53. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie C

In: Karel Horák (editor); Jan Kára (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor); Jaroslav Zhouf (editor): 53. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2003/2004. 45. mezinárodní matematická olympiáda. 16. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2006. pp. 26–45.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405073

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n, které je větší než 3 a není dělitelné třemi, platí: Šachovnici $n \times n$ lze rozřezat na jeden čtverec 1×1 a obdélníky 3×1. (*J. Zhouf*)

C – I – 2

Je dán obdélník $ABCD$. Nechť přímky p a q, které procházejí vrcholem A, protínají polokružnice vně připsané stranám BC a CD daného obdélníku po řadě v bodech K a L ($B \neq K \neq C \neq L \neq D$) a rovněž strany BC a CD po řadě v bodech P a Q tak, že trojúhelník ABP má stejný obsah jako trojúhelník KCP a zároveň trojúhelník AQD má stejný obsah jako trojúhelník CLQ. Dokažte, že body K, L, C leží na téže přímce.

(*J. Švrček*)

C – I – 3

Žák měl vypočítat příklad $X \cdot Y : Z$, kde X je dvojmístné číslo, Y trojmístné číslo a Z trojmístné číslo s číslicí 2 na místě jednotek. Výsledkem příkladu mělo být přirozené číslo. Žák však tečku přehlédl a součin $X \cdot Y$ chápal jako pětimístné číslo. Získal tak sedmkrát větší výsledek, než měl vyjít. Jaký příklad měl žák počítat? (*P. Černek*)

C – I – 4

Nechť P je libovolný vnitřní bod rovnostranného trojúhelníku ABC. Uvažujme obrazy K, L a M bodu P v osových souměrnostech s osami AB, BC a CA. Určete množinu všech bodů P takových, že trojúhelník KLM je rovnoramenný. (*J. Zhouf*)

C – I – 5

Přirozené číslo nazveme *magickým*, právě když je lze rozložit na součet dvou trojmístných čísel zapsaných stejnými číslicemi, ale v opačném pořadí. Například číslo 1 413 je magické, neboť platí $1\,413 = 756 + 657$; nejmenší magické číslo je 202.

a) Určete počet všech magických čísel.

b) Ukažte, že součet všech magických čísel je roven 187 000. (*J. Šimša*)

C – I – 6

Ze všech čtyřúhelníků, jež lze vepsat do kružnice o daném poloměru r a které mají dvě strany dané délky m, určete ten, který má největší obsah. (*P. Leischner*)

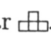
C – S – 1

Určete počet všech trojmístných čísel, která jsou devatenáctkrát větší než součet jejich číslic. (*J. Šimša*)

C – S – 2

Je dán čtverec o straně délky 5 cm. Mezi všemi čtyřúhelníky, které leží v tomto čtverci tak, že dvě jejich strany mají délku 2 cm a leží na hranici čtverce, určete všechny ty, které mají maximální obsah. (*P. Leischner*)

C – S – 3

Dlaždičky A složené ze tří jednotkových čtverců mají tvar , dlaždičky B složené ze čtyř jednotkových čtverců mají tvar . Kolik dlaždiček jednotlivých typů potřebujeme na vydlaždičkování čtverce o straně 6 jednotek? Pro každý možný počet dlaždiček uveďte příklad takového pokrytí. (*J. Földes*)

C – II – 1

V rovině je dán obdélník $ABCD$, kde $|AB| = a < b = |BC|$. Na jeho straně BC existuje bod K a na straně CD bod L tak, že daný obdélník je úsečkami AK, KL a LA rozdělen na čtyři navzájem podobné trojúhelníky. Určete hodnotu poměru $a : b$. (*J. Švrček*)

C – II – 2

Najděte všechny trojice prvočísel p, q a r, pro které platí

$$\frac{14}{p}+\frac{51}{q}=\frac{65}{r}.$$

(*P. Novotný*)

C – II – 3

Do kružnice o poloměru $r=6$ vepište osmiúhelník $ABCDEFGH$, jehož strany AB, CD, EF a GH mají po řadě délky 3, 4, 5 a 6 a strany BC, DE, FG a HA jsou shodné. (*P. Novotný*)

C – II – 4

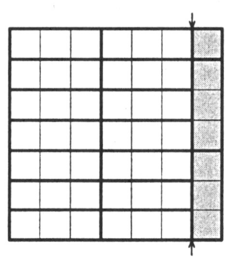
Žáci měli vypočítat příklad $x+y\cdot z$ pro trojmístné číslo x a dvojmístná čísla y a z. Martin umí násobit a sčítat čísla zapsaná v desítkové soustavě, zapomněl však na pravidlo o přednosti násobení před sčítáním. Proto mu sice vyšlo zajímavé číslo, které se čte stejně zleva doprava jako zprava doleva, správný výsledek byl ale o 2004 menší. Určete čísla x, y a z.

(*J. Šimša*)

C – I – 1

Budeme-li přemýšlet, jak navrhovat postupy řezání šachovnic velkých rozměrů, jistě nás napadne myšlenka, že na obdélníky 3×1 lze rozřezat každý „pás“ šachovnice tvořený třemi sousedními řádky nebo sloupci. Takové pásy se proto vyplatí od šachovnice opakovaně odřezávat (dokud je to možné), a tak zmenšovat její rozměry o násobky tří. Proto bude pro naši úlohu o šachovnici $n \times n$ výhodné rozlišit, zda dané číslo $n > 3$ dává při dělení třemi zbytek 1, anebo zbytek 2 (zbytek 0 je zadáním vyloučen). Každý z těchto případů prozkoumáme odděleně.

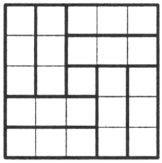
Případ $n = 3k+1$. Nejprve z šachovnice $(3k+1) \times (3k+1)$ odřežeme pás prvních $3k$ sloupců, tedy obdélník $(3k+1) \times 3k$, který pak rozřežeme (po trojicích sloupců) na k pásů $(3k+1) \times 3$ a každý z nich konečně rozřežeme na $3k+1$ obdélníků 1×3. Z původní šachovnice nám pak zůstane nerozřezán poslední sloupec; protože má $3k+1$ polí, snadno ho rozřežeme na jeden čtverec 1×1 a k obdélníků 3×1. Na obr. 1 je znázorněno výsledné rozřezání šachovnice 7×7 (počáteční odřezání pásu 7×6 je vyznačeno šipkami, zbylý sloupec je šedý). Ze stejného obrázku nahlédneme i způsob řešení pro $n = 4$.



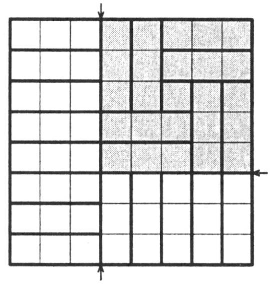
Obr. 1

Případ $n = 3k+2$. Kdybychom šachovnici $(3k+2) \times (3k+2)$ důsledně „ořezávali“ postupem z úvodu řešení, dostali bychom (po oddělení dvou pásů $(3k+2) \times 3k$ a $3k \times 2$) jako zbytek šachovnici 2×2, kterou však není možné rozřezat požadovaným způsobem (na díly 1×1 a 3×1). To je možné provést až s „následující“ šachovnicí 5×5, jak vidíme na obr. 2.

Zbývá popsat, jak každou větší šachovnici $(3k+2) \times (3k+2)$ řezáním zredukovat na právě posouzený čtverec 5×5. Nejprve oddělíme pás $(3k+ + 2) \times (3k-3)$ tvořený prvními $(k-1)$ trojicemi sloupců šachovnice;



Obr. 2



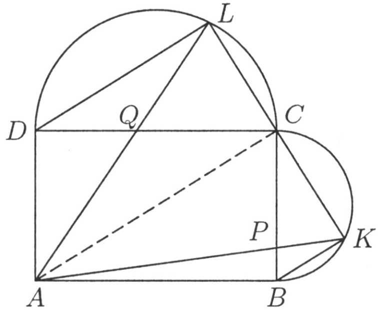
Obr. 3

ze zbylé šachovnice $(3k + 2) \times 5$ pak oddělíme pás $(3k - 3) \times 5$ tvořený jejími posledními $(k-1)$ trojicemi řádků, z původní šachovnice pak zbude kýžený čtverec 5×5 v pravém horním rohu (šedý na obr. 3 pro šachovnici 8×8).

Dodejme, že při řešení dané úlohy jsme nebrali v úvahu obarvení polí šachovnice. Barvy polí se uplatňují v jiných situacích, zejména tehdy, když potřebujeme dokázat, že rozřezání šachovnice na díly předepsaného tvaru není možné (doplňující úlohy 4 a 5).

C – I – 2

Trojúhelníky ABP a KCP mají podle zadání stejné obsahy; připojíme-li ke každému z nich trojúhelník ACP (obr. 4), usoudíme, že stejné obsahy mají i trojúhelníky ABC a AKC. Protože strana AC je oběma těmto trojúhelníkům společná, obě k ní příslušné výšky musí být shodné. Body B a K tudíž mají stejnou vzdálenost od přímky AC (a leží ve stejné polorovině touto přímkou určené). To znamená, že $BK \parallel AC$. Podle Thaletovy věty ovšem platí $BK \perp CK$, takže platí rovněž $AC \perp CK$.



Obr. 4

Podobně z rovnosti obsahů trojúhelníků AQD, CLQ a kolmosti přímek CL a DL odvodíme, že $AC \perp CL$. Dohromady to znamená, že úhel KCL je složen ze dvou pravých úhlů ACK a ACL. Body K a L tudíž leží na přímce, která prochází bodem C kolmo k úhlopříčce AC.

C – I – 3

Protože Y je trojmístné číslo, pětimístné číslo se zápisem XY je číslo $1\,000X+Y$. Žák tedy počítal příklad $(1\,000X+Y) : Z$ a podle textu úlohy mu v porovnání s původním příkladem vyšel sedmkrát větší výsledek, tedy

$$\frac{1\,000X+Y}{Z} = 7 \cdot \frac{X \cdot Y}{Z}.$$

Odtud po násobení číslem Z dostaneme rovnici $1\,000X + Y = 7XY$, kterou vyřešíme vzhledem k neznámé Y:

$$Y = \frac{1\,000X}{7X-1}.$$

Pro která X je poslední zlomek celočíselný? Jinak vyjádřeno: kdy je číslo $1\,000X$ dělitelné číslem $7X-1$? Protože čísla X a $7X-1$ jsou nesoudělná (nesoudělná jsou totiž dvě po sobě jdoucí čísla $7X-1$ a $7X$), hledáme ta X, pro která číslo $7X-1$ dělí číslo $1\,000$. Abychom nemuseli vypisovat všechny dělitele čísla $1\,000$, uvědomíme si, že X je dvojmístné, tudíž $69 \leqq 7X-1 \leqq 692$. Rozložme proto číslo $1\,000$ všemi způsoby na součin dvou činitelů tak, aby jeden (řekněme první) z činitelů byl z intervalu $\langle 69, 692\rangle$:

$$1\,000 = 500 \cdot 2 = 250 \cdot 4 = 200 \cdot 5 = 125 \cdot 8 = 100 \cdot 10.$$

Z rovnic

$$7X-1=500,\ 7X-1=250,\ 7X-1=200,\ 7X-1=125,\ 7X-1=100$$

má jedině rovnice $7X-1=125$ celočíselné řešení $X=18$, pro něž vychází $Y = 1\,000X/(7X-1) = 1\,000 \cdot 18/125 = 144$.

Nyní určíme neznámé číslo Z. Využijeme k tomu podmínku úlohy, že hodnota výrazu $X \cdot Y : Z$ je přirozené číslo. Protože $X = 18$ a $Y = 144$, jedná se o číslo $18 \cdot 144 : Z$, tedy číslo $2^5 \cdot 3^4 : Z$. Takové číslo je celé, právě když má číslo Z rozklad na prvočinitele tvaru $2^a 3^b$, kde $0 \leqq a \leqq 5$ a $0 \leqq b \leqq 4$. Exponenty a, b najdeme z podmínky, že číslo $Z = 2^a 3^b$ je podle zadání trojmístné a na místě jednotek má číslici 2. Protože $3^4 = 81$ a $2^5 \cdot 3 = 96$, musí být $a \geqq 1$ a $b \geqq 2$. Všechna čísla $2^a 3^b$, kde $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $b \in \{2, 3, 4\}$, teď vypíšeme do tabulky:

$b \backslash a$	1	2	3	4	5
2	18	36	72	144	288
3	54	108	216	432	864
4	162	324	648	1 296	2 592

Z vypočtených čísel mají požadovanou vlastnost pouze čísla $Z = 432 = 2^4 3^3$ a $Z = 162 = 2^1 3^4$.

Odpověď: Úloha má dvě řešení. Žák měl počítat buď příklad $18 \cdot 144 : 432$, nebo příklad $18 \cdot 144 : 162$.

Jiné řešení. Jako v prvním řešení odvodíme vyjádření

$$Y = \frac{1\,000X}{7X - 1},$$

tentokrát však získaný zlomek upravíme částečným vydělením čísla 1 000 číslem 7. Na základě rovnosti $1\,000 = 7 \cdot 143 - 1$ dostáváme

$$Y = \frac{1\,000X}{7X - 1} = \frac{143(7X - 1) + 143 - X}{7X - 1} = 143 + \frac{143 - X}{7X - 1}.$$

Aby bylo Y celé, musí být poslední zlomek $(143 - X)/(7X - 1)$ celočíselný. Protože číslo X je dvojmístné, náš zlomek splňuje odhady

$$\frac{143 - 99}{7 \cdot 99 - 1} < \frac{143 - X}{7X - 1} < \frac{143 - 10}{7 \cdot 10 - 1}.$$

Levý zlomek je roven $44/692$, pravý je roven $133/69$, takže jediná možná celočíselná hodnota prostředního zlomku je rovna 1. Musí tedy být $Y = 144$. Rovnice

$$\frac{143 - X}{7X - 1} = 1$$

pak má jediné řešení $X = 18$. Dále už postupujeme jako v prvním řešení.

Další řešení. Dříve získanou rovnici $1\,000X + Y = 7XY$ upravíme do součinového tvaru $Y = X \cdot (7Y - 1\,000)$. Musí proto platit $7Y - 1\,000 > 0$, odkud

$$Y > \frac{1\,000}{7} > 142, \quad \text{neboli} \quad Y \geqq 143.$$

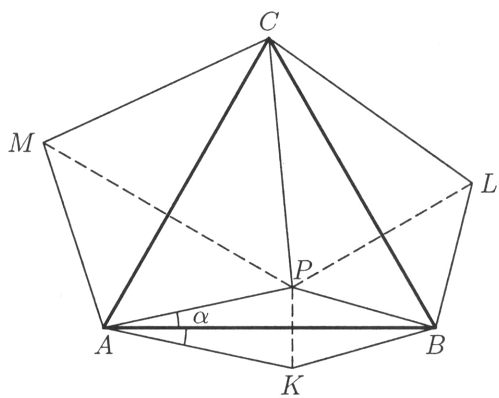
Číslo X je dvojmístné, proto z rovnosti $Y = X \cdot (7Y - 1\,000)$ vychází odhad

$$Y \geqq 10 \cdot (7Y - 1\,000), \quad \text{neboli} \quad Y \leqq \frac{10\,000}{69} < 145.$$

Dohromady dostáváme, že číslo Y je rovno jednomu z čísel 143 nebo 144. Rovnice $143 = X \cdot (7 \cdot 143 - 1\,000)$ má řešení $X = 143$, což ovšem není dvojmístné číslo; rovnice $144 = X \cdot (7 \cdot 144 - 1\,000)$ má řešení $X = 18$. Tak jsme znovu ukázali, že $X = 18$ a $Y = 144$; číslo Z určíme jako v prvním řešení.

C – I – 4

Označme $\alpha = |\sphericalangle BAP|, 0° < \alpha < 60°$ (obr. 5). Protože úhly BAP a BAK



Obr. 5

jsou souměrně sdružené podle osy AB, platí rovněž $|\sphericalangle BAK| = \alpha$. Protože $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CAB| - |\sphericalangle BAP| = 60° - \alpha$, ze souměrnosti podle osy CA plyne rovnost $|\sphericalangle CAM| = 60° - \alpha$. Pro velikost úhlu KAM tudíž platí

$$|\sphericalangle KAM| = |\sphericalangle BAK| + |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAM| = \alpha + 60° + (60° - \alpha) = 120°.$$

Ze souměrností podle os AB a CA rovněž plynou rovnosti $|AK| = |AP| = |AM|$. Proto je trojúhelník KAM rovnoramenný a jeho úhel při hlavním vrcholu A má velikost 120°. Podobně se zdůvodní, proč i trojúhelníky LBK a MCL jsou rovnoramenné a jejich vnitřní úhly při hlavních vrcholech B a C mají velikost 120°.

Při posuzování podmínky, že trojúhelník KLM je rovnoramenný, musíme rozlišit, které z jeho stran KL, LM, MK jsou shodné. S ohledem na symetrii rozebereme podrobně pouze případ, kdy $|KL| = |MK|$. Z podobných rovnoramenných trojúhelníků KAM a LBK vyplývá, že jejich základny MK a KL jsou shodné, právě když jsou shodná jejich ramena AK a BK. Zapišme to pomocí délek úseček: rovnost $|KL| = |MK|$ platí, právě když platí rovnost $|AK| = |BK|$, neboli rovnost $|AP| = |BP|$. Poslední rovnost ovšem nastane, právě když bod P leží na ose strany AB. Obdobně se zjistí podmínky ekvivalentní rovnostem $|MK| = |LM|$ a $|KL| = |LM|$.

Odpověď: Trojúhelník KLM je rovnoramenný, právě když bod P leží na aspoň jedné z os stran daného rovnostranného trojúhelníku ABC. Hledaná množina je proto sjednocením tří úseček – výšek trojúhelníku ABC (bez jejich krajních bodů).

C – I – 5

Na příkladu čísla 1 413 vidíme, že někdy není snadné poznat, zda dané trojmístné či čtyřmístné číslo je magické či nikoliv. Podíváme se proto nejdříve, jak se magické číslo x vyjádří pomocí číslic těch trojmístných čísel $\overline{abc}$ a $\overline{cba}$, jejichž je součtem:

$$x = \overline{abc} + \overline{cba} = (100a + 10b + c) + (100c + 10b + a) = 101(a + c) + 20b.$$

Vidíme, že číslo x je určeno číslicemi a, b, c tak, že závisí jen na b a na součtu $a + c$. Znamená to, že různé trojice číslic a, b, c mohou určovat totéž magické číslo x (nemyslíme tím pouze trojice lišící se vzájemnou výměnou číslic a a c). Je-li např. $a + c = 14$ a $b = 9$, najdeme tři různá vyjádření magického čísla 1 594:

$$1\,594 = 599 + 995 = 698 + 896 = 797 + 797.$$

Existují ještě jiná „magická" vyjádření čísla 1 594? Vše závisí na tom, zda jsou rovnicí $1\,594 = 101s + 20b$ hodnoty součtu číslic $s = a + c$ a číslice b jednoznačně určeny. Z rovnice ihned vidíme, že číslo s končí číslicí 4, takže $s = 4$ nebo $s = 14$ (jiné hodnoty součtu $s = a + c$ nejsou číslicemi a, c dosažitelné). Zatímco hodnotě $s = 14$ odpovídá (jak dobře víme) hodnota $b = 9$, pro $s = 4$ dostaneme rovnici $1\,594 = 404 + 20b$, která nemá celočíselné řešení.

Poučeni uvedeným příkladem, pokusíme se stanovit počet magických čísel jako počet čísel tvaru $x = 101s + 20b$, kde číslo s (rovné součtu číslic a a c, jež jsou *nenulové*) probíhá množinu $\{2, 3, 4, \ldots, 18\}$, zatímco číslice b probíhá (nezávisle na součtu s) množinu $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Protože číslo s nabývá celkem 17 různých hodnot a číslo b celkem 10 různých hodnot, je počet všech dvojic (s, b), které můžeme do vzorce $x = 101s + 20b$ dosadit, roven číslu $17 \cdot 10 = 170$. Ukážeme-li nyní, že po dosazení libovolných dvou různých dvojic (s_1, b_1) a (s_2, b_2) dostaneme dvě různá magická čísla

$$x_1 = 101s_1 + 20b_1 \quad \text{a} \quad x_2 = 101s_2 + 20b_2,$$

bude to znamenat, že počet všech hodnot x (tedy *počet všech magických čísel*) je rovněž roven číslu 170.

Připusťme, že pro některé dvojice (s_1, b_1) a (s_2, b_2) platí $x_1 = x_2$. Rovnost $101s_1 + 20b_1 = 101s_2 + 20b_2$ upravíme do tvaru $101(s_1 - s_2) = 20(b_2 - b_1)$, z něhož vzhledem k nesoudělnosti čísel 20 a 101 vyplývá, že číslo $b_2 - b_1$ je násobkem čísla 101. Musí jít přitom o nulový násobek, neboť $|b_2 - b_1| \leqq 9$ (b_1 a b_2 jsou číslice!). Platí tedy $b_2 - b_1 = 0$, takže rovněž $s_1 - s_2 = 0$, což dohromady znamená, že dvojice (s_1, b_1) a (s_2, b_2) jsou stejné. Jen v tomto případě je tedy rovnost $x_1 = x_2$ možná.

Součet všech magických čísel (tedy čísel tvaru $x = 101s + 20b$) určíme výhodně, když čísla nejprve uspořádáme do obdélníkového schématu (podle stejných hodnot s do řádků a podle stejných hodnot b do sloupců)

$$\begin{array}{ccccc}
101 \cdot 2 + 20 \cdot 0 & 101 \cdot 2 + 20 \cdot 1 & 101 \cdot 2 + 20 \cdot 2 & \ldots & 101 \cdot 2 + 20 \cdot 9 \\
101 \cdot 3 + 20 \cdot 0 & 101 \cdot 3 + 20 \cdot 1 & 101 \cdot 3 + 20 \cdot 2 & \ldots & 101 \cdot 3 + 20 \cdot 9 \\
101 \cdot 4 + 20 \cdot 0 & 101 \cdot 4 + 20 \cdot 1 & 101 \cdot 4 + 20 \cdot 2 & \ldots & 101 \cdot 4 + 20 \cdot 9 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
101 \cdot 17 + 20 \cdot 0 & 101 \cdot 17 + 20 \cdot 1 & 101 \cdot 17 + 20 \cdot 2 & \ldots & 101 \cdot 17 + 20 \cdot 9 \\
101 \cdot 18 + 20 \cdot 0 & 101 \cdot 18 + 20 \cdot 1 & 101 \cdot 18 + 20 \cdot 2 & \ldots & 101 \cdot 18 + 20 \cdot 9
\end{array}$$

a pak čísla sečteme buď po sloupcích, nebo po řádcích. Rozhodneme se pro sčítání po sloupcích, přitom budeme brát v úvahu, o kolik se čísla uvažovaného sloupce liší od příslušných čísel prvního sloupce. Součet čísel v prvním sloupci je

$$101 \cdot (2 + 3 + \ldots + 18) = 101 \cdot 170,$$

ve druhém sloupci je součet $101 \cdot 170 + 17 \cdot 20 \cdot 1$, ve třetím $101 \cdot 170 + 17 \cdot 20 \cdot 2$, atd. až v posledním (desátém) sloupci je součet čísel roven $101 \cdot 170 + 17 \cdot 20 \cdot 9$. Součet všech magických čísel je tedy roven

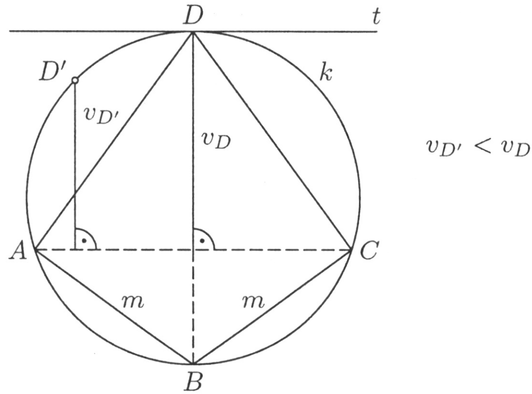
$$10 \cdot 101 \cdot 170 + 17 \cdot 20 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) = 187\,000.$$

C – I – 6

V celém řešení budeme předpokládat, že dané délky m a r splňují nerovnost $m < 2r$, jinak žádný čtyřúhelník požadovaných vlastností neexistuje. Strany délky m každého takového čtyřúhelníku jsou totiž tětivami kružnice o poloměru r a nejvýše jedna z nich může být jejím průměrem.

Zkoumané čtyřúhelníky rozdělíme do dvou skupin podle toho, zda jsou jejich strany dané délky m sousední, nebo protilehlé.

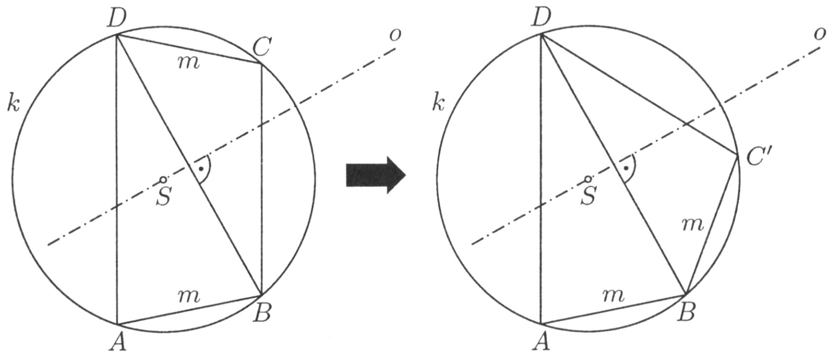
Libovolný čtyřúhelník z první skupiny označíme $ABCD$ tak, aby platilo $|AB| = |BC| = m$. Úhlopříčka rozdělí tento tětivový čtyřúhelník na dva trojúhelníky ABC a ACD (obr. 6), přitom je jasné, že první z nich,



Obr. 6

trojúhelník ABC, je poloměrem r opsané kružnice k a délkou m dvou jeho stran určen (až na shodnost) jednoznačně, takže má pevně určený obsah. Proto bude obsah takového čtyřúhelníku $ABCD$ maximální, právě když bude maximální obsah trojúhelníku ACD. Tento trojúhelník má určenou délku strany AC, takže jeho obsah bude maximální, právě když bude maximální jeho výška v_D z vrcholu D. Při pevné poloze trojúhelníku ABC bod D probíhá ten oblouk AC kružnice k, jenž neobsahuje bod B, takže výška v_D je zřejmě největší, právě když bod D je středem tohoto oblouku, leží tedy (stejně jako bod B) na ose úsečky AC. (Tvrzení zdůvodníme pomocí tečny t ke kružnici k, jež prochází nalezeným bodem D rovnoběžně s přímkou AC, obr. 6). Tak docházíme k závěru, že v první skupině má maximální obsah ten čtyřúhelník, který je deltoid (je-li $m \neq r\sqrt{2}$), respektive čtverec (je-li $m = r\sqrt{2}$).

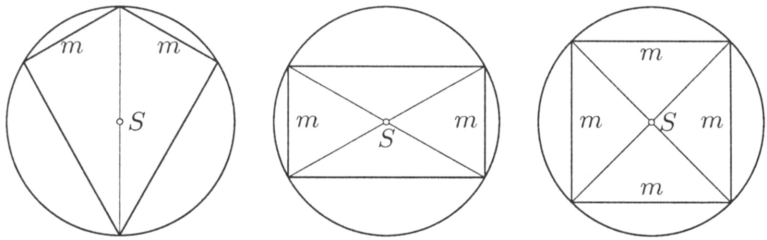
Přejděme nyní ke čtyřúhelníkům druhé skupiny. Libovolný z nich označme $ABCD$ tak, aby platilo $|AB| = |CD| = m$ (obr. 7).



Obr. 7

Obrázek ukazuje, jak k takovému čtyřúhelníku $ABCD$ sestrojit pomocný čtyřúhelník $ABC'D$, který má stejný obsah jako $ABCD$, je vepsán do téže kružnice k a má sousední strany AB a BC' dané délky m. Konstrukci teď popíšeme a zmíněné vlastnosti čtyřúhelníku $ABC'D$ podrobně zdůvodníme. Bod C' sestrojíme jako obraz bodu C v souměrnosti podle osy o úsečky BD; protože je kružnice k souměrná podle osy každé své tětivy, platí $C' \in k$. Trojúhelníky BCD a $DC'B$ jsou souměrně sdružené podle osy o, takže mají stejný obsah, tudíž stejný obsah mají i čtyřúhelníky $ABCD$ a $ABC'D$. Ze zmíněné souměrnosti rovněž plynou rovnosti $|CD| = |BC'|$ a $|BC| = |DC'|$, takže čtyřúhelníky $ABCD$ a $ABC'D$ se liší pouze „prohozením“ dvou sousedních stran. Tím jsou potřebné vlastnosti čtyřúhelníku $ABC'D$ zdůvodněny. Jak už víme z předchozího odstavce, čtyřúhelník $ABC'D$ má největší možný obsah, právě když platí rovnost $|C'D| = |AD|$, kterou můžeme přepsat jako rovnost $|BC| = |AD|$. Ta nastane, právě když je čtyřúhelník $ABCD$ rovnoběžník (neboť od počátku předpokládáme, že $|AB| = |CD|$). Každý rovnoběžník vepsaný do kružnice je ale pravoúhelník (součet protilehlých vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku je 180°, takové úhly jsou ale v případě rovnoběžníku shodné, a tedy pravé). Shrňme výsledek tohoto odstavce: ve druhé skupině čtyřúhelníků má maximální obsah ten čtyřúhelník, který je obdélník (je-li $m \neq r\sqrt{2}$), respektive čtverec (je-li $m = r\sqrt{2}$).

Celkový závěr: Hledané čtyřúhelníky s maximálním obsahem tvoří v případě $m < 2r$, $m \neq r\sqrt{2}$, dvě skupiny: skupinu shodných deltoidů



Obr. 8

a skupinu shodných obdélníků; v případě $m = r\sqrt{2}$ jsou všechny hledané čtyřúhelníky shodné čtverce (obr. 8). (V případě $m \geqq 2r$ je množina uvažovaných čtyřúhelníků prázdná.)

C – S – 1

Trojmístné číslo se zápisem $\overline{abc}$ má požadovanou vlastnost, právě když jeho číslice a, b, c splňují rovnost

$$100a + 10b + c = 19(a + b + c), \quad \text{neboli} \quad 9a = b + 2c.$$

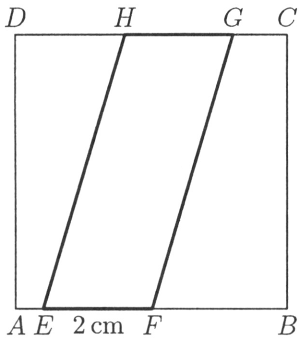
Protože $b \leqq 9$ a $c \leqq 9$, platí nerovnost $b + 2c \leqq 27$. Z rovnosti $9a = b + 2c$ proto plyne odhad $a \leqq 3$, takže platí $a \in \{1, 2, 3\}$ (číslice $a = 0$ není na začátku zápisu povolena). Pro $a = 1$ dostáváme rovnici $9 = b + 2c$, ze které plyne $c \leqq 4$; pro každé takové $c \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ je číslice b určena rovností $b = 9 - 2c$. Proto s číslicí $a = 1$ existuje právě 5 vyhovujících čísel. Právě tolik je i vyhovujících čísel s číslicí $a = 2$: z rovnice $18 = b+2c$ totiž plyne $c \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ a $b = 18 - 2c$. Konečně pro $a = 3$ z rovnice $27 = b + 2c$ plyne $b = c = 9$. Hledaný počet čísel je tedy $5 + 5 + 1 = 11$.

Jiné řešení. Součet číslic libovolného trojmístného čísla nepřevyšuje číslo 27, jehož devatenáctinásobek je 513. Proto každé vyhovující číslo nepřevyšuje 513, takže součet jeho číslic je nejvýše $4+9+9 = 22$. Protože nejmenší trojmístný násobek čísla 19 je číslo $114 = 19 \cdot 6$, bude úloha vyřešena, když zjistíme, kolik čísel tvaru $19s$, kde $s \in \{6, 7, 8, \ldots, 22\}$, má součet číslic rovný právě číslu s. Rutinní prověrkou zjistíme, že ze zmíněných 17 čísel vyhovují právě čísla 114, 133, 152, 171, 190, 209, 228, 247, 266, 285 a 399. Těchto čísel je 11.

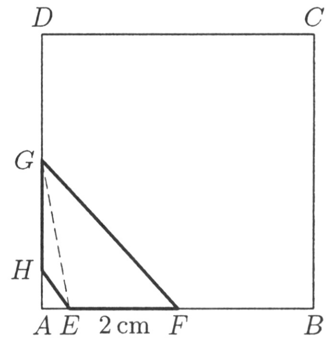
C – S – 2

Čtyřúhelník $EFGH$ můžeme do daného čtverce $ABCD$ umístit třemi způsoby:

1. Dvě strany délky 2 cm leží na protilehlých stranách daného čtverce (obr. 9). Obsah každého takového čtyřúhelníku (rovnoběžníku) je $S = 5 \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 = 10\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 9

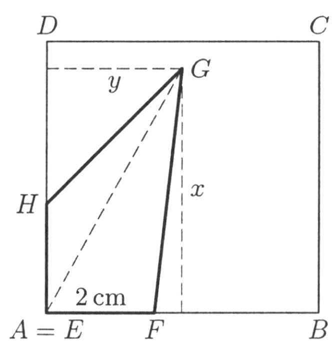


Obr. 10

2. Obě strany délky 2 cm leží na sousedních stranách daného čtverce a přitom jsou protilehlými stranami čtyřúhelníku $EFGH$ (obr. 10). Obsah takového čtyřúhelníku je

$$S = \frac{1}{2}|EF| \cdot |AG| + \frac{1}{2}|GH| \cdot |AE| = \frac{1}{2} \cdot 2\,\mathrm{cm} \cdot |AG| + \frac{1}{2} \cdot 2\,\mathrm{cm} \cdot |AE| \leqq$$
$$\leqq \big(5 + (5 - 2)\big)\,\mathrm{cm}^2 = 8\,\mathrm{cm}^2 < 10\,\mathrm{cm}^2.$$

3. Obě strany délky 2 cm leží na sousedních stranách daného čtverce a přitom jsou sousedními stranami čtyřúhelníku $EFGH$ (obr. 11). Ozna-



Obr. 11

číme-li po řadě x a y vzdálenosti bodu G od stran AB a AD (tedy výšku trojúhelníku EFG na stranu EF a výšku trojúhelníku EHG na stranu EH), je obsah takového čtyřúhelníku

$$S = \frac{1}{2}|EF| \cdot x + \frac{1}{2}|AH| \cdot y \leqq 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 10\,\text{cm}^2.$$

Přitom rovnost nastane, právě když $x = y = 5\,\text{cm}$, tj. právě když $G = C$.

Závěr: Největší možný obsah ($10\,\text{cm}^2$) mají všechny rovnoběžníky, jejichž dvě strany délky 2 cm leží na protějších stranách daného čtverce, a čtyři deltoidy, jejichž jedna úhlopříčka je zároveň úhlopříčkou daného čtverce.

C – S – 3

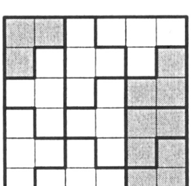
Předpokládejme, že čtverec o straně 6 jednotek je vydlaždičkován a dlaždičkami A a b dlaždičkami B (nevylučujeme případ, že $a = 0$ nebo $b = 0$). Pro obsah vydlaždičkované plochy pak platí rovnost $36 = 3a + 4b$, ze které plyne, že číslo a je násobkem čtyř (a číslo b násobkem tří). Proto má rovnice $36 = 3a + 4b$ v oboru celých nezáporných čísel za řešení pouze tyto dvojice (a, b): $(0, 9)$, $(4, 6)$, $(8, 3)$ a $(12, 0)$. Posoudíme dále, zda pro jednotlivé dvojice (a, b) je příslušné vydlaždičkování daného čtverce možné.

(i) 9 dlaždiček B. Vysvětlíme, proč takové vydlaždičkování neexistuje. Obarvěme jednotkové čtverečky celého čtverce jako obvyklou šachovnici; získáme 18 černých a 18 bílých „polí". Každá dlaždička B pokrývá tři pole jedné barvy a jedno pole druhé barvy. Připusťme, že celý čtverec pokrývá 9 dlaždiček B, přitom právě x z nich má tu vlastnost, že pokrývají po 3 černých polích, takže $9 - x$ z nich má tu vlastnost, že pokrývají po 1 černém poli. Pro celkový počet černých polí pak platí rovnost $18 = 3x + (9 - x)$, odkud $x = 9/2$, což je spor.

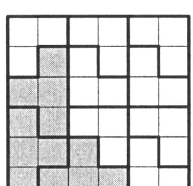
(ii) 4 dlaždičky A a 6 dlaždiček B. Možné řešení vidíte na obr. 12.

(iii) 8 dlaždiček A a 3 dlaždičky B. Možné řešení vidíte na obr. 13.

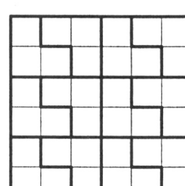
(iv) 12 dlaždiček A. Možné řešení vidíte na obr. 14.



Obr. 12



Obr. 13

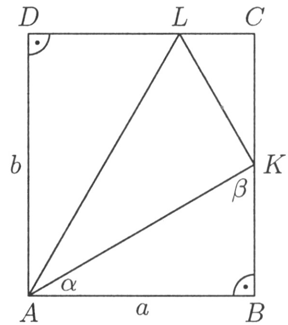


Obr. 14

Poznámka. Uveďme ještě jiný argument, proč nelze devíti dlaždičkami B vyplnit uvažovaný čtverec. Dlaždička, která pokrývá rohové pole, může být umístěna (až na souměrnost podle úhlopříčky čtverce) jediným způsobem, např. tak jako dlaždička B v levém dolním rohu čtverce na obr. 13, pak ale dlaždička B, která v takovém případě pokrývá druhé pole zleva v dolní řadě, musí být v poloze jako na obrázku. Poslední dvě pole dolní řady pak už jednou ani dvěma dlaždičkami B pokrýt nelze.

C – II – 1

V pravoúhlém trojúhelníku ABK označme $\alpha = |\sphericalangle BAK|$, $\beta = |\sphericalangle AKB| = 90° - \alpha$ (obr. 15). Stejné vnitřní úhly 90°, α, β mají



Obr. 15

i trojúhelníky AKL a ADL, neboť jsou dle zadání trojúhelníku ABK podobné. Všimněme si jejich (ostrých) úhlů u společného vrcholu A. Protože $|\sphericalangle KAD| = 90° - \alpha = \beta$, jsou oba úhly KAL a LAD menší než β, takže se rovnají úhlu α. Pravý úhel BAD je tedy polopřímkami AK, AL rozdělen na tři shodné úhly velikosti α, odkud $\alpha = 30°$ (a $\beta = 60°$). Z pravoúhlých trojúhelníků ADL a ABK pak vyplývá, že $|AK| = |AB|/\cos 30° = 2a/\sqrt{3}$ a $|AL| = |AD|/\cos 30° = 2b/\sqrt{3}$. Odtud s ohledem na podmínku $a < b$ plyne nerovnost $|AK| < |AL|$, tudíž přeponou v trojúhelníku AKL je AL (delší z obou stran AK, AL). Pro poměr délek odvěsny AK a přepony AL pak platí $\cos 30° = |AK| : |AL| = a : b$, takže $a : b = \sqrt{3} : 2$.

Úlohu lze řešit mnoha obměněnými postupy, například rozlišit dva případy, kdy trojúhelník KAL má pravý úhel při vrcholu K respektive L, a v každém z nich vyjádřit vnitřní úhly všech čtyř podobných trojúhelníků (ve druhém případě pak ale vyjde $a : b = 2 : \sqrt{3} > 1$, což odporuje zadání úlohy).

C – II – 2

Všimněme si nejdříve, že pro čitatele zlomků z dané rovnice platí vztah $14 + 51 = 65$. Proto je řešením každá trojice stejných prvočísel $p = q = r$ a navíc pro libovolné řešení platí: jsou-li některá dvě z čísel p, q, r stejná, je stejné i třetí číslo. Budeme tedy dále předpokládat, že prvočísla p, q, r splňující danou rovnici jsou navzájem různá (a tedy navzájem nesoudělná).

Po vynásobení rovnice součinem pqr dostaneme

$$14qr + 51pr = 65pq,$$

odkud vzhledem ke zmíněné nesoudělnosti plyne

$$p \mid 14 = 2 \cdot 7, \quad q \mid 51 = 3 \cdot 17 \quad \text{a} \quad r \mid 65 = 5 \cdot 13.$$

To znamená, že $p \in \{2, 7\}$, $q \in \{3, 17\}$ a $r \in \{5, 13\}$. Nyní můžeme sestavit a do rovnice dosadit všech osm možných trojic (p, q, r); zjistíme tak, že vyhovuje jedině trojice $(7, 17, 13)$.

Prověrku dosazováním můžeme zkrátit tak, že vyloučíme kteroukoliv z hodnot $p = 2, q = 3$, resp. $r = 5$. Například po dosazení $r = 5$ dostaneme po vydělení pěti rovnici $14q + 51p = 13pq$, která nemá celočíselné řešení p ani pro $q = 3$ $(14 + 17p = 13p)$, ani pro $q = 17$ $(14 + 3p = 13p)$. Jiná možnost: z rovnice $14qr + 51pr = 65pq$ plyne $2p(q - r) = 7(2qr + 7pr - 9pq)$, takže součin $p(q - r)$ je dělitelný sedmi. Protože však $q \in \{3, 17\}$ a $r \in \{5, 13\}$ (viz výše), není rozdíl $q - r$ dělitelný sedmi, proto je sedmi dělitelné číslo p. Podobně lze zdůvodnit, proč $17 \mid q$ a $13 \mid r$.

Jiné řešení. Z dané rovnice vyjádříme r pomocí p a q:

$$r = \frac{65pq}{51p + 14q} = \frac{5 \cdot 13 \cdot p \cdot q}{51p + 14q}.$$

V posledním zlomku jsme zvýraznili rozklad čitatele na (čtyři) prvočinitele. Takový zlomek bude roven některému prvočíslu r, právě když jeho jmenovatel bude součinem tří prvočinitelů z čitatele (jiné krácení zlomku není možné). Hledáme tedy situace, kdy platí některý z případů:

$$51p + 14q = 5 \cdot 13 \cdot p \quad \text{a} \quad r = q,$$
$$51p + 14q = 5 \cdot 13 \cdot q \quad \text{a} \quad r = p,$$
$$51p + 14q = 5 \cdot p \cdot q \quad \text{a} \quad r = 13,$$
$$51p + 14q = 13 \cdot p \cdot q \quad \text{a} \quad r = 5.$$

Snadnou úpravou rovnic zjistíme, že první dva případy nastanou pouze v situaci, kdy $p = q$ (tehdy ovšem rovněž $p = r$). Poslední dva případy vedou k vyjádřením

$$q = \frac{3 \cdot 17 \cdot p}{5p - 14}, \quad \text{resp.} \quad q = \frac{3 \cdot 17 \cdot p}{13p - 14},$$

ze kterých analogickou úvahou o krácení zlomků (případ $p = q$ již můžeme vynechat) s přihlédnutím k zřejmým nerovnostem $5p - 14 < 17p$ a $13p - 14 < 17p$ dostaneme rovnice

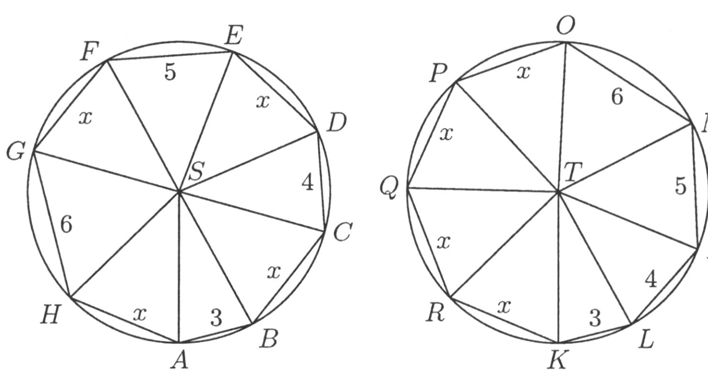
$$5p - 14 = 3p, \quad \text{resp.} \quad 13p - 14 = 3p.$$

První rovnice má řešení $p = 7$ (kterému odpovídá $q = 17$ a $r = 13$), druhá rovnice celočíselné řešení nemá.

Odpověď: Všechna řešení (p, q, r) jsou trojice (p, p, p), kde p je libovolné prvočíslo, a trojice $(7, 17, 13)$.

C – II – 3

Rozbor: Kromě hledaného osmiúhelníku $ABCDEFGH$ uvážíme ještě pomocný osmiúhelník $KLMNOPQR$, který je rovněž vepsán do kružnice o poloměru $r = 6$ a jehož strany splňují podmínky: $|KL| = 3$, $|LM| = 4$, $|MN| = 5$, $|NO| = 6$, $|OP| = |PQ| = |QR| = |RK|$ (obr. 16). Označ-



Obr. 16

me S, resp. T střed kružnice s vepsaným osmiúhelníkem $ABCDEFGH$, resp. $KLMNOPQR$. Podle věty *sss* platí shodnosti $\Delta ABS \simeq \Delta KLT$,

$\Delta CDS \simeq \Delta LMT$, $\Delta EFS \simeq \Delta MNT$, $\Delta GHS \simeq \Delta NOT$, a proto jsou shodné středové úhly ASB a KTL, CSD a LTM, ESF a MTN, GSH a NTO. Dále podle věty *sss* jsou shodné trojúhelníky BCS, DES, FGS a HAS, stejně jako trojúhelníky OPT, PQT, QRT a RKT. Ze shodnosti jejich úhlů při hlavním vrcholu S, resp. T proto plyne

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle BSC| &= \frac{1}{4}(360^\circ - |\sphericalangle ASB| - |\sphericalangle CSD| - |\sphericalangle ESF| - |\sphericalangle GSH|) = \\
&= \frac{1}{4}(360^\circ - |\sphericalangle KTL| - |\sphericalangle LTM| - |\sphericalangle MTN| - |\sphericalangle NTO|) = \\
&= |\sphericalangle OTP|.
\end{aligned}$$

Využili jsme toho, že středy S a T jsou *vnitřními* body obou osmiúhelníků (tudíž součet všech osmi středových úhlů je v obou případech 360°), neboť v opačném případě by jeden z osmi středových úhlů byl roven součtu sedmi ostatních; musel by to být úhel příslušný tětivě délky 6, ten je však zřejmě menší než součet úhlů příslušných tětivám délek 3, 4 a 5. Trojúhelníky BCS a OPT jsou proto shodné podle věty *sus*, tudíž čtveřice shodných stran obou osmiúhelníků mají jednu společnou délku. Dokážeme-li proto sestrojit pomocný osmiúhelník $KLMNOPQR$, je konstrukce osmiúhelníku $ABCDEFGH$ nasnadě.

Konstrukce: Na libovolné kružnici $t(T; 6)$ sestrojíme v jednom směru body K, L, M, N a O tak, aby $|KL| = 3$, $|LM| = 4$, $|MN| = 5$ a $|NO| = 6$. Úhel KTO (ten, který neobsahuje body L, M, N) pak rozdělíme na čtyři shodné díly: nejprve sestrojíme průsečík Q kružnice t s osou úhlu KTO, pak průsečíky P, R kružnice t s osami úhlů OTQ resp. QTK. Poté přistoupíme ke konstrukci hledaného osmiúhelníku $ABCDEFGH$: na kružnici $k(S, 6)$ zvolíme bod A a pak na ní v jednom směru sestrojíme postupně body B, C, ..., H tak, aby $|AB| = 3$, $|BC| = |OP|$, $|CD| = 4$, $|DE| = |OP|$, $|EF| = 5$, $|FG| = |OP|$, $|GH| = 6$.

Důkaz správnosti: Ze shodnosti sedmi dvojic trojúhelníků $\Delta ABS \simeq \Delta KLT$, $\Delta BCS \simeq \Delta OPT$, ..., $\Delta GHS \simeq \Delta NOT$ plyne shodnost úhlů HSA a RTK, a tedy i shodnost osmé dvojice trojúhelníků $\Delta HAS \simeq \Delta RKT$. Proto mají délky stran sestrojeného osmiúhelníku $ABCDEFGH$ (shodné se stranami $KLMNOPQR$) všechny potřebné vlastnosti.

Poznámka. O osmiúhelníku $KLMNOPQR$ jsme nemuseli v celém řešení vůbec mluvit a vést úvahy takto: úhly shodné se středovými úhly ASB, CSD, ESF, GSH dokážeme sestrojit, pro společnou velikost ω

shodných středových úhlů BSC, DSE, FSG a HSA pak platí rovnice

$$4\omega + |\sphericalangle ASB| + |\sphericalangle CSD| + |\sphericalangle ESF| + |\sphericalangle GSH| = 360^\circ, \qquad (1)$$

kterou lze snadno konstrukčně vyřešit; osmiúhelník $KLMNOPQR$ je ovšem k tomuto účelu ideální pomůckou.

C – II – 4

Martin vypočítal hodnotu $(x+y)z$ místo $x+yz$, takže podle zadání platí

$$(x+y)z - (x+yz) = 2\,004, \quad \text{neboli} \quad x\cdot(z-1) = 2\,004 = 12\cdot 167,$$

přičemž 167 je prvočíslo. Činitele x a $z-1$ určíme, když si uvědomíme, že z je dvojmístné číslo, takže $9 \leqq z-1 \leqq 98$. Vidíme, že nutně $z-1=12$ a $x=167$, odkud $z=13$. Martin tedy vypočítal číslo $V=(167+y)\cdot 13$. Číslo V je tedy čtyřmístné, a poněvadž se čte odpředu stejně jako odzadu, má tvar $\overline{abba} = 1\,001a + 110b$. Protože $1\,001 = 13\cdot 77$, musí platit rovnost $(167+y)\cdot 13 = 13\cdot 77a + 110b$, z níž plyne, že číslice b je dělitelná třinácti, takže $b=0$. Po dosazení dostaneme (po dělení třinácti) rovnost $167+y=77a$, která s ohledem na nerovnosti $10 \leqq y \leqq 99$ znamená, že číslice a se rovná 3, tudíž $y=64$.

V druhé části řešení jsme mohli postupovat rovněž následovně. Pro číslo $V=(167+y)\cdot 13$ vycházejí z nerovností $10\leqq y\leqq 99$ odhady $2\,301 \leqq V \leqq 3\,458$. Zjistíme proto, která z čísel $\overline{2bb2}$, kde $b\in\{3,4,5,6,7,8,9\}$, a čísel $\overline{3bb3}$, kde $b\in\{0,1,2,3,4\}$, jsou dělitelná třinácti. I když lze těchto dvanáct čísel rychle otestovat na kalkulačce, udělejme to obecně jejich částečným vydělením třinácti:

$$\overline{2bb2} = 2\,002 + 110b = 13\cdot(154+8b)+6b,$$
$$\overline{3bb3} = 3\,003 + 110b = 13\cdot(231+8b)+6b.$$

Vidíme, že vyhovuje jedině číslo $\overline{3bb3}$ pro $b=0$, kdy $167+y=231$, takže $y=64$.

Odpověď: Žáci měli počítat příklad $167+64\cdot 13$, tedy $x=167$, $y=64$ a $z=13$.