54. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie B

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor); Jaroslav Zhouf (editor): 54. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2004/2005. 46. mezinárodní matematická olympiáda. 17. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2006. pp. 44–58.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405089

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro které má každá z rovnic

$$x^2 + ax + b = 0, \qquad x^2 + (2a + 1)x + 2b + 1 = 0$$

dva různé reálné kořeny, přičemž kořeny druhé rovnice jsou převrácené hodnoty kořenů první rovnice. *(E. Kováč)*

B – I – 2

Je dán rovnoběžník $ABCD$. Přímka vedená bodem D protíná úsečku AC v bodě G, úsečku BC v bodě F a polopřímku AB v bodě E tak, že trojúhelníky BEF a CGF mají stejný obsah. Určete poměr $|AG| : |GC|$. *(T. Jurík)*

B – I – 3

Na stole leží k hromádek o $1, 2, 3, \ldots, k$ kamenech, kde $k \geqq 3$. V každém kroku vybereme tři libovolné hromádky na stole, sloučíme je do jedné a přidáme k ní jeden kámen, který na stole dosud neležel. Jestliže po několika krocích vznikne jediná hromádka, není výsledný počet kamenů dělitelný třemi. Dokažte. *(J. Zhouf)*

B – I – 4

Označme V průsečík výšek a S střed kružnice opsané trojúhelníku ABC, který není rovnostranný. Pokud má úhel při vrcholu C velikost $60°$, je osa úhlu ACB osou úsečky VS. Dokažte. *(J. Zhouf)*

B – I – 5

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\frac{x}{x+4} = \frac{5\lfloor x \rfloor - 7}{7\lfloor x \rfloor - 5},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ označuje největší celé číslo, jež nepřevyšuje číslo x (tzv. *dolní celou část* reálného čísla x). (*J. Šimša*)

B – I – 6

Do kružnice k o poloměru r jsou vepsány dvě kružnice k_1, k_2 o poloměru $\frac{1}{2}r$, jež se vzájemně dotýkají. Kružnice l se vně dotýká kružnic k_1, k_2 a s kružnicí k má vnitřní dotyk. Kružnice m má vnější dotyk s kružnicemi k_2 a l a vnitřní dotyk s kružnicí k. Vypočtěte poloměry kružnic l a m. (*L. Boček*)

B – S – 1

Na stole leží 54 hromádky o 1, 2, 3, ..., 54 kamenech. V každém kroku vybereme libovolnou hromádku, řekněme o k kamenech, a odebereme ji celou ze stolu spolu s k kameny z každé té hromádky, ve které je aspoň k kamenů. Například po prvním kroku, při kterém vybereme hromádku o 52 kamenech, zůstanou na stole hromádky o 1, 2, 3, ..., 51, 1 a 2 kamenech. Předpokládejme, že po určitém počtu kroků zůstane na stole jediná hromádka. Zdůvodněte, kolik kamenů v ní může být. (*J. Šimša*)

B – S – 2

Nechť ABC je pravoúhlý trojúhelník se stranami $a < b < c$. Označme Q střed odvěsny BC a S střed přepony AB. Průsečík osy úsečky AB s odvěsnou CA označme R. Dokažte, že $|RQ| = |RS|$, právě když

$$a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3.$$

(*J. Švrček*)

B – S – 3

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = \frac{\lfloor x \rfloor}{1 - \lfloor x \rfloor},$$

kde $\lfloor a \rfloor$ označuje největší celé číslo, jež nepřevyšuje číslo a. (*J. Šimša*)

B – II – 1

Kružnice k_1 o poloměru 1 má vnější dotyk s kružnicí k_2 o poloměru 2. Každá z kružnic k_1, k_2 má vnitřní dotyk s kružnicí k_3 o poloměru 3. Vypočítejte poloměr kružnice k, která má s kružnicemi k_1, k_2 vnější dotyk a s kružnicí k_3 vnitřní dotyk. (*P. Novotný*)

B – II – 2

Na jedné internetové stránce probíhá hlasování o nejlepšího hokejistu světa posledního desetiletí. Počet hlasů pro jednotlivé hráče je uváděn po zaokrouhlení v celých procentech. Po Mirkově hlasování pro Jaromíra Jágra se jeho zisk 7 % nezměnil. Kolik nejméně lidí včetně Mirka hlasovalo? Předpokládáme, že každý účastník ankety hlasoval právě jednou, a to pro jediného hráče. (*M. Panák*)

B – II – 3

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme K a L paty výšek z vrcholů A a B, M střed strany AB a V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že osa úhlu KML prochází středem úsečky VC. (*J. Švrček*)

B – II – 4

Najděte všechny trojice reálných čísel x, y, z, pro které platí

$$\lfloor x \rfloor - y = 2 \cdot \lfloor y \rfloor - z = 3 \cdot \lfloor z \rfloor - x = \frac{2004}{2005},$$

kde $\lfloor a \rfloor$ označuje největší celé číslo, jež nepřevyšuje číslo a. (*J. Šimša*)

B – I – 1

Nechť x_1, x_2 jsou kořeny první rovnice. Potom

$$x_1 + x_2 = -a, \qquad x_1 x_2 = b,$$

a protože druhá rovnice má kořeny $1/x_1$ a $1/x_2$, platí

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -(2a+1), \qquad \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 2b+1.$$

Je tedy $\dfrac{1}{b} = 2b + 1$, což vede na kvadratickou rovnici $2b^2 + b - 1 = 0$, která má kořeny $b = -1$ a $b = \frac{1}{2}$.

Pro $b = -1$ máme

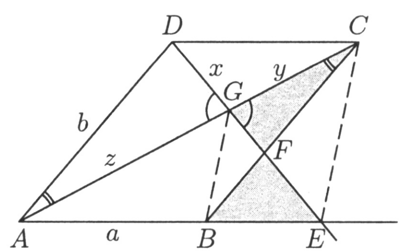
$$-(2a+1) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-a}{-1},$$

což je pro neznámou a lineární rovnice s řešením $a = -\frac{1}{3}$.

Obdobně pro $b = \frac{1}{2}$ dostáváme $-(2a+1) = -2a$, tato rovnice však nemá řešení. Zkouškou (je třeba ověřit, že kořeny jsou reálné) se přesvědčíme, že dvojice $a = -\frac{1}{3}$, $b = -1$ je (jediným) řešením úlohy.

B – I – 2

Z obr. 8 je vidět, že trojúhelníky AGD a CGF jsou podobné podle věty



Obr. 8

uu. Příslušný poměr podobnosti k je roven hledanému poměru $|AG|$: : $|GC|$. Označíme-li proto $b = |AD|$, $x = |DG|$ a $y = |CG|$, platí $|GF| = x/k$ a $|CF| = b/k$, odkud

$$|FB| = |BC| - |FB| = b - \frac{b}{k} = (k-1)\frac{b}{k}$$

a

$$|DF| = |DG| + |GF| = x + \frac{x}{k} = (k+1)\frac{x}{k}.$$

Z podobnosti trojúhelníků $BEF \sim CDF$ dostáváme

$$|EF| = \frac{|DF| \cdot |BF|}{|CF|} = \frac{k^2-1}{k} \cdot x.$$

Z rovnosti obsahů trojúhelníků BEF a CGF vyplývá

$$|FB| \cdot |FE| = |FC| \cdot |FG|,$$

odkud po dosazení vyjde

$$\frac{k-1}{k} \cdot b \cdot \frac{k^2-1}{k} \cdot x = \frac{b}{k} \cdot \frac{x}{k}.$$

Je tedy $k^3 - k^2 - k + 1 = 1$, a protože $k \neq 0$, dostáváme pro hledané k kvadratickou rovnici $k^2 - k - 1 = 0$. Úloze vyhovuje její kladný kořen $k = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Jiné řešení. Označme $|AG| = z$, $|GC| = y$. Protože trojúhelníky BEF a CGF mají stejný obsah, mají stejný obsah i trojúhelníky GBE a GBC. Proto platí $EC \parallel BG$. Z podobnosti trojúhelníků $ABG \sim AEC$, $DFC \sim$ $\sim EFB$, $CFE \sim BFG$ a $AEC \sim ABG$ postupně plyne

$$\frac{z}{y} = \frac{|AG|}{|GC|} = \frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|DC|}{|BE|} = \frac{|FC|}{|BF|} = \frac{|CE|}{|BG|} = \frac{|AC|}{|AG|} = \frac{z+y}{z}.$$

Z výsledné rovnosti $z/y = 1 + y/z$ dostáváme

$$\left(\frac{z}{y}\right)^2 - \frac{z}{y} - 1 = 0,$$

a protože $z/y > 0$, je

$$\frac{z}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

B – I – 3

V každém kroku se počet hromádek zmenší o dvě. Aby vznikla jedna hromádka, musí být na začátku lichý počet hromádek, tedy $k = 2m + 1$.

Na zmenšení počtu hromádek o $2m$ je třeba m kroků. Při každém přibude jeden kamen, a proto je výsledný počet kamenů

$$p = 1 + 2 + 3 + \ldots + (2m+1) + m = \frac{(2m+1)(2m+2)}{2} + m =$$
$$= 2m^2 + 4m + 1.$$

Číslo m má jeden ze tvarů $m = 3n$, $m = 3n+1$, $m = 3n+2$. V prvním případě je $p = 18n^2+12n+1 = 3(6n^2+2n)+1$, ve druhém $18n^2+24n+7 = 3(6n^2+8n+2)+1$ a ve třetím $p = 18n^2+36n+17 = 3(6n^2+12n+5)+2$. Žádné z těchto čísel není dělitelné třemi.

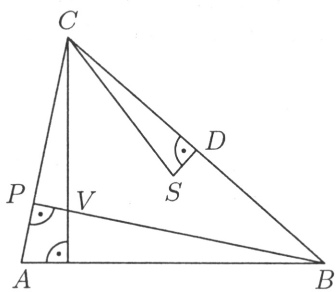
Poznámka. Stačí ověřit, že p není dělitelné třemi pro $m = 0$, $m = 1$ a $m = 2$ [návodná úloha 1].

B – I – 4

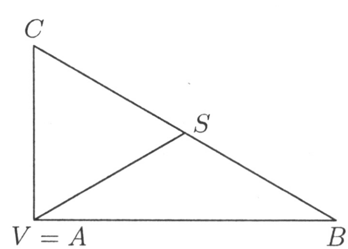
Nechť například $|AC| < |BC|$. Předpokládejme nejprve, že trojúhelník ABC je ostroúhlý. Označme D střed strany BC a P patu výšky z vrcholu B na stranu AC (obr. 9). Platí $|CP| = |BC|\cdot\cos 60° = \frac{1}{2}|BC| = |CD|$, $|\sphericalangle CPV| = |\sphericalangle CDS| = 90°$, $|\sphericalangle CVP| = |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CSD|$ (obvodový úhel a polovina středového). Ze shodnosti trojúhelníků CPV a CDS vyplývá $|CV| = |CS|$, $|\sphericalangle PCV| = |\sphericalangle DCS|$. Trojúhelník VSC je tedy rovnoramenný, a osa úhlu ACB je tak i osou úhlu VCS a současně osou strany VS.

Je-li trojúhelník ABC pravoúhlý (obr. 10), je trojúhelník VSC rovnostranný a osa úhlu VCS je i osou strany VS.

Je-li trojúhelník ABC tupoúhlý, dokážeme tvrzení úlohy stejně jako v případě ostroúhlého trojúhelníku s tím rozdílem, že bude $|\sphericalangle CVP| = |\sphericalangle CSD| = 180° - |\sphericalangle CAB|$.



Obr. 9



Obr. 10

B – I – 5

Každé reálné číslo x můžeme zapsat ve tvaru $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, kde $\lfloor x \rfloor$ je *celá část* a $\{x\}$ tzv. *zlomková část* čísla x. Zřejmě platí $0 \leqq \{x\} < 1$, přičemž $\{x\} = 0$, právě když x je celé. Odtud vyplývá, že $\lfloor x \rfloor \leqq x < \lfloor x \rfloor + 1$, přičemž rovnost $\lfloor x \rfloor = x$ platí, právě když x je celé; tyto nerovnosti často používáme při řešení úloh s celou částí. Označíme-li $\lfloor x \rfloor = k$, dostaneme z dané rovnice po odstranění zlomku a roznásobení

$$7kx - 5x = 5kx + 20k - 7x - 28$$

a odtud

$$x = \frac{10k - 14}{k+1}. \tag{1}$$

Protože $k = \lfloor x \rfloor$, musí platit

$$k \leqq \frac{10k - 14}{k+1} < k + 1.$$

Každou z nerovnic vyřešíme samostatně:

$$0 \geqq \frac{k(k+1) - (10k - 14)}{k+1} = \frac{(k-7)(k-2)}{k+1}, \qquad k \in (-\infty, -1) \cup \langle 2, 7 \rangle;$$

$$0 < \frac{(k+1)^2 - (10k - 14)}{k+1} = \frac{(k-3)(k-5)}{k+1}, \qquad k \in (-1, 3) \cup (5, \infty).$$

Protože k je celé, máme $k \in \{2, 6, 7\}$. Rovnice má tedy tři řešení, která dostaneme dosazením do vztahu (1): $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{46}{7}$, $x_3 = 7$.

B – I – 6

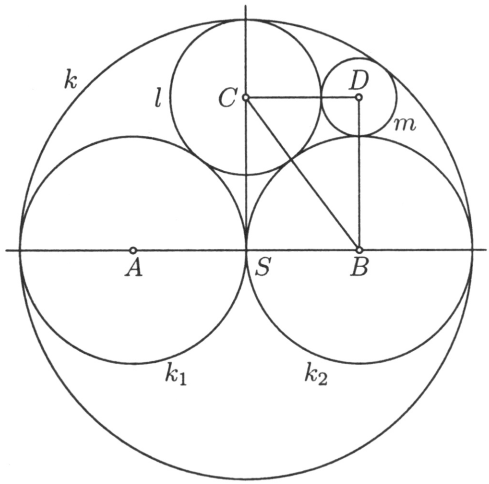
Označme S, A, B, C, D středy kružnic k, k_1, k_2, l, m a x, y poloměry kružnic l a m. Bod C leží na přímce, která prochází bodem S a je kolmá na AB (obr. 11). Z pravoúhlého trojúhelníku BCS máme podle Pythagorovy věty

$$\left(\frac{r}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + (r - x)^2$$

a odtud $x = \frac{1}{3}r$. Označme P, Q paty kolmic z bodu D na přímky AB a SC a $u = |SP|$, $v = |SQ|$. Jestliže $u \neq \frac{1}{2}r$, je BPD pravoúhlý trojúhelník a podle Pythagorovy věty

$$\left(\frac{r}{2} + y\right)^2 = v^2 + \left(u - \frac{r}{2}\right)^2. \tag{1}$$

Tato rovnice platí i v případě $u = \frac{1}{2}r$.



Obr. 11

Podobně z pravoúhlého trojúhelníku QCD (jestliže $Q \neq C$) anebo porovnáním protilehlých stran obdélníku (jestliže $Q = C$) dostaneme

$$\left(\frac{r}{3} + y\right)^2 = u^2 + \left(v - \frac{2r}{3}\right)^2. \tag{2}$$

Navíc z pravoúhlého trojúhelníku SPD máme

$$(r - y)^2 = u^2 + v^2. \tag{3}$$

Odečtením rovnic (3) a (2) dostaneme $\frac{4}{3}r^2 - \frac{8}{3}ry = \frac{4}{3}vr$, tedy $v = r - 2y$. Podobně odečtením rovnic (3) a (1) vyjde $r^2 - 3ry = ur$ a odtud $u = r - 3y$. Dosazením do (3) a úpravou postupně dostaneme

$$\begin{gathered}(r - y)^2 = (r - 3y)^2 + (r - 2y)^2,\\ r^2 - 8ry + 12y^2 = 0,\\ (r - 6y)(r - 2y) = 0.\end{gathered}$$

Odtud plyne, že $y = \frac{1}{2}r$ nebo $y = \frac{1}{6}r$. Poloměr $\frac{1}{2}r$ má kružnice k_1, poloměr $\frac{1}{6}r$ kružnice m znázorněná na obr. 11. Každá z těchto dvou kružnic se dotýká kružnic k, k_2 a l požadovaným způsobem.

B – S – 1

Pokud v každém kroku zvolíme hromádku s největším počtem kamenů, budeme postupně odebírat hromádky s 54, 53, 52, ... kameny a po 53. kroku zůstane na stole jediná hromádka s jedním kamenem.

Dokážeme, že při libovolném postupu zůstane v poslední hromádce jediný kamen. Ukážeme totiž, že po každém kroku, po němž na stole zbývá aspoň jedna hromádka, tvoří počty kamenů v jednotlivých hromádkách vždy *celou* množinu $\{1, 2, \dots, n\}$ pro vhodné přirozené n (nevylučujeme ovšem, že k některým číslům existuje více hromádek s týmž počtem kamenů). To tedy znamená, že je vždy na stole aspoň jedna hromádka s právě jedním kamenem.

Na začátku tvoří počty kamenů v hromádkách množinu $\{1, 2, \dots, 54\}$. Předpokládejme, že po určitém počtu kroků tvoří počty kamenů v jednotlivých hromádkách množinu $\{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geqq 2$). Zvolíme-li nyní hromádku s n kameny nebo hromádku s jedním kamenem, budou v dalším kroku počty kamenů v hromádkách tvořit množinu $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Pokud zvolíme hromádku s m kameny, kde $m \notin \{1, n\}$, budou počty kamenů v dalším kroku tvořit množinu $\{1, 2, \dots, m-1\} \cup \{1, 2, \dots, n-m\} = \{1, 2, \dots, p\}$, kde $p = \max\{m-1, n-m\}$. Tím je tvrzení o počtu kamenů v jednotlivých hromádkách dokázáno.

Odpověď. Poslední hromádka bude bez ohledu na zvolený postup vždy obsahovat jediný kamen.

B – S – 2

Podle Pythagorovy věty je v pravoúhlém trojúhelníku rovnost $a^2 : b^2 = 1 : 2$ splněna, právě když $b^2 : c^2 = 2 : 3$. Stačí tedy dokázat požadovanou ekvivalenci jen pro jednu z rovností $a^2 : b^2 = 1 : 2$, $b^2 : c^2 = 2 : 3$.

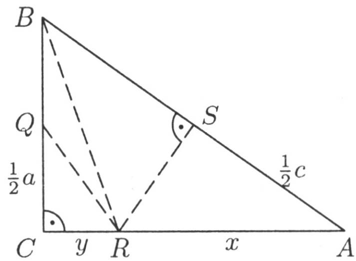
Trojúhelníky ASR a ACB (obr. 12) mají společný úhel při vrcholu A a shodují se v pravých úhlech ASR a ACB, takže jsou podobné (uu). Odtud vyplývá rovnost

$$\frac{|AR|}{|AS|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

neboli

$$x = |AR| = \frac{|AB| \cdot |AS|}{|AC|} = \frac{c^2}{2b}. \tag{1}$$

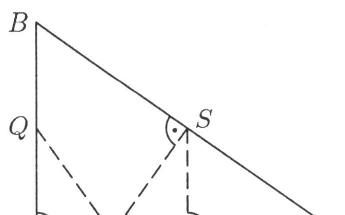
Podle Pythagorovy věty je $|RS|^2 = |AR|^2 - |AS|^2 = x^2 - \frac{1}{4}c^2$ a $|RQ|^2 = |QC|^2 + |CR|^2 = \frac{1}{4}a^2 + (b-x)^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2 - 2bx + x^2$, takže $|RQ| = |RS|$, právě když $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + b^2 = 2bx$, což po dosazení z (1) a $a^2 = c^2 - b^2$ po úpravě dává $\frac{3}{4}b^2 = \frac{1}{2}c^2$, neboli $b^2 : c^2 = 2 : 3$. Tím je požadovaná ekvivalence dokázána.



Obr. 12

Jiné řešení. Podle Pythagorovy věty je (obr. 12) $|BR|^2 = |BC|^2 + |CR|^2 = a^2 + y^2$, $|RS|^2 = |BR|^2 - |BS|^2 = a^2 + y^2 - \frac{1}{4}c^2$, $|RQ|^2 = |QC|^2 + |CR|^2 = \frac{1}{4}a^2 + y^2$. Rovnost $|RQ| = |RS|$ tedy platí, právě když $a^2 + y^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}a^2 + y^2$, neboli $3a^2 = c^2$. V pravoúhlém trojúhelníku je tato rovnost ekvivalentní s rovností $3b^2 = 2c^2$, neboli $a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3$.

Jiné řešení. Označme T střed strany AC (obr. 13). Protože $|QC| = |ST|$ a $|\sphericalangle QCR| = |\sphericalangle STR| = 90°$, jsou trojúhelníky QCR a STR shodné, právě když $|RQ| = |RS|$ a zároveň právě když $|RC| = |RT|$.



Obr. 13

Rovnost $|RQ| = |RS|$ je tedy ekvivalentní s tím, že bod R je střed úsečky CT, tj. $x = |RA| = \frac{3}{4}b$. Z podobnosti trojúhelníků $ABC \sim ARS$ máme (stejně jako v prvním řešení)

$$x = \frac{c^2}{2b},$$

takže $|RQ| = |RS|$, právě když

$$\frac{3b}{4} = \frac{c^2}{2b}, \quad \text{neboli} \quad 3b^2 = 2c^2.$$

V pravoúhlém trojúhelníku je to dle Pythagorovy věty ekvivalentní s rovností $3a^2 = c^2$, neboli $a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3$.

B – S – 3

Výraz $\left\lfloor \dfrac{x}{1-x} \right\rfloor$ je celé číslo, proto i $\dfrac{\lfloor x \rfloor}{1-\lfloor x \rfloor} = \dfrac{1}{1-\lfloor x \rfloor} - 1$ je celé, což znamená, že $1 - \lfloor x \rfloor \in \{-1, 1\}$, neboli $\lfloor x \rfloor \in \{0, 2\}$.

Nechť $\lfloor x \rfloor = 0$. Potom $0 \leqq x < 1$ a daná rovnice má tvar

$$\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = 0,$$

takže je splněna, právě když $0 \leqq \dfrac{x}{1-x} < 1$, což je s ohledem na předpoklad $1 - x > 0$ ekvivalentní s nerovnostmi $0 \leqq x < \frac{1}{2}$. V tomto případě dané rovnici vyhovují všechna x z intervalu $\langle 0, \frac{1}{2})$.

Nechť $\lfloor x \rfloor = 2$. Potom $2 \leqq x < 3$ a daná rovnice má tvar

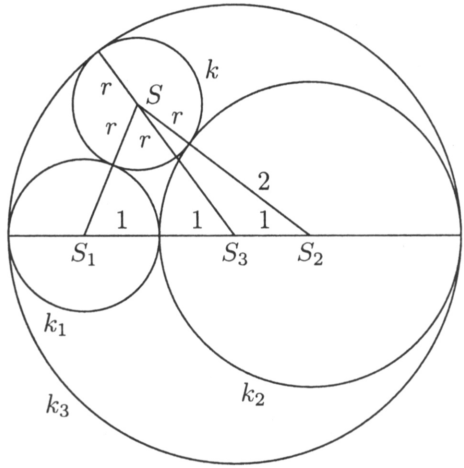
$$\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = -2,$$

takže je splněna, právě když $-2 \leqq \dfrac{x}{1-x} < -1$, což je s ohledem na předpoklad $2 \leqq x$ (takže $1 - x < 0$) ekvivalentní s nerovnostmi $-2 + 2x \geqq x > -1 + x$, neboli $x \geqq 2$. V tomto případě dané rovnici vyhovují všechna x z intervalu $\langle 2, 3)$.

Závěr. Všechna řešení dané rovnice tvoří množinu $\langle 0, \frac{1}{2}) \cup \langle 2, 3)$.

B – II – 1

Protože se součet průměrů kružnic k_1 a k_2 rovná průměru kružnice k_3, leží jejich středy S_1, S_2 a S_3 v přímce. Existují dvě shodné kružnice, které splňují podmínky úlohy, a jsou souměrně sdružené podle přímky S_1S_2. Označme k jednu z nich (obr. 14), S její střed a r odpovídající poloměr.

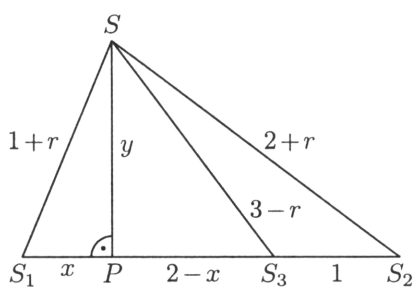


Obr. 14

Pro velikosti stran trojúhelníku S_1S_2S platí: $|S_1S| = 1 + r$, $|S_2S| = 2+r$, $|S_1S_2| = 3$ a $|S_3S| = 3-r$. Pro bod S_3 zároveň platí, že $|S_3S_1| = 2$ a $|S_3S_2| = 1$. Označíme-li P pravoúhlý průmět bodu S na přímku S_1S_2 (obr. 15) a $x = |S_1P|$, $y = |SP|$, můžeme podle Pythagorovy věty psát

$$
\begin{aligned}
(1 + r)^2 &= x^2 + y^2, \\
(2 + r)^2 &= (3 - x)^2 + y^2, \\
(3 - r)^2 &= (2 - x)^2 + y^2.
\end{aligned}
$$

Odečtením první rovnice od druhé dostaneme $3 + 2r = 9 - 6x$ neboli $2r = 6 - 6x$, odečtením první od třetí $8 - 8r = 4 - 4x$ neboli $2r = 1 + x$. Porovnáním obou důsledků vyjde rovnice $6 - 6x = 1 + x$, odkud $x = \frac{5}{7}$, $r = 3 - 3x = \frac{6}{7}$.



Obr. 15

Poznámka. Se znalostí kosinové věty se obejdeme bez pomocného bodu P: stačí napsat kosinové věty pro trojúhelníky S_1S_3S a S_1S_2S. Dostaneme tak dvě rovnice

$$(3-r)^2 = 4 + (1+r)^2 - 2 \cdot 2(1+r)\cos\omega,$$
$$(2+r)^2 = 9 + (1+r)^2 - 2 \cdot 3(1+r)\cos\omega,$$

kde $\omega = |\sphericalangle S_2S_1S|$. Po úpravě a vyjádření $(1+r)\cos\omega$ z obou rovnic dostaneme pro r rovnici $2r - 1 = 1 - \frac{1}{3}r$, z níž plyne $r = \frac{6}{7}$.

B – II – 2

Označme p počet účastníků ankety včetně Mirka a j počet hlasů pro Jágra. Na celých 7 % se zaokrouhlí čísla z intervalu $\langle 6{,}5\,\%; 7{,}5\,\%)$ neboli $\langle 0{,}065; 0{,}075)$. Před Mirkovým hlasováním měl Jágr $j-1$ hlasů a po něm j hlasů. Musí proto platit

$$0{,}065 \leqq \frac{j-1}{p-1} < 0{,}075, \quad 0{,}065 \leqq \frac{j}{p} < 0{,}075.$$

Protože z nerovnosti $0 < j < p$ plyne $\dfrac{j-1}{p-1} < \dfrac{j}{p}$, stačí řešit dvě nerovnice

$$0{,}065 \leqq \frac{j-1}{p-1} \quad \text{a} \quad \frac{j}{p} < 0{,}075. \tag{1}$$

První z nich je ekvivalentní s nerovnicí $0{,}065p - 0{,}065 + 1 \leqq j$ a druhá s nerovnicí $j < 0{,}075p$, proto musí platit $0{,}065p + 0{,}935 < 0{,}075p$, odkud plyne $p > 93{,}5$. Protože p je celé číslo, dostáváme $p \geqq 94$. Musíme ovšem ještě zjistit, pro které nejmenší $p \geqq 94$ existuje celé číslo j, jež vyhovuje nerovnicím (1). Z podmínky $p \geqq 94$ dostaneme $j \geqq 0{,}065 \cdot 94 + 0{,}935 = 7{,}045$, a tudíž $j \geqq 8$. Z nerovnice $j < 0{,}075p$ pak máme $p > \frac{320}{3}$, neboli $p \geqq 107$. Protože $0{,}065 \cdot 107 + 0{,}935 < 8$, je dvojice $j = 8$, $p = 107$ řešením soustavy (1), takže $p = 107$ je nejmenší možný počet lidí, kteří v anketě hlasovali.

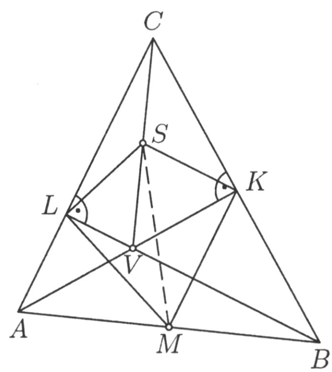
Jiné řešení. Nerovnice $0{,}065p + 0{,}935 \leqq j < 0{,}075p$, ekvivalentní nerovnicím (1), upravíme na tvar

$$\frac{j}{0{,}075} < p \leqq \frac{j - 0{,}935}{0{,}065},$$

což dává podmínku $0{,}065j < 0{,}075j - 0{,}075\cdot 0{,}935$, neboli $j > 7{,}5\cdot 0{,}935 > > 7$, takže $j \geqq 8$. Z nerovnosti $p > j/0{,}075$ tak dostáváme nerovnost $p \geqq 107$. Nyní stačí ověřit, že $p = 107$ vyhovuje pro $j = 8$ i druhé podmínce, tj. že platí $107 \leqq \dfrac{8 - 0{,}935}{0{,}065}$.

B – II – 3

Označme S střed úsečky CV (obr. 16). Body K a L leží na Thaletově kružnici s průměrem AB, takže $|ML| = |MK|$. Body K a L zároveň leží i na Thaletově kružnici s průměrem CV, takže $|SL| = |SK|$. Trojúhelníky SLM a SKM jsou tudíž shodné (sss), takže $|\sphericalangle SML| = |\sphericalangle SMK|$, neboli osa úhlu LMK prochází středem S úsečky VC.



Obr. 16

B – II – 4

Danou soustavu rovnic přepíšeme ekvivalentně do tvaru

$$\begin{aligned} y &= \lfloor x \rfloor - \alpha,\\ z &= 2\lfloor y \rfloor - \alpha,\\ x &= 3\lfloor z \rfloor - \alpha, \end{aligned} \tag{1}$$

kde jsme jako α označili číslo $\frac{2004}{2005}$ z intervalu $(0,1)$. Ze soustavy (1) plynou postupně rovnosti

$$\begin{aligned} \lfloor y \rfloor &= \lfloor x \rfloor - 1,\\ \lfloor z \rfloor &= 2\lfloor y \rfloor - 1 = 2\lfloor x \rfloor - 3,\\ \lfloor x \rfloor &= 3\lfloor z \rfloor - 1 = 6\lfloor x \rfloor - 10. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice dostáváme $\lfloor x \rfloor = 2$ a ze zbylých dvou rovnic dále dopočítáme $\lfloor y \rfloor = \lfloor z \rfloor = 1$. Dosazením do (1) tak máme $x = 3 - \frac{2004}{2005} = 2 + \frac{1}{2005}$, $y = 2 - \frac{2004}{2005} = 1 + \frac{1}{2005}$ a $z = 2 - \frac{2004}{2005} = 1 + \frac{1}{2005}$. Vyšla necelá čísla x, y a z, která mají právě takové celé části, jaké jsme dosazovali do pravých stran rovností (1). Tak jsme zároveň provedli zkoušku (kterou lze ovšem provést i přímým dosazením do původní soustavy). Uvedená trojice je (jediným) řešením dané úlohy.