < i \leqq n-1).
\end{aligned}
$$

neboli

$$a_i = n-1-i-v_{s+1} \quad (u_s < i \leqq u_{s+1},\ 0 \leqq s \leqq q),$$

kde navíc klademe $u_0 = v_{q+1} = -1$, $v_0 = u_{q+1} = n-1$. Dostáváme tak

$$\prod_{i=0}^{n-1} a_i = \prod_{s=0}^{q} \prod_{i=u_s+1}^{u_{s+1}} (n-1-i-v_{s+1}) = \prod_{s=0}^{q} \frac{(n-2-u_s-v_{s+1})!}{(n-2-u_{s+1}-v_{s+1})!},$$

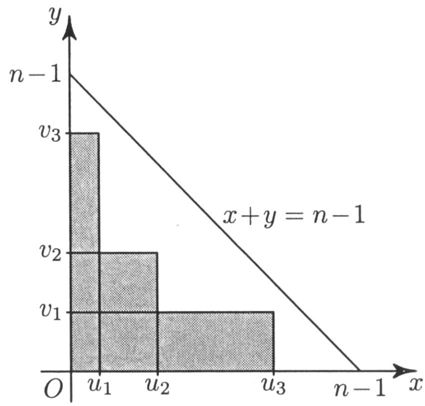
kde jsme využili toho, že každý součin $c(c+1)(c+2)\ldots(c+d)$ několika po sobě jdoucích přirozených čísel je roven podílu faktoriálů $(c+d)!/(c-1)!$, přičemž $0! = 1$. Promyslete sami podle obr. 39, jaký geometrický význam mají hodnoty $c = n-1-u_{s+1}-v_{s+1}$ a $c+d = n-2-u_s-v_{s+1}$.

Podobně pro čísla $b_j$ platí analogické vyjádření

$$b_j = n-1-j-u_s \quad (v_{s+1} < j \leqq v_s,\ 0 \leqq s \leqq q),$$

takže jejich součin je roven

$$\prod_{j=0}^{n-1} b_j = \prod_{s=0}^{q} \prod_{j=v_{s+1}+1}^{v_s} (n-1-j-u_s) = \prod_{s=0}^{q} \frac{(n-2-u_s-v_{s+1})!}{(n-2-u_s-v_s)!}.$$

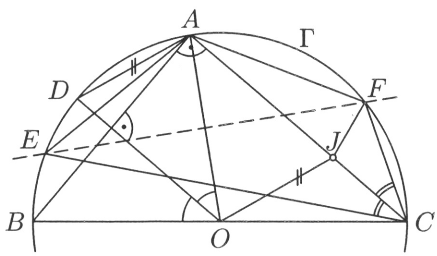



Obr. 39

Vidíme, že nalezená „faktoriálová“ vyjádření obou součinů z (1) se liší pouze ve jmenovatelích, a to o činitele $(n-2-u_s-v_s)!$ pro $s=0$ a $s=q+1$, které jsou však oba rovny $0!=1$. Důkaz rovnosti (1) je tak dokončen.

**2.** Důkaz bude proveden, když ukážeme, že bod $J$ leží jednak na ose úhlu $ECF$, jednak na ose úhlu $EFC$.

Úsečky $AE$ a $AF$ mají délku rovnou poloměru $r$ kružnice $\Gamma$, neboť jsou souměrně sdružené s jejími průměry $OE$ a $OF$ (obr. 40). Ze shodnosti tětiv $AE$ a $AF$ plyne shodnost obvodových úhlů $ECA$ a $FCA$, proto bod $A$, a tedy i bod $J$, leží na ose úhlu $ECF$.




Obr. 40

Podle Thaletovy věty je úhel $BAC$ nad průměrem $BC$ pravý, a protože $OD$ je osa úsečky $AD$, je $OD \parallel AJ$, což spolu s $OJ \parallel DA$ znamená, že $OJAD$ je rovnoběžník. Proto $|AJ| = |OD| = r$, což spolu s rovností

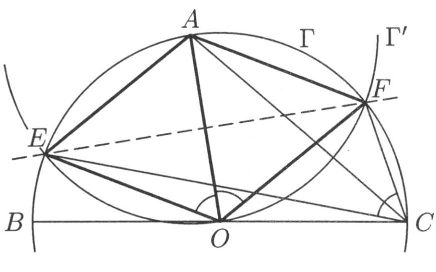
$|AE| = |AF| = r$ znamená, že trojúhelník $JFA$ je rovnoramenný. Ze shodnosti úhlů $JFA$ a $AJF$ pak plyne

$$|\sphericalangle JFE| = |\sphericalangle JFA| - |\sphericalangle EFA| = |\sphericalangle AJF| - |\sphericalangle ECA| = \\ = |\sphericalangle AJF| - |\sphericalangle JCF| = |\sphericalangle JFC|.$$

To znamená, že bod $J$ leží na ose úhlu $EFC$.

V první rovnosti právě provedeného odvození jsme využili toho, že bod $J$ je vnitřním bodem trojúhelníku $CEF$. To zaručuje podmínka $|\sphericalangle AOB| < 120°$, neboť pak leží bod $D$ uvnitř oblouku $EA$ (trojúhelník $EOA$ je rovnostranný), tedy „nad" osou $EF$ úhlopříčky $OA$ rovnoběžníku $OJAD$, takže jeho protější vrchol $J$ leží v polorovině $EFO = EFC$. (Jak snadno zjistíme, pro bod $A$ takový, že $|\sphericalangle AOB| = 120°$, vyjde $J = C$ a pro $|\sphericalangle AOB| > 120°$ padne už bod $J$ dokonce vně kruhu omezeného kružnicí $\Gamma$.)

**Jiné řešení.** Stejně jako v předchozím řešení zjistíme, že bod $J$ leží na ose úhlu $ECF$ a že $OJAD$ je rovnoběžník. Ze souměrnosti podle $EF$ navíc plyne $|AE| = |OE| = |OA|$, takže $AEO$ a $AFO$ jsou shodné rovnostranné trojúhelníky, tj. $|\sphericalangle EOF| = 120°$. Odtud jednak plyne, že úhel $ECF$ má velikost $60°$, jednak vidíme, že body $O$ a $J$ leží na kružnici $\Gamma' = (A; |AO|)$ (obr. 41), jejíž tětivě $EF$ přísluší obvodový úhel $120°$.



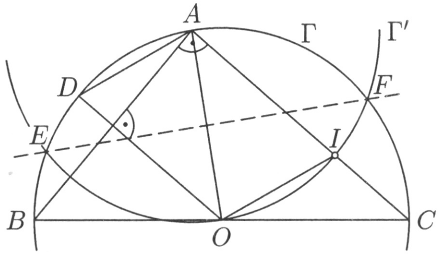

Obr. 41

Je-li $I$ střed kružnice vepsané trojúhelníku $CEF$, leží, jak už víme, na polopřímce $CA$. Pro velikost úhlu $EIF$ pak máme

$$|\sphericalangle EIF| = 180° - \tfrac{1}{2}|\sphericalangle CEF| - \tfrac{1}{2}|\sphericalangle CFE| = 90° + \tfrac{1}{2}|\sphericalangle ECF| = 120°,$$

což znamená, že i bod $I$ leží na kružnici $\Gamma'$. Ta však protíná úsečku $AC$ v jediném bodě, proto $J = I$.

Zajímavou obměnu uvedeného řešení podal náš soutěžící *J. Hájek*, který využil pomocnou kružnici $\Gamma'$ se středem v bodě $A$ a poloměrem shodným s poloměrem $r$ kružnice $\Gamma$ (obr. 42) a následující planimetrické




Obr. 42

tvrzení: *Je-li* $\Gamma$ *kružnice opsaná trojúhelníku bod* $CEF$ *a bod* $A$ *střed toho jejího oblouku* $EF$*, na kterém neleží vrchol* $C$*, pak vrcholy* $E$*,* $F$*, střed kružnice vepsané a střed kružnice připsané straně* $EF$ *trojúhelníku* $CEF$ *leží na téže kružnici se středem v bodě* $A$*.*

V naší úloze z podmínky $|\sphericalangle AOB| < 120°$ plyne, že $|AC| > r$, takže kružnice $\Gamma'$ protne úsečku $AC$ v některém vnitřním bodě, který označíme $I$. Protože kružnice $\Gamma'$ prochází body $E$, $F$ a polopřímka $CA$ je osou úhlu $ECF$, je podle zmíněného tvrzení bod $I$ středem kružnice vepsané trojúhelníku $CEF$. Stačí tedy ukázat, že bod $I$ splývá s bodem $J$ ze zadání úlohy. K tomu si všimneme, úsečky $AI$ a $DO$ mají stejnou délku $r$ a jsou obě kolmé k přímce $AB$ (úhel $BAC$ je obvodový úhel nad průměrem $BC$ kružnice $\Gamma$, přímka $OD$ je osou souměrnosti úsečky $AB$). To znamená, že $ADOI$ je rovnoběžník, tudíž $I$ je ten bod přímky $AC$, pro který platí $DA \parallel OI$, a proto $I = J$.

**3.** Předpokládejme, že dvojice přirozených čísel $(m, n)$ má požadovanou vlastnost. Zřejmě platí $m > n$, v případě $m \leqq n$ by totiž pro každé $a > 1$ platilo

$$0 < \frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1} < 1.$$

Při dělení mnohočlenu $F(x) = x^m + x - 1$ mnohočlenem $G(x) = x^n +$ $+ x^2 - 1$ najdeme mnohočleny $Q$, $R$ s celočíselnými koeficienty splňující rovnost $F(x) = Q(x)G(x) + R(x)$, přičemž stupeň mnohočlenu $R$ je menší než stupeň $G$ — to znamená, že

$$\frac{R(x)}{G(x)} \to 0 \quad \text{pro } x \to \infty, \tag{1}$$

zároveň však z rovnosti

$$\frac{F(a)}{G(a)} = Q(a) + \frac{R(a)}{G(a)}$$

podle podmínky úlohy plyne, že podíl $R(a)/G(a)$ je celé číslo pro nekonečně mnoho přirozených čísel $a$. To vzhledem k (1) znamená, že jen pro konečný počet z nich je $R(a)/G(a) \neq 0$, takže mnohočlen $R$ má nekonečně mnoho kořenů, je tudíž nulový: $R(x) = 0$ pro každé $x$. Označíme-li nyní $k = m - n > 0$, pak z vyjádření

$$Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{x^{n+k} + x - 1}{x^n + x^2 - 1} = x^k + \frac{-x^{k+2} + x^k + x - 1}{x^n + x^2 - 1} \tag{2}$$

vyplývá, že mnohočlen $G(x) = x^n + x^2 - 1$ dělí mnohočlen $-x^{k+2} + x^k + {}$ $+ x - 1$, který lze rozložit na součin $(1 - x)(x^{k+1} + x^k - 1)$. Protože $G(1) =$ $= 1 \neq 0$, mnohočlen $G(x)$ dělí dokonce mnohočlen $H(x) = x^{k+1} + x^k - 1$, mezi jejich stupni tudíž platí vztah $n \leqq k+1$. Z nerovností $G(0) = -1 < 0$ a $G(1) = 1 > 0$ usoudíme, že $G(s) = 0$ pro některé reálné číslo $s \in (0, 1)$. Potom ovšem rovněž $H(s) = 0$, takže $s^n + s^2 - 1 = s^{k+1} + s^k - 1$, neboli $s^n - s^{k+1} = s^k - s^2$. Levá strana poslední rovnosti je nezáporná (platí totiž $0 < s < 1$ a $n \leqq k + 1$), takže podle pravé strany musí být $k \leqq 2$. Podle zadání úlohy však platí $n \geqq 3$, tudíž z nerovností $n \leqq k+1$ a $k \leqq 2$ vychází $n = 3$ a $k = 2$, odkud $m = n + k = 5$. Dvojice $(m, n) = (5, 3)$ má skutečně požadovanou vlastnost:

$$\frac{x^5 + x - 1}{x^3 + x^2 - 1} = x^2 - x + 1.$$

*Poznámka.* Podané řešení vypadá zdánlivě jednoduše. Rozhodujícím obratem je „částečné“ vydělení (2), bez něhož bychom následným postupem došli k rovnosti $s^{n+k} + s = s^n + s^2$, jejíž rozbor (původní autorské řešení) je velmi náročný.[7]

---

[7] Úpravu (2) a její účinnost objevil ještě před vlastní soutěží vedoucí bulharské delegace *Sava Grozdev*. Nezměnilo to však nic na názoru poroty, že úloha je nejobtížnější z celé vybrané šestice. Výsledky soutěžících (nejen našich) to pak potvrdily.

**4.** a) Patří-li číslo $d$ k dělitelům čísla $n$, patří k nim i číslo $n/d$. Proto je rostoucí $k$-tice dělitelů $n/d_k, n/d_{k-1}, \dots, n/d_1$ shodná s původní rostoucí $k$-ticí (všech!) dělitelů $d_1, d_2, \dots, d_k$. S ohledem na zřejmé nerovnosti $k \leqq n$ a $d_j \geqq j$ tudíž platí

$$\begin{aligned}
D &= d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k = \\
&= \frac{n}{d_k} \cdot \frac{n}{d_{k-1}} + \frac{n}{d_{k-1}} \cdot \frac{n}{d_{k-2}} + \ldots + \frac{n}{d_2} \cdot \frac{n}{d_1} = \\
&= n^2\Big(\frac{1}{d_1d_2} + \frac{1}{d_2d_3} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1}d_k}\Big) \leqq \\
&\leqq n^2\Big(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}\Big) = \\
&= n^2\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) = \\
&= n^2\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) < n^2.
\end{aligned}$$

b) Ukážeme, že číslo $D$ dělí číslo $n$, právě když $n$ je prvočíslo. Je-li $n$ prvočíslo, pak $k = 2$, $d_1 = 1$, $d_2 = n$ a $D = 1 \cdot n = n$, což je skutečně dělitel čísla $n^2$.

Předpokládejme dále, že číslo $n$ je složené, a označme $p$ jeho nejmenší prvočíselný dělitel. Potom platí $k > 2$ a $d_{k-1} = n/p$, odkud dostáváme

$$D = d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k > d_{k-1}d_k = \frac{n}{p} \cdot n = \frac{n^2}{p},$$

což dohromady s dokázanou částí a) vede k odhadu $n^2/p < D < n^2$. Odtud již plyne, že $D$ nedělí $n^2$, neboť číslo $n^2/p$ je po čísle $n^2$ druhý největší dělitel čísla $n^2$.

**5.** Snadno ověříme, že mezi funkce splňující danou funkcionální rovnici patří funkce určené vzorci $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = \frac{1}{2}$ a $f_3(x) = x^2$. Ukážeme, že žádná jiná funkce $f$ požadovanou vlastnost nemá.

Dosazením $x = y = z = 0$ do dané rovnice dostaneme $2f(0)\big(f(0) + f(t)\big) = 2f(0)$ pro každé $t$. Speciálně pro $t = 0$ vychází $4f(0)^2 = 2f(0)$, takže buď $f(0) = 0$, nebo $f(0) = \frac{1}{2}$. V případě $f(0) = \frac{1}{2}$ podle předchozího platí $\frac{1}{2} + f(t) = 1$, a tedy $f(t) = \frac{1}{2}$ pro každé $t$.

Předpokládejme nyní, že $f(0) = 0$. Volbou $z = t = 0$ v dané rovnici dostaneme $f(xy) = f(x)f(y)$ pro libovolná $x$, $y$. Takovou funkci $f$ nazýváme multiplikativní. Speciálně platí $f(1) = f(1)^2$, takže buď $f(1) = 0$, nebo $f(1) = 1$. V případě $f(1) = 0$ ovšem $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x) \cdot f(1) = 0$, tj. $f(x) = 0$ pro každé $x$.

Zbývá tedy prozkoumat případ, kdy $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$. Dosadíme-li $x = 0$ a $y = t = 1$ do (1), dostaneme $2f(z) = f(-z) + f(z)$, tedy $f(z) = f(-z)$ pro každé $z$, to znamená, že $f$ je sudá funkce. Ukážeme-li proto dále, že $f(x) = x^2$ pro každé $x > 0$, bude stejný vzorec platit pro každé reálné číslo $x$. Položíme-li v dané rovnici $y = z = t = 1$, dostaneme pro každé $x$ rovnost

$$2(f(x) + 1) = f(x - 1) + f(x + 1),$$

ze které lze vypočítat hodnotu $f(x+1)$, známe-li hodnoty $f(x)$ a $f(x - 1)$. Tímto postupem lze rutinní indukcí ověřit, že $f(n) = n^2$ pro každé *přirozené* číslo $n$ (jak je tomu pro $n = 0$ a $n = 1$). Odtud už s ohledem na to, že $f$ je multiplikativní, poměrně snadno vyplývá, že rovnost $f(x) = x^2$ platí pro každé kladné *racionální* číslo $x$. Skutečně, ke každému takovému $x$ existuje přirozené $n$ takové, že číslo $nx$ je přirozené; jak už víme, rovnosti $f(n) = n^2$ a $f(nx) = (nx)^2$ platí, v jejich důsledku dostáváme

$$n^2x^2 = (nx)^2 = f(nx) = f(n)f(x) = n^2f(x),$$

odkud $f(x) = x^2$. Poslední rovnost bude platit i pro kladná *iracionální* čísla $x$, když ukážeme, že funkce $f$ je na intervalu $(0, \infty)$ neklesající. Všimněme si předně, že pro každé reálné $x$ platí $f(x) = f\left(\sqrt{|x|}\right)^2 \geqq 0$; proto má funkce $f$ pouze nezáporné hodnoty. Je-li $0 < v < u$, pak

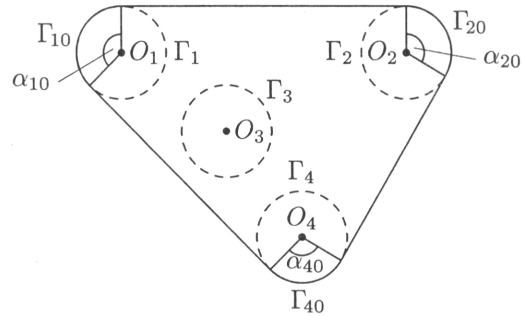
$$f(v) = f(\sqrt{v})^2 = \left(f(\sqrt{v}) + 0\right)^2 \leqq \left(f(\sqrt{v}) + f(\sqrt{u - v})\right)^2 = f(u),$$

kde poslední rovnost plyne z dané rovnice volbou $x = t = \sqrt{v}$ a $y = z = \sqrt{u - v}$. Ukázali jsme, že $f$ je skutečně na intervalu $(0, \infty)$ neklesající a celý důkaz je hotov.

**6.** Důkaz, který uvedeme, patří vedoucímu kolumbijské delegace *F. Ardilovi* a je podstatně jednodušší než původní autorské řešení.

Poznamenejme nejprve, že žádné dvě z daných kružnic nemají společný bod, neboť společným bodem dvou kružnic $\Gamma_i$, $\Gamma_j$ by bylo možno vést přímku, která protíná libovolnou třetí kružnici $\Gamma_k$.

Uvažujme nyní konvexní obal rovinné množiny, která je sjednocením dané $n$-tice kružnic. Hranice tohoto obalu se skládá z několika úseků společných vnějších tečen dvojic daných kružnic a několika jejich oblouků (obr. 43). Příslušný oblouk kružnice $\Gamma_i$ označíme $\Gamma_{i0}$ a jeho velikost




Obr. 43

v radiánech $\alpha_{i0}$.[8] Protože zkoumaná hranice je hladká uzavřená křivka, zřejmě platí rovnost

$$\alpha_{10} + \alpha_{20} + \ldots + \alpha_{n0} = 2\pi. \tag{1}$$

Dále budeme potřebovat tuto vlastnost každého oblouku $\Gamma_{i0}$: je-li $T$ libovolný vnitřní bod oblouku $\Gamma_{i0}$, pak tečna ke kružnici $\Gamma_i$ s bodem dotyku $T$ nemá společný bod s žádnou další kružnicí $\Gamma_j$, $j \neq i$.

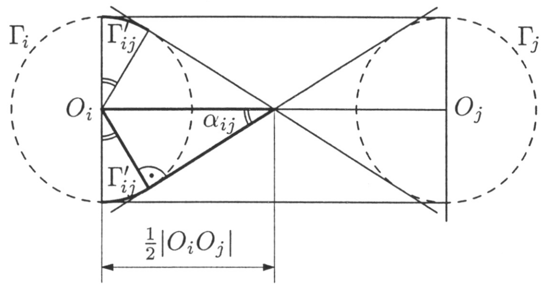
Vyberme nyní libovolné dvě dané kružnice $\Gamma_i$, $\Gamma_j$ a na první z nich, kružnici $\Gamma_i$, uvažujme body $T$ s touto vlastností: tečna ke kružnici $\Gamma_i$ s bodem dotyku $T$ má aspoň jeden společný bod s kružnicí $\Gamma_j$. Všechny takové body $T$ vyplní na kružnici $\Gamma_i$ dva shodné oblouky $\Gamma_{ij}$ a $\Gamma'_{ij}$, jejichž krajní body jsou body dotyku společných tečen dané dvojice kružnic (obr. 44). Pro velikost $\alpha_{ij}$ těchto oblouků podle obrázku platí

$$\sin \alpha_{ij} = \frac{1}{\frac{1}{2}|O_iO_j|}, \quad \text{odkud} \quad \frac{1}{|O_iO_j|} = \frac{\sin \alpha_{ij}}{2} < \frac{\alpha_{ij}}{2}, \tag{2}$$

neboť $\sin \alpha < \alpha$ pro každé $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$.

Podle předchozího popisu jsme na každé kružnici $\Gamma_i$ vyčlenili $2n - 1$ oblouků: oblouk $\Gamma_{i0}$ a $(n - 1)$ párů oblouků $\Gamma_{ij}$ a $\Gamma'_{ij}$, kde $j \in$ $\in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$. Podle zadání úlohy žádné dva z těchto $(2n - 1)$

[8] Má-li kružnice $\Gamma_i$ s hranicí obalu společný nejvýše jeden bod, položíme $\Gamma_{i0} = \emptyset$ a $\alpha_{i0} = 0$.




Obr. 44

oblouků nemají společný vnitřní bod, takže pro součet jejich velikostí platí odhad

$$\alpha_{i0} + 2 \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq n,\\ j \neq i}} \alpha_{ij} \leqq 2\pi,$$

který spolu s (2) vede k nerovnosti

$$\sum_{\substack{1 \leqq j \leqq n,\\ j \neq i}} \frac{1}{|O_iO_j|} < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\alpha_{i0}$$

pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Sečteme-li těchto $n$ nerovností, pak s ohledem na vztah (1) a zřejmé rovnosti $|O_iO_j| = |O_jO_i|$ dostaneme

$$2 \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \frac{1}{|O_iO_j|} < n \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i0} = \frac{(n-1)\pi}{2},$$

odkud po dělení dvěma vychází kýžená nerovnost.