54. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie A

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor); Jaroslav Zhouf (editor): 54. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2004/2005. 46. mezinárodní matematická olympiáda. 17. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2006. pp. 59–92.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405090

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Neprázdnou množinu přirozených čísel nazveme *malou*, když má méně prvků, než je její nejmenší prvek. Určete počet všech malých množin M, které jsou podmnožinami množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ a mají tuto vlastnost: patří-li do M dvě různá čísla x a y, patří do M rovněž číslo $|x - y|$.

(*J. Földes*)

A – I – 2

Nechť M je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme P, R průsečíky přímky AM po řadě s úsečkami BD, CD a podobně Q, S průsečíky přímky BM s úsečkami AC, DC. Dokažte, že přímky PS a QR jsou navzájem kolmé. (*J. Švrček*)

A – I – 3

Nechť k je libovolné přirozené číslo. Uvažujme dvojice (a, b) celých čísel, pro něž mají kvadratické rovnice

$$x^2 - 2ax + b = 0, \qquad y^2 + 2ay + b = 0$$

reálné kořeny (ne nutně různé), které lze označit $x_{1,2}$, resp. $y_{1,2}$ v takovém pořadí, že platí rovnost $x_1 y_1 - x_2 y_2 = 4k$.

a) Pro dané k určete největší možnou hodnotu b ze všech takových dvojic (a, b).
b) Pro $k = 2\,004$ určete počet všech takových dvojic (a, b).
c) Pro dané k vypočtěte součet čísel b ze všech takových dvojic (a, b), přičemž každé číslo b se přičítá tolikrát, v kolika dvojicích (a, b) vystupuje. (*E. Kováč*)

A – I – 4

Dané aritmetické posloupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ mají stejný první člen a následující vlastnost: existuje index k $(k > 1)$, pro který platí rovnosti

$$x_k^2 - y_k^2 = 53, \quad x_{k-1}^2 - y_{k-1}^2 = 78, \quad x_{k+1}^2 - y_{k+1}^2 = 27.$$

Najděte všechny takové indexy k. *(V. Bálint)*

A – I – 5

V lichoběžníku $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ platí $|AB| = 2|CD|$. Označme E střed ramene BC. Dokažte, že rovnost $|AB| = |BC|$ platí, právě když čtyřúhelník $AECD$ je tečnový. *(R. Horenský)*

A – I – 6

Najděte všechny funkce $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, které vyhovují současně následujícím třem podmínkám:

a) Pro libovolná nezáporná reálná čísla x, y taková, že $x + y > 0$, platí rovnost
$$f\bigl(xf(y)\bigr)f(y) = f\left(\frac{xy}{x+y}\right);$$

b) $f(1) = 0$;

c) $f(x) > 0$ pro libovolné $x > 1$. *(P. Calábek)*

A – S – 1

Určete počet všech nekonečných aritmetických posloupností celých čísel, které mají mezi svými prvními deseti členy obě čísla 1 a 2 005.

(V. Bálint, J. Šimša)

A – S – 2

V rovnoběžníku $ABCD$ platí $|AB| > |BC|$. Označme K, L, M a N po řadě body dotyku kružnic vepsaných trojúhelníkům ACD, BCD, ABC a ABD s příslušnou úhlopříčkou AC, resp. BD. Dokažte, že $KLMN$ je obdélník. *(R. Horenský)*

A – S – 3

Zjistěte, pro která přirozená čísla k má soustava nerovnic

$$k(k-2) \leqq \left(k + \frac{1}{k}\right)x \leqq k^2(k+3)$$

s neznámou x a parametrem k právě $(k+1)^2$ řešení v oboru celých čísel.

(*J. Šimša*)

A – II – 1

Je-li součin kladných reálných čísel a, b, c roven 1, platí nerovnost

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geqq \frac{3}{4}.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost. (*J. Šimša*)

A – II – 2

V oboru celých čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x(y+z+1) &= y^2 + z^2 - 5, \\ y(z+x+1) &= z^2 + x^2 - 5, \\ z(x+y+1) &= x^2 + y^2 - 5. \end{aligned}$$

(*J. Šimša*)

A – II – 3

V rovině je dán rovnoramenný trojúhelník KLM se základnou KL. Uvažujme libovolné dvě kružnice k a l, které mají vnější dotyk a které se dotýkají přímek KM a LM po řadě v bodech K a L. Určete množinu dotykových bodů T všech takových kružnic k a l. (*J. Švrček*)

A – II – 4

Najděte všechny dvojice přirozených čísel, jejichž součet má poslední číslici 3, rozdíl je prvočíslo a součin je druhou mocninou přirozeného čísla.

(*J. Földes*)

A – III – 1

Uvažujme libovolné aritmetické posloupnosti reálných čísel $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(y_i)_{i=1}^{\infty}$, které mají stejný první člen a splňují pro některé $k > 1$ rovnosti

$$x_{k-1}y_{k-1} = 42, \quad x_k y_k = 30 \quad \text{a} \quad x_{k+1}y_{k+1} = 16.$$

Najděte všechny takové posloupnosti, pro které je index k největší možný. *(J. Šimša)*

A – III – 2

Zjistěte, pro která m existuje právě 2^{15} podmnožin X množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 47\}$ s vlastností: číslo m je nejmenší prvek množiny X a pro každé $x \in \mathsf{X}$ platí buď $x + m \in \mathsf{X}$, nebo $x + m > 47$. *(R. Kučera)*

A – III – 3

V lichoběžníku $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ označme E střed ramene BC. Jsou-li oba čtyřúhelníky $ABED$ a $AECD$ tečnové, splňují délky stran lichoběžníku $ABCD$ označené obvyklým způsobem rovnosti

$$a + c = \frac{b}{3} + d \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{3}{b}.$$

Dokažte. *(R. Horenský)*

A – III – 4

V rovině je dán ostroúhlý trojúhelník AKL. Uvažujme libovolný pravoúhelník $ABCD$, který je trojúhelníku AKL opsán tak, že bod K leží na straně BC a bod L leží na straně CD. Určete množinu průsečíků S úhlopříček AC, BD všech takových pravoúhelníků $ABCD$. *(J. Šimša)*

A – III – 5

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla p, q, r, s za podmínek $q \neq -1$ a $s \neq -1$ platí: Kvadratické rovnice

$$x^2 + px + q = 0, \qquad x^2 + rx + s = 0$$

mají v oboru reálných čísel společný kořen a jejich další kořeny jsou navzájem převrácená čísla, právě když koeficienty p, q, r, s splňují rovnosti

$$pr = (q+1)(s+1) \quad \text{a} \quad p(q+1)s = r(s+1)q.$$

(Dvojnásobný kořen kvadratické rovnice počítáme dvakrát.)

(J. Šimša)

A – III – 6

Rozhodněte, zda pro každé pořadí čísel $1, 2, 3, \ldots, 15$ lze tato čísla zapsat nejvýše čtyřmi různými barvami tak, aby všechna čísla stejné barvy tvořila v daném pořadí monotonní (tj. rostoucí nebo klesající) posloupnost. (Jednočlenná posloupnost je monotonní.) *(J. Šimša)*

A – I – 1

Zjistíme nejprve, jak vypadají všechny konečné neprázdné množiny M přirozených čísel s (klíčovou) vlastností ze závěru zadání. Teprve poté posoudíme, které z těchto množin jsou malé, a určíme počet těch z nich, které jsou sestaveny z čísel od 1 do 100.

Nechť M je tedy libovolná konečná neprázdná množina přirozených čísel s vlastností: je-li $x, y \in \mathsf{M}$ a $x \neq y$, pak i $|x-y| \in \mathsf{M}$. Předpokládejme, že M má právě k prvků, a uspořádejme je podle velikosti od nejmenšího čísla po největší:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_k.$$

V případě $k = 1$ splňuje množina $\mathsf{M} = \{x_1\}$ danou vlastnost triviálně, předpokládejme proto dále, že $k > 1$. Pak číslo $x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|$ podle posuzované vlastnosti patří do M a je menší než x_2, takže se musí rovnat číslu x_1. Z rovnosti $x_2 - x_1 = x_1$ dostáváme $x_2 = 2x_1$. Analogicky platí: čísla $x_3 - x_2$, $x_3 - x_1$ jsou dvě čísla z M, jež jsou menší než x_3, přitom $x_3 - x_2 < x_3 - x_1$, takže musí platit $x_3 - x_2 = x_1$ a $x_3 - x_1 = x_2$, což spolu s dokázanou rovností $x_2 = 2x_1$ vede k závěru, že $x_3 = x_1 + x_2 = 3x_1$. Ve stejných úvahách můžeme pokračovat a získat rovnosti $x_4 = 4x_1, \ldots,$ $x_k = kx_1$. Formálně lze tyto rovnosti dokázat indukcí: platí-li rovnost $x_n = nx_1$ pro některé n, $1 \leqq n < k$, pak úvahou o n číslech

$$x_{n+1} - x_n < x_{n+1} - x_{n-1} < \ldots < x_{n+1} - x_1,$$

která podle posuzované vlastnosti patří do M a jsou menší než x_{n+1}, docházíme k závěru, že $x_{n+1} - x_n = x_1$, odkud $x_{n+1} = x_n + x_1 = nx_1 + x_1 = (n+1)x_1$. Důkaz indukcí je hotov. Označíme-li $x_1 = m$, plyne z našich úvah, že zkoumaná k-prvková množina M má nutně tvar

$$M = \{m, 2m, 3m, \ldots, km\}. \tag{1}$$

Na druhou stranu je zřejmé, že taková množina M má požadovanou vlastnost, ať jsou přirozená čísla m a k vybrána jakkoliv.

Množina M zapsaná v (1) má k prvků, přičemž nejmenší z nich je číslo m. Podle zadání úlohy je taková množina malá, právě když platí nerovnost $k < m$. Zároveň je jasné, že taková množina M je podmnožinou množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, právě když platí nerovnost $km \leqq 100$.

Naší úlohou je tedy najít počet všech dvojic přirozených čísel k, m, pro něž platí $k < m$ a $km \leqq 100$. Jak je při řešení obdobných kombinatorických úloh obvyklé, hledaný počet určíme, když vyhovující dvojice (k, m) vhodně rozdělíme do menších skupin a určíme počty dvojic v jednotlivých skupinách. V naší úloze se nabízí jednak rozdělení do skupin dvojic (k, m) se stejnou hodnotou k, jednak rozdělení do skupin dvojic (k, m) se stejnou hodnotou m. (To odpovídá tomu, že původní objekty (množiny M vyhovující úloze) rozdělíme do skupin buď podle počtu jejich prvků, nebo podle velikosti jejich nejmenších prvků.)

Uveďme zde oba výpočty. K tomu označme $p(k)$, $q(m)$ počty vyhovujících dvojic (k, m) s daným k, resp. daným m. Uvědomme si, že z nerovností $k < m$ a $km \leqq 100$ plynou odhady $1 \leqq k \leqq 9$ a $2 \leqq m \leqq 100$, které signalizují, že výpočet pomocí hodnot $p(k)$ bude méně pracný než výpočet pomocí hodnot $q(m)$.

Při pevném k jsou vyhovující čísla m určena nerovnostmi $k + 1 \leqq \leqq m \leqq 100/k$. Dosazením jednotlivých hodnot k zjistíme, že $p(1) = 99$, $p(2) = 48$, $p(3) = 30$, $p(4) = 21$, $p(5) = 15$, $p(6) = 10$, $p(7) = 7$, $p(8) = 4$ a $p(9) = 2$. Hledaný celkový počet je tedy roven

$$99 + 48 + 30 + 21 + 15 + 10 + 7 + 4 + 2 = 236.$$

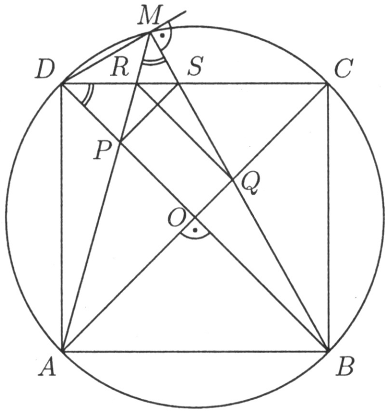
Naopak při pevném m je číslo k omezeno takto: $1 \leqq k \leqq \min\{m - 1, 100/m\}$. Odtud vypočteme, že $q(2) = 1$, $q(3) = 2$, $q(4) = 3, \ldots, q(9) = 8$, $q(10) = q(11) = 9$, $q(12) = 8$, $q(13) = q(14) = 7$, $q(15) = q(16) = 6$, $q(17) = \ldots = q(20) = 5$, $q(21) = \ldots = q(25) = 4$, $q(26) = \ldots = q(33) = 3$, $q(34) = \ldots = q(50) = 2$, $q(51) = \ldots = q(100) = 1$. Hledaný počet je tedy roven

$$1+2+\ldots+8+2\cdot 9+8+2\cdot 7+2\cdot 6+4\cdot 5+5\cdot 4+8\cdot 3+17\cdot 2+50 = 236.$$

Při výpočtu jednotlivých hodnot $q(m)$ je výhodné si uvědomit, že pro každé přirozené $m \leqq 10$ platí nerovnost $m - 1 < 100/m$, zatímco pro každé $m \geqq 11$ platí opačná nerovnost $m - 1 > 100/m$.

A – I – 2

Označme O střed daného čtverce $ABDC$ (obr. 17). Protože bod M leží na zmíněném oblouku, má úhel AMB velikost rovnou polovině velikosti středového (pravého) úhlu AOB, tedy $45°$. Protože stejnou velikost má



Obr. 17

ve čtverci $ABCD$ úhel BDC, je pod úhlem 45° z bodů D, M vidět tutéž úsečku PS. Protože navíc oba body D, M leží ve stejné polorovině s hranicí PS, je $PSMD$ tětivový čtyřúhelník. Jeho vnitřní úhel DMS je pravý (bod M totiž leží na Thaletově kružnici nad průměrem BD), takže je pravý i vnitřní úhel DPS. Tak jsme dokázali, že $PS \perp BD$. Zcela obdobně se ukáže, že $QR \perp AC$. Z posledních dvou vztahů již plyne, že $PS \perp QR$ (neboť $AC \perp BD$).

A – I – 3

Úpravou rovnic „doplněním na čtverce"

$$(x-a)^2 = a^2 - b, \qquad (y+a)^2 = a^2 - b \tag{1}$$

(nebo přímým užitím známého vzorce s diskriminantem) zjišťujeme, že dané rovnice mají v oboru $\mathbb{R}$ kořeny, právě když celá čísla a, b splňují podmínku $a^2 - b \geqq 0$; tyto kořeny pak tvoří dvojice

$$\{x_1, x_2\} = \{a + \sqrt{a^2-b}, a - \sqrt{a^2-b}\},$$
$$\{y_1, y_2\} = \{-a + \sqrt{a^2-b}, -a - \sqrt{a^2-b}\}.$$

Nyní stojíme před otázkou, jak efektivně (tj. bez stereotypního opakování obdobných výpočtů) určit všechny čtyři hodnoty výrazu $V = x_1y_1 - x_2y_2$, který lze zapsat poněkud neurčitě jako

$$\left(a \pm \sqrt{a^2-b}\right)\left(-a \pm \sqrt{a^2-b}\right) - \left(a \pm \sqrt{a^2-b}\right)\left(-a \pm \sqrt{a^2-b}\right),$$

kde při prvním a třetím výskytu znaku $\pm$, stejně jako při druhém a čtvrtém, vybíráme navzájem opačná znaménka. Naznačíme tři možné přístupy. (Celá diskuse bude sice delší, než kdybychom vypsali výpočet všech čtyř různých výrazů, ale o to nám v komentáři nejde.)

(i) Zvolíme-li pevně označení x_1, x_2, y_1, y_2, stačí vypočítat dvě hodnoty $V_1 = x_1y_1 - x_2y_2$, $V_2 = x_1y_2 - x_2y_1$, ostatní dvě hodnoty jsou k nim opačná čísla $V_3 = x_2y_2 - x_1y_1 = -V_1$ a $V_4 = x_2y_1 - x_1y_2 = -V_2$. Oddělený výpočet obou hodnot V_1, V_2 však není nezbytný, jak hned uvidíme.

(ii) Výběr znamének pro čísla x_1 a y_1 lze zapsat ve tvaru $x_1 = a + \varepsilon\sqrt{a^2 - b}$ a $y_1 = -a + \delta\sqrt{a^2 - b}$, kde koeficienty ε a δ jsou čísla z množiny $\{-1, 1\}$. Pak $x_2 = a - \varepsilon\sqrt{a^2 - b}$, $y_2 = -a - \delta\sqrt{a^2 - b}$ a stačí provést jediný výpočet s obecnými ε, δ (pro stručnost zápisu označíme ještě $c = \sqrt{a^2 - b}$):

$$\begin{aligned} x_1y_1 - x_2y_2 &= (a + \varepsilon c)(-a + \delta c) - (a - \varepsilon c)(-a - \delta c) = \\ &= \left(-a^2 - \varepsilon ac + \delta ac + \varepsilon\delta c^2\right) - \left(-a^2 + \varepsilon ac - \delta ac + \varepsilon\delta c^2\right) = \\ &= -2a(\varepsilon - \delta)c. \end{aligned}$$

Protože $\varepsilon - \delta$ nabývá hodnot -2, 0 a 2, hodnoty výrazu $V = x_1y_1 - x_2y_2$ jsou právě čísla $4a\sqrt{a^2 - b}$, 0 a $-4a\sqrt{a^2 - b}$.

(iii) Výběr znamének pro čísla x_1 a y_1 můžeme vyřešit zápisy $x_1 = a + u$ a $y_1 = -a + v$, kde u a v jsou reálná čísla splňující rovnosti $u^2 = v^2 = a^2 - b$. (Dodejme, že čísla u, v jsou vlastně základy druhých mocnin v rovnicích (1), nebo též čísla $\varepsilon\sqrt{a^2 - b}$, $\delta\sqrt{a^2 - b}$ z předchozího odstavce.) Potom platí $x_2 = a - u$, $y_2 = -a - v$ a

$$V = x_1y_1 - x_2y_2 = (a + u)(-a + v) - (a - u)(-a - v) = -2a(u - v).$$

Protože hodnoty $u - v$ za podmínky $u^2 = v^2 = a^2 - b$ jsou $-2\sqrt{a^2 - b}$, 0 a $2\sqrt{a^2 - b}$, docházíme ke stejnému závěru jako v (ii).

Po výpočtu hodnot výrazu V zjišťujeme, že rovnost $x_1y_1 - x_2y_2 = 4k$ nastane, právě když $4k \in \left\{-4a\sqrt{a^2 - b}, 0, 4a\sqrt{a^2 - b}\right\}$. Protože k je přirozené číslo, je $a \neq 0$ a poslední podmínka je ekvivalentní s rovností

$$k = |a|\sqrt{a^2 - b}, \tag{2}$$

která je rozkladem čísla k na součin dvou činitelů, jež musejí být rovněž přirozená čísla. (Číslo $\sqrt{a^2 - b}$ je rovno zlomku $k/|a|$, takže je to číslo racionální, a tudíž číslo celé.) Proto můžeme všechna celočíselná řešení

(a, b) rovnice (2) snadno popsat: vezmeme libovolný rozklad $k = m \cdot \cdot n$ daného čísla k na dva (kladné) činitele m, n a z rovností $|a| = m$ a $\sqrt{a^2 - b} = n$ snadno určíme obě vyhovující dvojice (a, b):

$$a = \pm m, \quad b = m^2 - n^2. \tag{3}$$

Nyní již máme všechno připraveno k řešení otázek původní úlohy.

Část a). Protože pro činitele m, n z libovolného rozkladu $k = m \cdot n$ platí $m \leqq k$ a $n \geqq 1$, plyne ze vzorce (3) odhad $b \leqq m^2 - 1$, přitom rovnost nastane, když zvolíme $m = k$ a $n = 1$. Pro dané k je tedy největší hodnota b rovna $b_{\max} = k^2 - 1$.

Část b). Pro $k = 2\,004$ existuje právě 12 uspořádaných dvojic (m, n), pro něž $2\,004 = m \cdot n$, neboť všech rozkladů čísla 2 004 na dva činitele (nehledíme-li na jejich pořadí) je právě šest: $1 \cdot 2\,004 = 2 \cdot 1\,002 = 3 \cdot \cdot 668 = 4 \cdot 551 = 6 \cdot 334 = 12 \cdot 167$. Protože můžeme dvěma způsoby volit znaménko čísla a ve vzorci (3), hledaný počet dvojic (a, b) je roven dvojnásobku počtu dvojic (m, n), tedy číslu $2 \cdot 12 = 24$.

Část c). Naším úkolem je určit součet čísel b z dvojic (a, b) určených vzorci (3), probíhají-li dvojice (m, n) všechny rozklady $k = m \cdot n$ daného čísla k. Je-li $m = n$, platí podle (3) $b = 0$, proto můžeme uvažovat jen takové dvojice činitelů (m, n), ve kterých $m \neq n$, a sdružit je do párů (m, n) a (n, m). Protože v každém páru pro součet příslušných hodnot b platí $(m^2 - n^2) + (n^2 - m^2) = 0$ (jak pro jednu, tak pro druhou volbu znaménka čísla a), je hledaný součet čísel b ze všech uvažovaných dvojic (a, b) roven nule (pro každé pevné k).

A – I – 4

Označme c, d diference první, resp. druhé z daných aritmetických posloupností. Protože podle zadání platí $y_1 = x_1$, mají členy obou posloupností obecné vyjádření

$$x_i = x_1 + (i-1)c \quad \text{a} \quad y_i = x_1 + (i-1)d$$

pro každý index i. Rozdíl $x_i^2 - y_i^2$ lze proto upravit do tvaru

$$\begin{aligned} x_i^2 - y_i^2 &= \left(x_1^2 + 2x_1(i-1)c + (i-1)^2c^2\right) - \\ &\quad - \left(x_1^2 + 2x_1(i-1)d + (i-1)^2d^2\right) = \\ &= 2x_1(i-1)(c-d) + (i-1)^2(c^2-d^2). \end{aligned}$$

Pro index k podle zadání úlohy platí soustava rovnic

$$53 = 2x_1(k-1)(c-d) + (k-1)^2(c^2-d^2), \tag{1}$$
$$78 = 2x_1(k-2)(c-d) + (k-2)^2(c^2-d^2), \tag{2}$$
$$27 = 2x_1k(c-d) + k^2(c^2-d^2). \tag{3}$$

Tyto rovnice či jejich násobky teď vhodně navzájem sečteme. Abychom se zbavili členů s x_1, odečteme od dvojnásobku rovnice (1) součet rovnic (2) a (3), neboť u členu $2x_1(c-d)$ pak zůstane koeficient $2(k-1)-(k-2+k)=0$. Protože $2\cdot 53-(78+27)=1$ a $2(k-1)^2-(k-2)^2-k^2=-2$, dostaneme zmíněnou kombinací jednoduchou rovnici $1=-2(c^2-d^2)$, ze které určíme $c^2-d^2=-\frac{1}{2}$. To dosadíme do rovnic (2) a (3), které tak přejdou do tvaru

$$78 = 2x_1(k-2)(c-d) - \frac{1}{2}(k-2)^2, \tag{2'}$$
$$27 = 2x_1k(c-d) - \frac{1}{2}k^2. \tag{3'}$$

Členů s x_1 se opět zbavíme, když od k-násobku rovnice (2′) odečteme $(k-2)$-násobek rovnice (3′); získanou rovnici s neznámou k pak vyřešíme:

$$\begin{aligned}
78k - 27(k-2) &= -\frac{1}{2}(k-2)^2\cdot k + \frac{1}{2}k^2\cdot(k-2),\\
51k + 54 &= -\frac{1}{2}(k^3-4k^2+4k) + \frac{1}{2}(k^3-2k^2),\\
0 &= k^2 - 53k - 54,\\
0 &= (k+1)(k-54).
\end{aligned}$$

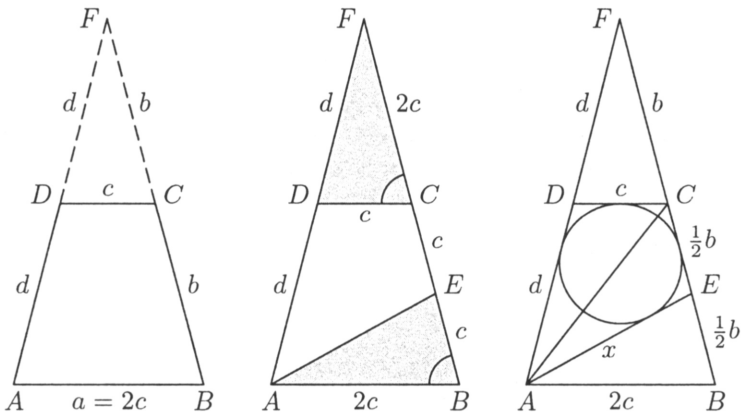
Protože index k je přirozené číslo, platí nutně $k=54$. Tím je úloha vyřešena.

Dodejme, že zadání úlohy nevyžaduje zkoumat, zda pro nalezenou (jedinou) hodnotu indexu k dvojice posloupností splňujících podmínky úlohy existuje. Pro zajímavost uveďme, že takových dvojic posloupností je dokonce nekonečně mnoho; je nutné a stačí, aby jejich společný první člen x_1 a diference c, d splňovaly podmínky $c^2-d^2=-\frac{1}{2}$ a $x_1(c-d)=\frac{55}{4}$. Plyne to snadno z kterékoliv z rovnic (1)–(3) po dosazení hodnot $k=54$ a $c^2-d^2=-\frac{1}{2}$, přesvědčete se sami.

A – I – 5

Označme obvyklým způsobem a, b, c, d délky stran daného lichoběžníku. Podle zadání platí rovnost $a = 2c$, jež znamená, že základna CD je střední příčkou trojúhelníku ABF, kde F je průsečík ramen BC a AD prodloužených za vrchol C resp. D (obr. 18). Proto též platí $|CF| = b$ a $|DF| = d$.

V první části řešení předpokládejme, že $|AB| = |BC|$ neboli $2c = b$ (obr. 19). Pak $|CF| = b = 2c$ a $|EB| = |EC| = \frac{1}{2}b = c$, takže trojúhelníky ABE a FCD (jež jsou na obr. 19 vybarveny) jsou shodné podle věty *sus* (jejich strany délek $2c$ a c svírají souhlasné úhly, vyťaté přímkou BC mezi rovnoběžkami AB a CD). Ze shodnosti třetích stran AE a FD pak plyne rovnost $|AE| = d$. Tak přicházíme k závěru, že strany čtyřúhelníku $AECD$ mají délky d, c, c, d; jde tudíž o tečnový čtyřúhelník (dokonce deltoid, případně kosočtverec).



Obr. 18 Obr. 19 Obr. 20

V druhé části řešení předpokládejme, že čtyřúhelník $AECD$ je tečnový, takže podle známé věty pro délky jeho stran platí rovnost $|AE| + |CD| = |EC| + |AD|$, neboli $x + c = \frac{1}{2}b + d$, kde $x = |AE|$ (obr. 20). Odtud vyjádříme délku x, se kterou budeme dále pracovat, ve tvaru

$$x = \frac{b}{2} - c + d. \tag{1}$$

Všimněme si nyní, že úsečky CD, AC a AE dělí trojúhelník ABF na čtyři trojúhelníky téhož obsahu. (Podrobněji: z $|AD| = |DF|$, $|BC| = |CF|$

a $|BE| = |EC|$ plyne řetězec rovností $S_{ADC} = S_{CDF} = \frac{1}{2}S_{ACF} = \frac{1}{2}S_{ABC} = S_{ABE} = S_{ACE}$.) Proto pro obsahy čtyřúhelníku $AECD$ a trojúhelníku AEF platí úměra $S_{AECD} : S_{AEF} = 2 : 3$. Tyto dva mnohoúhelníky však mají společnou vepsanou kružnici, takže ve stejném poměru 2 : 3 musí být i jejich obvody (připomeňme, že obsah mnohoúhelníku s obvodem o a vepsanou kružnicí o poloměru ϱ je roven $\frac{1}{2}o \cdot \varrho$). Protože tyto obvody mají vyjádření

$$o_{AECD} = x + \frac{b}{2} + c + d, \quad o_{AEF} = x + \frac{3b}{2} + 2d,$$

platí úměra $(x + \frac{1}{2}b + c + d) : (x + \frac{3}{2}b + 2d) = 2 : 3$, ze které snadno vyjádříme neznámou x jako

$$x = \frac{3b}{2} - 3c + d. \tag{2}$$

Porovnáním (1) a (2) dostaneme rovnost $b = 2c$, neboli $b = a$. Tím je rovnost $|AB| = |BC|$ dokázána.

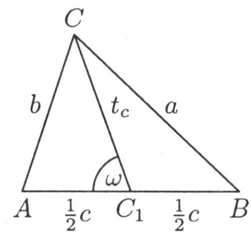
Jiné řešení. (*Pavel Novotný*) Připomeňme nejdříve vyjádření délek těžnic trojúhelníku pomocí délek jeho stran: v obecném trojúhelníku ABC při obvyklém označení platí vzorec

$$4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2. \tag{1}$$

Odvození (1) je snadné: stačí sečíst rovnosti

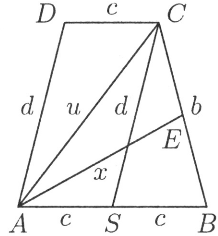
$$b^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + t_c^2 - ct_c \cos\omega, \quad a^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + t_c^2 + ct_c \cos\omega,$$

které platí podle kosinové věty pro trojúhelníky ACC_1 a BCC_1, kde C_1 je střed strany AB a $\omega = |\sphericalangle AC_1C|$ (obr. 21).



Obr. 21

V daném lichoběžníku $ABCD$ (v němž platí $a = 2c$) uvažujme kromě středu E ramene BC ještě střed S základny AB a označme $x = |AE|$ a $u = |AC|$ (obr. 22). Protože $|AS| = |SB| = \frac{1}{2}a = c$, je $ASCD$ rovno-



Obr. 22

běžník, tudíž $|CS| = d$. Nyní podle vzorců (1) vyjádříme délky těžnic AE a CS trojúhelníku ABC:

$$4x^2 = 2u^2 + 2(2c)^2 - b^2 \quad \text{a} \quad 4d^2 = 2u^2 + 2b^2 - (2c)^2.$$

Vzájemným odečtením těchto rovnic vyloučíme veličinu u a dostaneme

$$4(x^2 - d^2) = 3(4c^2 - b^2), \quad \text{neboli} \quad 4(x-d)(x+d) = 3(2c-b)(2c+b).$$

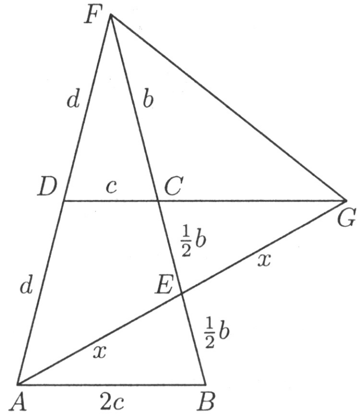
Odtud plyne, že znaménko rozdílu $x - d$ je vždy stejné jako znaménko rozdílu $2c - b$. Ukažme, že z tohoto poznatku plyne celé řešení naší úlohy. Použijeme k tomu známé kritérium pro tečnové čtyřúhelníky: čtyřúhelník $AECD$ je tečnový, právě když se rovnají oba součty délek jeho protilehlých stran, tj. právě když $x + c = d + \frac{1}{2}b$.

Je-li $b = 2c$, pak podle našeho poznatku $x = d$, a tedy $AECD$ je deltoid (případně kosočtverec). (Rovnost $x + c = d + \frac{1}{2}b$ tehdy platí dokonce „sčítanec po sčítanci".)

Je-li $b > 2c$, pak podle našeho poznatku $x < d$, a tedy $x + c < d + \frac{1}{2}b$, takže čtyřúhelník $AECD$ není tečnový.

Je-li $b < 2c$, pak podle našeho poznatku $x > d$, a tedy $x + c > d + \frac{1}{2}b$, takže čtyřúhelník $AECD$ není tečnový.

Další řešení. V lichoběžníku $ABCD$, v němž platí $a = 2c$, uvažujme kromě středu E ramene BC a průsečíku F prodloužených ramen BC, AD ještě průsečík G přímek AE, CD (obr. 23). Snadno vysvětlíme, že úsečky EF a DG jsou těžnice trojúhelníku AFG (a bod C jeho těžiště).



Obr. 23

Platí-li rovnost $b = 2c$, jsou tyto těžnice shodné, a proto je trojúhelník AFG rovnoramenný se základnou FG, tudíž $AECD$ je deltoid (nebo kosočtverec). Lze-li naopak čtyřúhelníku $AECD$ vepsat kružnici, je tato kružnice vepsána i oběma trojúhelníkům AEF a ADG, jež mají shodné obsahy (totiž rovné vždy polovině obsahu trojúhelníku AFG). Pak se ovšem musí rovnat i jejich obvody, což pro délku $x = |AE| = |EG|$ dává rovnici

$$x + \frac{3b}{2} + 2d = 2x + 3c + d,$$

ze které vychází vyjádření neznámé x ve tvaru (2) z prvního řešení. Stejně jako tam pak dojdeme k rovnosti $b = 2c$.

Nad obrázkem 23 lze uvažovat i takto: čtyřúhelník $AECD$ bude tečnový, právě když splynou kružnice vepsané trojúhelníkům AEF a ADG. Tyto trojúhelníky mají totožná ramena vnitřních úhlů při společném vrcholu A, takže jejich vepsané kružnice splynou, právě když budou mít shodné poloměry. To je však ekvivalentní s tím, že oba trojúhelníky mají stejný obvod (vždy totiž mají stejný obsah). Protože společná část hranic trojúhelníků AEF a ADG je tvořena lomenou čarou EAD, rovnají se jejich obvody, právě když platí rovnost $|DF|+|FE| = |DG|+|GE|$. Protože $DE \parallel FG$, je z úvahy o elipse s ohnisky D, E jasné, že odvozená rovnost nastane, právě když úsečky DE a FG mají společnou osu souměrnosti (a $AECD$ je pak deltoid, případně kosočtverec).

A – I – 6

Předpokládejme, že $f\colon \langle 0,+\infty) \to \langle 0,+\infty)$ je libovolná z hledaných funkcí. Dosadíme-li do dané rovnice hodnotu $y=1$ a číslo $x \geqq 0$ ponecháme libovolné, dostaneme

$$f\bigl(xf(1)\bigr)f(1)=f\Bigl(\frac{x}{x+1}\Bigr).$$

Vzhledem k tomu, že $f(1)=0$ podle podmínky b), poslední rovnost znamená, že

$$f\Bigl(\frac{x}{x+1}\Bigr)=0 \quad \text{pro každé } x \geqq 0.$$

Vidíme, že funkce f nabývá hodnoty nula ve všech bodech definičního oboru, které lze vyjádřit ve tvaru zlomku $\dfrac{x}{x+1}$ s vhodným $x \geqq 0$. Každý takový zlomek jistě leží v intervalu $\langle 0,1)$, naopak pro každé reálné číslo $t \in \langle 0,1)$ zřejmě má rovnice $t=\dfrac{x}{x+1}$ nezáporné řešení $x=\dfrac{t}{1-t}$.

Zjištěný poznatek spolu s podmínkou c) ze zadání úlohy vede k závěru, že rovnost $f(t)=0$ platí, právě když $t \in \langle 0,1\rangle$. Abychom určili (kladnou) hodnotu $f(t)$ pro pevné $t>1$, uvážíme dvě rovnice s takovým parametrem t a neznámou x, totiž rovnice

$$f\bigl(x\,f(t)\bigr)f(t)=0 \qquad \text{a} \qquad f\Bigl(\frac{xt}{x+t}\Bigr)=0.$$

Protože podle zadání úlohy se levé strany obou rovnic rovnají (zvolme $y=t$ v dané funkcionální rovnici) a $f(t)>0$, musí mít obě rovnice stejné množiny řešení. Pro první z nich je tato množina určena soustavou nerovnic $0 \leqq x\,f(t) \leqq 1$, takže tvoří interval $\Bigl\langle 0,\dfrac{1}{f(t)}\Bigr\rangle$; druhá rovnice je ekvivalentní se soustavou nerovnic $0 \leqq \dfrac{xt}{x+t} \leqq 1$, jejíž řešení (s ohledem na $x+t>0$) tvoří interval $\Bigl\langle 0,\dfrac{t}{t-1}\Bigr\rangle$.

Z totožnosti obou intervalů plyne rovnost

$$\frac{1}{f(t)}=\frac{t}{t-1}, \qquad \text{neboli} \quad f(t)=\frac{t-1}{t}.$$

Našli jsme hodnotu $f(t)$ pro každé $t>1$. Můžeme tedy shrnout, že hledaná funkce f musí mít tvar

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (0 \leqq t \leqq 1),\\[2mm] \dfrac{t-1}{t} & (t>1). \end{cases}$$

Nyní ještě ukážeme, že funkce f určená posledním předpisem má skutečně vlastnost a) ze zadání úlohy (vlastnosti b) a c) jsou zřejmé). Rovnosti obou stran

$$L = f\big(x\,f(y)\big)f(y), \quad P = f\Big(\frac{xy}{x+y}\Big)$$

dané funkcionální rovnice dokážeme v každém ze čtyř případů rozlišených podle možných hodnot proměnné y a zlomku $\dfrac{xy}{x+y}$:

$$\text{(i)}\quad y = 0 \ (\text{a } x > 0), \qquad \text{(ii)}\quad 0 < y \leqq 1,$$
$$\text{(iii)}\quad y > 1 \text{ a } \frac{xy}{x+y} \leqq 1, \qquad \text{(iv)}\quad y > 1 \text{ a } \frac{xy}{x+y} > 1.$$

Případ (i). Z $y = 0$ plyne $f(y) = 0$ a $\dfrac{xy}{x+y} = 0$, takže rovněž $f\Big(\dfrac{xy}{x+y}\Big) = 0$, tudíž $L = P = 0$.

Případ (ii). Z $0 < y \leqq 1$ plyne $\dfrac{xy}{x+y} < 1$, takže opět $L = P = 0$.

Případ (iii). Z $y > 1$ a $\dfrac{xy}{x+y} \leqq 1$ plyne $x \leqq \dfrac{y}{y-1}$, takže s ohledem na hodnotu $f(y) = \dfrac{y-1}{y}$ platí nerovnost $x\,f(y) \leqq 1$, tudíž opět $L = P = 0$.

Případ (iv). Z $y > 1$ a $\dfrac{xy}{x+y} > 1$ plyne $x > \dfrac{y}{y-1}$, takže s ohledem na hodnotu $f(y) = \dfrac{y-1}{y}$ platí nerovnost $x\,f(y) > 1$, tudíž

$$L = \frac{x \cdot \dfrac{y-1}{y} - 1}{x \cdot \dfrac{y-1}{y}} \cdot \frac{y-1}{y} = \frac{xy - x - y}{xy},$$

$$P = \frac{\dfrac{xy}{x+y} - 1}{\dfrac{xy}{x+y}} = \frac{xy - x - y}{xy}.$$

Rovnost $L = P$ je tak dokázána ve všech případech.

A – S – 1

Posuďme otázku, pro které celočíselné aritmetické posloupnosti $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ existují indexy $i, j \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ takové, že $a_i = 1$ a $a_j = 2\,005$. Zdůrazněme, že taková dvojice indexů (i, j), pokud vůbec existuje, je jediná, neboť v nekonstantní aritmetické posloupnosti se každé číslo vyskytuje nejvýše jednou.

Předpokládejme, že zmíněné indexy i a j známe, a pomocí nich vyjádřeme první člen a_1 a diferenci d dotyčné posloupnosti. Protože obecný člen aritmetické posloupnosti má vyjádření $a_k = a_1 + (k-1)d$, dostáváme soustavu rovnic

$$a_i = a_1 + (i-1)d = 1 \qquad \text{a} \qquad a_j = a_1 + (j-1)d = 2\,005,$$

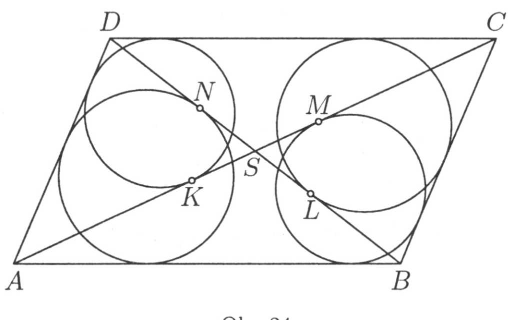
kterou snadno vyřešíme vzhledem k neznámým a_1, d:

$$d = \frac{2\,004}{j-i} \quad \text{a} \quad a_1 = 1 - \frac{2\,004(i-1)}{j-i}.$$

Takové hodnoty a_1, d jsou celá čísla, právě když je přirozené číslo $|j-i|$ dělitelem čísla 2 004, takže $|j-i|$ musí být jedno z čísel 1, 2, 3, 4 nebo 6 (z podmínky $i, j \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ totiž plyne $|j-i| < 10$ a číslo 2 004 jiné jednomístné dělitele nemá). Hledaný počet posloupností je proto roven počtu dvojic indexů (i, j) vybraných z množiny $\{1, 2, \ldots, 10\}$, pro které platí $|j-i| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Takových dvojic (i, j) je po řadě $2 \cdot 9$, $2 \cdot 8$, $2 \cdot 7$, $2 \cdot 6$ a $2 \cdot 4$, takže všech posloupností je $18 + 16 + 14 + 12 + 8 = 68$.

A – S – 2

Rovnoběžník $ABCD$ je útvar středově souměrný podle průsečíku S úhlopříček AC, BD (obr. 24). Proto jsou podle středu S souměrně sdružené trojúhelníky ACD a CAB, tudíž i jejich kružnice vepsané a odpovídající

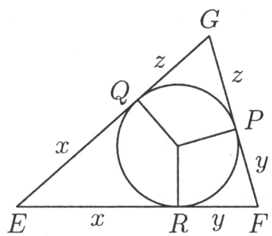


Obr. 24

si body dotyku K a M. Totéž platí i o dvojici bodů L a N. Docházíme tak k závěru, že $KLMN$ je rovnoběžník. (Možnosti $K = M = S$ nebo

$L = N = S$ jsou vyloučeny podmínkou $|AB| > |BC|$, jež zaručuje, že zmíněné trojúhelníky nejsou rovnoramenné se základnou AC nebo BD, takže se vepsané kružnice nedotýkají těchto stran v jejich středu.)

Provedená úvaha o středové souměrnosti však nestačí k důkazu toho, že rovnoběžník $KLMN$ je obdélník, tj. že má shodné úhlopříčky KM a LN. K tomu budeme muset provést výpočet založený na známých vzorcích, které vyjadřují vzdálenosti vrcholů obecného trojúhelníku od bodů dotyku kružnice vepsané pomocí délek stran tohoto trojúhelníku (obr. 25):



Obr. 25

$$x = |ER| = |EQ| = \frac{|EF| + |EG| - |FG|}{2},$$
$$y = |FP| = |FR| = \frac{|FG| + |FE| - |EG|}{2},$$
$$z = |GP| = |GQ| = \frac{|GF| + |GE| - |EF|}{2}.$$

Připomeňme, že tyto vzorce plynou ze soustavy rovnic

$$x + y = |EF|, \quad y + z = |FG|, \quad x + z = |EG|.$$

Vraťme se k naší úloze a v daném čtyřúhelníku $ABCD$ označme ještě délky $a = |AB| = |CD|$, $b = |BC| = |AD|$, $e = |AC|$ a $f = |BD|$. Podle vzorců uvedených vedle obr. 2 platí rovnosti

$$|AK| = \frac{e + b - a}{2} = |CM| \qquad \text{a} \qquad |BL| = \frac{f + b - a}{2} = |DN|.$$

Z předpokladu úlohy $a > b$ proto plyne $|AK| < \frac{1}{2}e = |AS|$, takže bod K leží mezi body A a S a má od středu S vzdálenost

$$|KS| = |AS| - |AK| = \frac{e}{2} - \frac{e + b - a}{2} = \frac{a - b}{2}.$$

Obdobně vyjde, že body L, M, N leží po řadě na úsečkách BS, CS, DS a platí rovnosti $|LS| = |MS| = |NS| = \frac{1}{2}(a-b)$. To dohromady znamená, že čtyřúhelník $KLMN$ má shodné úhlopříčky, které se navzájem půlí; je to tedy obdélník. (Kdyby to byl čtverec, muselo by platit $KM \perp LN$, tedy $AC \perp BD$, což je ve sporu s tím, že $a \neq b$.)

Dodejme, že v předchozím odstavci jsme podali úplné řešení, které nevyžaduje úvahy o středové souměrnosti z úvodního odstavce.

A – S – 3

Po vydělení (kladným) číslem $k+\frac{1}{k}$ a úpravě zlomků dostaneme ekvivalentní soustavu nerovnic

$$\frac{k^2(k-2)}{k^2+1} \leqq x \leqq \frac{k^3(k+3)}{k^2+1}. \tag{1}$$

Abychom určili, mezi kterými celými čísly leží oba zlomky z (1), vydělíme nejprve (se zbytkem) mnohočleny z jejich čitatelů mnohočlenem ze jmenovatele:

$$\begin{aligned}(k^3-2k^2):(k^2+1) &= k-2, &&\text{zbytek } -k+2,\\ (k^4+3k^3):(k^2+1) &= k^2+3k-1, &&\text{zbytek } -3k+1.\end{aligned}$$

Oba výsledky dělení dosadíme do (1):

$$k-2-\frac{k-2}{k^2+1} \leqq x \leqq k^2+3k-1-\frac{3k-1}{k^2+1}. \tag{2}$$

Pokud pro „zbytkové členy" z obou krajních výrazů budou platit nerovnosti

$$0 \leqq \frac{k-2}{k^2+1} < 1 \quad \text{a} \quad 0 < \frac{3k-1}{k^2+1} \leqq 1, \tag{3}$$

budou řešeními soustavy (1) právě ta celá x, pro která platí $k-2 \leqq x \leqq$ $\leqq k^2+3k-2$. Takových x je

$$(k^2+3k-2)-(k-2)+1=(k+1)^2,$$

což je právě počet uvedený v zadání úlohy.

Snadno vysvětlíme, že nerovnosti (3) platí pro každé $k \geqq 2$. Tehdy totiž máme $0 \leqq k-2 < k+1 < k^2+1$, odkud plyne levá část (3). Pravá část (3) je zřejmá pro každé $k \geqq 3$ (neboť tehdy $0 < 3k-1 \leqq k^2-1 <$ $< k^2+1$); pro $k=2$ platí $3k-1=5=k^2+1$, takže v (3) úplně napravo nastane rovnost.

Ještě je nutné zjistit, zda požadovanou vlastnost nemá i „zbylé" přirozené číslo $k=1$; pro ně však má soustava (1) tvar $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 2$, takže má v celých číslech právě tři řešení, což je méně než $(1+1)^2=4$.

Závěr: Hledaná k jsou všechna přirozená čísla větší než 1.

Poznámka. Přesný počet celých čísel x, jež leží v intervalu (1), nelze určit z pouhé *délky* tohoto intervalu, neboť ani tato délka, ani žádný z krajních bodů intervalu není celé číslo. Není těžké ověřit ekvivalentními úpravami, že pro délku intervalu (1) při každém $k > 2$ platí nerovnosti

$$(k+1)^2 - 1 < \frac{k^3(k+3)}{k^2+1} - \frac{k^2(k-2)}{k^2+1} < (k+1)^2. \qquad (4)$$

Z nich ovšem plyne pouze, že počet celých čísel v intervalu (1) je roven buď číslu $(k+1)^2 - 1$, nebo číslu $(k+1)^2$. K přesnému určení tohoto počtu se zdá být nezbytné určit nejmenší celé číslo $(k-2)$ a největší celé číslo (k^2+3k-2), která v daném intervalu leží.

A – II – 1

Po vynásobení kladným číslem $4(a+1)(b+1)(c+1)$ postupnými ekvivalentními úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned}
4a(c+1) + 4b(a+1) + 4c(b+1) &\geqq 3(a+1)(b+1)(c+1),\\
4(ac+c) + 4(ab+b) + 4(bc+c) &\geqq 3(ab+a+b+1)(c+1),\\
4(ab+ac+bc+a+b+c) &\geqq 3(abc+ab+ac+bc+a+b+c+1),\\
ab+ac+bc+a+b+c &\geqq 3(abc+1).
\end{aligned}$$

Protože $abc = 1$, dostaneme po dosazení do pravé strany poslední nerovnosti nerovnost

$$ab + ac + bc + a + b + c \geqq 6. \qquad (1)$$

Dosadíme-li ještě do levé strany $ab = \dfrac{1}{c}$, $ac = \dfrac{1}{b}$ a $bc = \dfrac{1}{a}$, dostaneme nerovnost

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) \geqq 6,$$

která platí, neboť hodnota každé závorky v levé straně je alespoň 2. Pro každé $t > 0$ je totiž splněna nerovnost $t + t^{-1} \geqq 2$, v níž nastane rovnost, právě když $t = 1$. (Tento známý fakt lze zdůvodnit např. úpravou nerovnosti $\left(\sqrt{t} - \sqrt{t^{-1}}\right)^2 \geqq 0$, nebo se lze odvolat na nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou navzájem převrácených čísel.) Zároveň vidíme, že rovnost v nerovnosti (1), a tedy i v nerovnosti z textu úlohy nastane, právě když platí $a = b = c = 1$. Tím je řešení celé úlohy ukončeno.

Dodejme, že za předpokladu $abc = 1$ nerovnost (1) plyne přímo z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem šestice čísel ab, ac, bc, a, b, c:

$$\frac{ab + ac + bc + a + b + c}{6} \geqq \sqrt[6]{ab \cdot ac \cdot bc \cdot a \cdot b \cdot c} = \sqrt{abc} = 1.$$

A – II – 2

Odečteme-li od první rovnice rovnici druhou, dostaneme postupnými úpravami:

$$(xy + xz + x) - (yz + xy + y) = (y^2 + z^2 - 5) - (z^2 + x^2 - 5),$$
$$(x - y)z + x - y = (y - x)(y + x),$$
$$(x - y)(x + y + z + 1) = 0.$$

Analogicky odvodíme rovnosti

$$(y - z)(x + y + z + 1) = 0 \quad \text{a} \quad (x - z)(x + y + z + 1) = 0. \qquad (1)$$

Ve všech třech odvozených rovnicích vystupuje činitel $x + y + z + 1$. Rozlišíme proto, zda je roven nule, či nikoliv.

A. Nechť $x + y + z + 1 = 0$. Pak můžeme původní soustavu rovnic zapsat takto:

$$x \cdot (-x) = y^2 + z^2 - 5, \quad y \cdot (-y) = z^2 + x^2 - 5,$$
$$z \cdot (-z) = x^2 + y^2 - 5.$$

Vidíme, že celá soustava je ekvivalentní s jedinou rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, která (vzhledem k nezápornosti druhých mocnin) má v oboru celých čísel pouze taková řešení, že trojice (x^2, y^2, z^2) je (až na pořadí) trojice $(4, 1, 0)$, takže (x, y, z) je permutace některé z trojic $(\pm 2, \pm 1, 0)$. Znaménka čísel x, y, z snadno určíme z podmínky $x + y + z + 1 = 0$: vyhovuje jedině trojice $(-2, 1, 0)$ a libovolná její permutace. V případě A tedy dostáváme právě šest řešení dané soustavy.

B. Nechť $x + y + z + 1 \neq 0$. Pak z rovnic odvozených v úvodu řešení vyplývá, že platí $x = y = z$. Tehdy rovnice dané soustavy splývají v jedinou rovnici $x(2x + 1) = 2x^2 - 5$, které vyhovuje pouze $x = -5$. V případě B tedy máme jediné řešení $x = y = z = -5$.

Dodejme, že v první části řešení jsme mohli rovněž původní soustavu rovnic upravit do tvaru

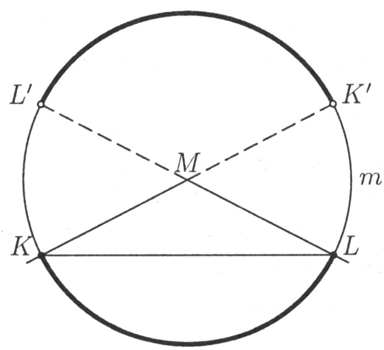
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 5 &= x(x + y + z + 1) = \\ &= y(x + y + z + 1) = \\ &= z(x + y + z + 1). \end{aligned} \tag{2}$$

Odtud opět dostáváme, že platí buď $x + y + z + 1 = 0$, nebo $x = y = z$.

Odpověď: Soustava má sedm řešení: trojici $(-5, -5, -5)$, trojici $(-2, 1, 0)$ a její libovolnou permutaci.

A – II – 3

Ukážeme, že hledanou množinu tvoří body K a L a dále vnitřní body oblouku KL kružnice $m(M, |MK|)$ a oblouku $K'L'$ středově souměrně sdruženého s obloukem KL podle středu M (obr. 26).

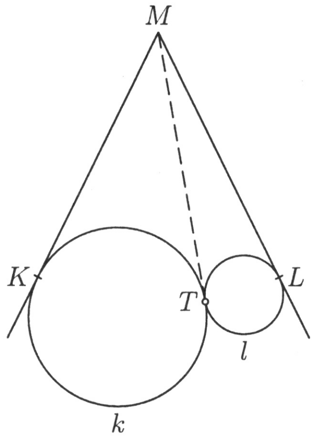


Obr. 26

Dokažme nejdříve, že přímka MT (obr. 27) je (vnitřní) společnou tečnou kružnic k a l. Připusťme, že přímka MT protne kružnici k v bodech T, T_1 a kružnici l v bodech T, T_2. Pro mocnosti bodu M (je to bod tečny, proto leží ve vnější oblasti každé z obou kružnic k a l) k oběma kružnicím platí

$$|MT| \cdot |MT_1| = |MK|^2 = |ML|^2 = |MT| \cdot |MT_2|,$$

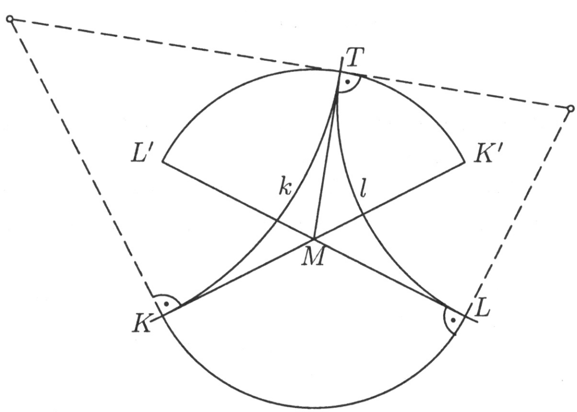
odkud $|MT_1| = |MT_2|$. Protože oba body T_1, T_2 leží na téže polopřímce MT, plyne odtud $T_1 = T_2$. Obě kružnice k a l však mají společný jediný bod, takže $T_1 = T_2 = T$. Proto je MT společná tečna obou kružnic a navíc $|MT| = |MK| = |ML|$, bod T tedy leží na kružnici $m(M, |MK|)$.



Obr. 27

Protože přímka MT obě kružnice odděluje, neleží body K a L uvnitř téže poloroviny určené přímkou MT, přímka MT protíná stranu KL trojúhelníku KLM, a proto bod T leží na jednom z kratších oblouků KL, $K'L'$ kružnice m.

Je-li naopak T libovolný vnitřní bod jednoho z těchto oblouků (obr. 28), leží sousední konvexní úhly KMT a LMT na opačných stranách společného ramene MT. Z rovností $|MK| = |MT|$ a $|ML| = |MT|$ pak plyne, že do zmíněných úhlů lze vepsat kružnice tak, aby se dotkly ramen příslušného úhlu v bodech K a T, resp. L a T. To jsou vyhovující kružnice k, l s dotykovým bodem T.



Obr. 28

Je-li $T = K$, vyhovuje libovolná kružnice k dotýkající se přímky MK v bodě K a ležící v polorovině MKL' a kružnice l dotýkající se ramen úhlu KML v bodech K a L (ta je určena jednoznačně). Analogicky sestrojíme vyhovující kružnice k a l pro bod $T = L$.

Bod K' ani bod L' do hledané množiny patřit nemohou, protože K' leží na tečně KM k libovolné z kružnic k a analogicky bod L' leží na tečně LM k libovolné z kružnic l.

A – II – 4

Označme x a y hledaná čísla, přičemž $x > y$. Protože $p = x-y$ je prvočíslo a pro největší společný dělitel d čísel x a y platí $d \mid (x - y)$ neboli $d \mid p$, je buď $d = p$, nebo $d = 1$.

Kdyby platilo $d = p$, měli bychom $y = kp$ a $x = y + p = (k + 1)p$ pro vhodné přirozené k, takže součin xy by se rovnal číslu $k(k + 1)p^2$. To ale není druhá mocnina přirozeného čísla (dále stručněji „čtverec“) pro žádné k, neboť číslo $k(k + 1)$ není nikdy čtverec.[1] Musí proto být $d = 1$, takže čísla x a y jsou nesoudělná. Jejich součin xy je pak čtverec jedině v případě, kdy oba činitelé jsou čtverce, tedy $x = u^2$ a $y = v^2$ pro vhodná $u, v \in \mathbb{N}$, $u > v$, odkud $p = x-y = (u-v)(u+v)$. Takový rozklad prvočísla p na součin má jediné možné činitele $u - v = 1$ a $u + v = p$. Odtud snadno plynou rovnosti $u = \frac{1}{2}(p + 1)$ a $v = \frac{1}{2}(p - 1)$, z nichž pro součet $s = x + y$ získáme vyjádření

$$s = x + y = u^2 + v^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{p^2+1}{2}.$$

Dekadický zápis čísla s podle zadání končí číslicí 3, takže zápis čísla p^2+1 (rovného číslu $2s$) končí číslicí 6. Zápis čísla p^2 proto končí číslicí 5, je tedy násobkem pěti, což nastane jedině pro prvočíslo $p = 5$. Dosazením této hodnoty do odvozených vzorců dostaneme $u = 3$, $v = 2$, $x = 9$ a $y = 4$. Zkouška je triviální: $9 - 4 = 5$, $9 + 4 = 13$, $9 \cdot 4 = 6^2$.

Odpověď: Podmínkám úlohy vyhovuje jediná dvojice čísel 9 a 4.

---

[1] Platí totiž $k^2 < k(k+1) < (k+1)^2$, takže číslo $k(k+1)$ leží mezi dvěma sousedními čtverci. Jiné vysvětlení lze založit na tom, že čísla k, $k+1$ jsou navzájem nesoudělná, takže by obě musela být čtverci lišícími se o 1. Takové čtverce však neexistují.

A – III – 1

Označme c, resp. d diference hledaných posloupností, takže z vyjádření $x_i = x_1 + (i-1)c$ a $y_i = x_1 + (i-1)d$ pak dostaneme pro každé i rovnost

$$x_i y_i = x_1^2 + (i-1)x_1(c+d) + (i-1)^2 cd.$$

Budeme se tedy zabývat otázkou, kdy pro některý index $k > 1$ platí soustava rovnic

$$x_1^2 + (k-2)x_1(c+d) + (k-2)^2 cd = 42, \qquad (1)$$

$$x_1^2 + (k-1)x_1(c+d) + (k-1)^2 cd = 30, \qquad (2)$$

$$x_1^2 + kx_1(c+d) + k^2 cd = 16. \qquad (3)$$

Odečteme-li od dvojnásobku rovnice (2) součet rovnic (1) a (3), dostaneme po úpravě rovnost $cd = -1$. Odečteme-li od rovnice (3) rovnici (2), obdržíme vztah

$$x_1(c+d) + (2k-1)cd = -14,$$

z něhož po dosazení hodnoty $cd = -1$ dojdeme k rovnosti

$$x_1(c+d) = 2k - 15. \qquad (4)$$

Dosazením tohoto výsledku do rovnice (3) dostaneme vztah

$$x_1^2 + k(2k-15) - k^2 = 16,$$

ze kterého vyjádříme x_1^2 jako kvadratickou funkci indexu k:

$$x_1^2 = 16 - k(2k-15) + k^2 = 16 + 15k - k^2 = (k+1)(16-k).$$

Protože $x_1^2 \geqq 0$ a $k > 1$, plyne z posledního vzorce odhad $k \leqq 16$. V případě $k = 16$ ovšem vychází $x_1 = 0$ a rovnost (4) pak přejde do tvaru $0(c+d) = 2$, což není možné. Pro $k = 15$ dostaneme $x_1^2 = 16$, takže $x_1 = \pm 4$. Pro $x_1 = 4$ (a $k = 15$) z (4) plyne $c + d = \frac{15}{4}$, což spolu s rovností $cd = -1$ vede k závěru, že $\{c, d\} = \{4, -\frac{1}{4}\}$. To znamená, že obě posloupnosti jsou (až na pořadí) určeny vzorci:

$$x_i = 4 + (i-1)4 \quad \text{a} \quad y_i = 4 - \frac{i-1}{4} \quad \text{pro každé } i. \qquad (5)$$

Pro takovou dvojici posloupností skutečně platí

$$x_{14}y_{14} = 56 \cdot \tfrac{3}{4} = 42, \quad x_{15}y_{15} = 60 \cdot \tfrac{1}{2} = 30 \quad \text{a} \quad x_{16}y_{16} = 64 \cdot \tfrac{1}{4} = 16.$$

Podobně pro druhou možnou hodnotu $x_1 = -4$ dostaneme posloupnosti, jejichž členy jsou opačné ke členům posloupností (5), tedy posloupnosti

$$x_i = -4 - (i-1)4 \quad \text{a} \quad y_i = -4 + \frac{i-1}{4} \quad \text{pro každé } i. \tag{6}$$

Odpověď. Největší hodnota indexu k je 15 a všechny vyhovující posloupnosti jsou (až na možnou záměnu pořadí ve dvojici) určeny vztahy (5) a (6).

Jiné řešení. (Podle *Zbyňka Konečného.*) Uvažujme posloupnost $z_i = x_i y_i$. Protože je to kvadratická posloupnost, je příslušná diferenční posloupnost $r_i = z_{i+1} - z_i$ aritmetická, přičemž z rovností

$$z_{k-1} = 42, \quad z_k = 30, \quad z_{k+1} = 16$$

plyne $r_{k-1} = -12$ a $r_k = -14$. Aritmetická posloupnost (r_i) má proto diferenci -2, takže $r_{k+1} = -16$ a $z_{k+2} = 0$. Využijeme-li opakovaně vztah $r_{k-i} = r_k + 2i$, dostaneme

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= r_k + z_k = r_k + r_{k-1} + z_{k+1} = \ldots = \\ &= r_k + r_{k-1} + \ldots + r_{k-14} + z_{k-14} = \\ &= -14 - 12 - \ldots - 2 + 0 + 2 + \ldots + 12 + 14 + z_{k-14} = \\ &= z_{k-14}, \end{aligned}$$

takže je $z_{k-14} = z_{k+1} = 16$ a také $z_{k-15} = z_{k-14} - r_{k-15} = 16 - 16 = 0$. Pro $n > 15$ je tedy $r_{k-n} > 0$ a $z_{k-n} < 0$. Vidíme, že členy posloupnosti (z_i) jsou nezáporné právě jen pro indexy $i \in \{k-15, k-14, \ldots, k-1\}$, a protože $z_1 = x_1 y_1 = x_1^2 \geqq 0$, musí být $1 \geqq k - 15$, neboli $k \leqq 16$.

Pro $k = 16$ je ovšem podle předchozích výpočtů $z_1 = z_{k-15} = 0$, takže také $x_1 = y_1 = 0$. Zároveň je $z_{18} = z_{k+2} = 0$, což znamená, že jedna z aritmetických posloupností (x_i), (y_i) je nulová. To není možné, protože pak by byla nulová i posloupnost (z_i).

Pro $k = 15$ je $z_1 = 16$, takže $x_1 = \pm 4$. Protože $z_{17} = z_{k+2} = 0$, je $x_{17} = 0$ nebo $y_{17} = 0$. Vzhledem k symetrii daných podmínek můžeme předpokládat, že je $x_{17} = 0$. Označíme-li c, resp. d diference hledaných posloupností, pak pro $x_1 = -4$ vyjde $c = \frac{1}{4}$, pro $x_1 = 4$ vyjde $c = -\frac{1}{4}$. Z rovnosti $x_{15}y_{15} = 30$ pak v prvním případě dostaneme $d = -4$, v druhém $d = 4$. Je tedy

$$x_i = -4 + \frac{1}{4}(i-1) \quad \text{a} \quad y_i = -4 - 4(i-1) \quad \text{pro každé } i$$

nebo

$$x_i = 4 - \frac{1}{4}(i-1) \quad \text{a} \quad y_i = 4 + 4(i-1) \quad \text{pro každé } i.$$

Snadno ověříme, že obě dvojice posloupností splňují podmínky úlohy. Největší hodnota indexu k je tedy $k = 15$ a krkomě uvedených posloupností mu odpovídají i další dvě dvojice vzniklé záměnou (x_i) a (y_i).

A – III – 2

Nejprve v závislosti na daném čísle m ($1 \leqq m \leqq 47$) vyjádříme, kolik množin X popsané vlastnosti má nejmenší prvek rovný zvolenému číslu m. K tomu vydělíme číslo 47 číslem m se zbytkem,

$$47 = qm + r \quad (q \geqq 1,\ 0 \leqq r < m),$$

a ukážeme, že existuje právě $(q+1)^r q^{m-1-r}$ vyhovujících množin X s nejmenším prvkem m. Protože každá taková množina X je podmnožina množiny

$$\mathsf{T}_m = \{m, m+1, \ldots, 47\},$$

rozdělíme množinu T_m na nejvýše m skupin čísel tak, aby se čísla v téže skupině navzájem lišila o násobky čísla m: dostaneme tak předně q-prvkovou skupinu

$$\mathsf{P}_0 = \{m, 2m, \ldots, qm\},$$

v případě $r > 0$ dalších r skupin o q prvcích

$$\mathsf{P}_i = \{m+i, 2m+i, \ldots, qm+i\} \quad (1 \leqq i \leqq r),$$

v případě $r < m-1$ a $q > 1$ pak ještě $m-r-1$ skupin o $q-1$ prvcích

$$\mathsf{P}_i = \{m+i, 2m+i, \ldots, (q-1)m+i\} \quad (r+1 \leqq i \leqq m-1).$$

Obecně lze říci, že každá skupina P_i je tvořena právě těmi čísly z T_m, která při dělení číslem m dávají zbytek i; jak jsme uvedli, některé z těchto m skupin $\mathsf{P}_0, \ldots, \mathsf{P}_{m-1}$ mohou být prázdné.

Množina $\mathsf{X} \subseteq \mathsf{T}_m = \mathsf{P}_0 \cup \mathsf{P}_1 \cup \ldots \cup \mathsf{P}_{m-1}$ s nejmenším prvkem m zřejmě má požadovanou vlastnost, právě když obsahuje celou skupinu P_0 a zároveň pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ buď neobsahuje žádný prvek z P_i, nebo obsahuje všechny prvky z P_i *od jistého prvku počínaje*. Tak pro každou z r skupin $\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_r$ máme $q+1$ možností, zatímco pro každou z $m-r-1$ skupin $\mathsf{P}_{r+1}, \ldots, \mathsf{P}_{m-1}$ máme q možností, jak vybrat prvky pro X. Protože tyto výběry můžeme kombinovat nezávisle, je počet množin X skutečně roven číslu $(q+1)^r q^{m-1-r}$. (Platí to i pro případy $r = 0$, $r = m-1$ nebo $q = 1$, kdy některé ze skupin P_i jsou prázdné.)

Nyní zjistíme, kdy pro neúplný podíl q a zbytek r z rovnosti $47 = qm + r$ platí

$$(q+1)^r q^{m-1-r} = 2^{15}. \qquad (*)$$

V případě $q = 1$ dostáváme z $(*)$ rovnici $2^r = 2^{15}$, odkud $r = 15$, a z rovnosti $47 = m + r$ pak vychází $m = 32$.

V případě $q > 1$ musí být v rovnici $(*)$ jedna z mocnin $(q+1)^r$, q^{m-1-r} rovna 2^{15} a druhá rovna jedné, tedy musí mít nulový exponent. Proberme nyní možné hodnoty $q > 1$ v rostoucím pořadí a u každé z nich otestujme, zda příslušné řešení rovnice $(*)$ splňuje podmínku $47 = qm+r$:

a) $q = 2^1$, $m - 1 - r = 15$ a $r = 0$. Pak $m = 16$ a $qm + r = 32$ — nevyhovuje.

b) $q = 2^3 - 1$, $r = 5$ a $m - 1 - r = 0$. Pak $m = 6$ a $qm + r = 47$ — vyhovuje.

c) $q = 2^3$, $m - 1 - r = 5$ a $r = 0$. Pak $m = 6$ a $qm + r = 48$ — nevyhovuje.

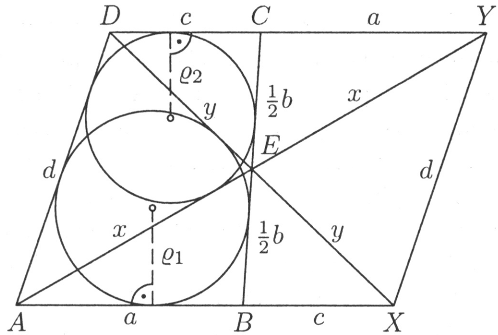
Z podmínky $47 = qm + r$ plyne, že největší možné hodnoty q jsou 47 (pro $m = 1$) a 23 (pro $m = 2$). Zbylé možnosti ($q = 2^5 - 1$, $q = 2^5$, $q = 2^{15} - 1$, $q = 2^{15}$) už proto není nutné detailně rozebírat.

Odpověď. Hledané hodnoty m jsou dvě: $m = 6$ a $m = 32$.

A – III – 3

Označme $x = |AE|$, $y = |DE|$ a doplňme lichoběžník $ABCD$ na rovnoběžník $AXYD$ tak, aby bod E byl průsečíkem jeho úhlopříček AY a DX (obr. 29). Zřejmě platí $|AX| = |DY| = a + c$, $|AY| = 2x$ a $|DX| = 2y$.

Označme ϱ_1 (resp. ϱ_2) poloměr kružnice vepsané tečnovému čtyřúhelníku $ABED$ (resp. $AECD$), jež je zároveň vepsána i trojúhelníku AXD (resp. AYD). Pro délky stran těchto čtyřúhelníků podle známého kritéria



Obr. 29

platí rovnosti

$$a + y = \frac{b}{2} + d = c + x,$$

neboli

$$a + y = c + x, \tag{1}$$

takže oba čtyřúhelníky mají týž obvod. Trojúhelníky AXD a AYD mají zase týž obsah (rovný $\frac{1}{2}S_{AXYD}$, tedy rovný S_{ABCD}). Poměr $\varrho_1 : \varrho_2$ se proto rovná jak poměru obsahů $S_{ABED} : S_{AECD}$, tak poměru obvodů $o_{AYD} : o_{AXD}$ (ty jsme zapsali v opačném pořadí než příslušné poloměry). Oba tyto poměry nyní vyjádříme a pak porovnáme (v značí výšku lichoběžníku $ABCD$):

$$\frac{S_{ABED}}{S_{AECD}} = \frac{S_{ABCD} - S_{CDE}}{S_{ABCD} - S_{ABE}} = \frac{\frac{1}{2}(a+c)v - \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{2}v}{\frac{1}{2}(a+c)v - \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}v} = \frac{2a+c}{a+2c},$$

$$\frac{o_{AYD}}{o_{AXD}} = \frac{2x + (a+c) + d}{2y + (a+c) + d}.$$

Spolu s (1) tak pro neznámé x, y dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$\frac{2a+c}{a+2c} = \frac{2x+a+c+d}{2y+a+c+d} \qquad \text{a} \qquad x - y = a - c,$$

jež má za podmínky $a \neq c$ (zaručené tím, že $ABCD$ je *licho*běžník) jediné řešení

$$x = \frac{3a+c-d}{2} \qquad \text{a} \qquad y = \frac{a+3c-d}{2}. \tag{2}$$

Dosazením (2) do rovnosti (1) dostaneme první dokazovaný vztah $3(a + c) = b + 3d$. S jeho pomocí lze (2) přepsat do tvaru

$$x = a + \frac{b}{6} \qquad \text{a} \qquad y = c + \frac{b}{6}.$$

S tímto vyjádřením délek x, y využijeme kosinové věty pro trojúhelníky ABE, CDE k výpočtu kosinu úhlu ABE resp. DCE:

$$\cos|\sphericalangle ABE| = \frac{a^2 + (\frac{1}{2}b)^2 - (a + \frac{1}{6}b)^2}{2a \cdot \frac{1}{2}b} = \frac{2b}{9a} - \frac{1}{3},$$

$$\cos|\sphericalangle DCE| = \frac{c^2 + (\frac{1}{2}b)^2 - (c + \frac{1}{6}b)^2}{2c \cdot \frac{1}{2}b} = \frac{2b}{9c} - \frac{1}{3}.$$

Protože se úhly ABE a DCE doplňují do 180°, je součet jejich kosinů roven nule:

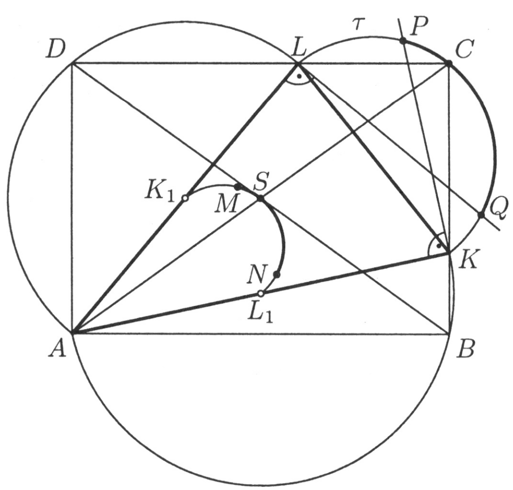
$$\left(\frac{2b}{9a} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2b}{9c} - \frac{1}{3}\right) = 0.$$

Odtud již snadnou úpravou dostaneme druhý dokazovaný vztah

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{3}{b}.$$

A – III – 4

Označme K_1 střed strany AL a L_1 střed strany AK. Ukážeme, že hledanou množinou bodů S je oblouk MN, který je částí polokružnice sestrojené nad průměrem K_1L_1 v polorovině opačné k polorovině K_1L_1A, přitom krajní body M, N zmíněného oblouku jsou určeny podmínkami $ML_1 \perp AK$ a $NK_1 \perp AL$ (obr. 30).



Obr. 30

Protože průsečík S úhlopříček AC, BD je středem úsečky AC, množinu všech bodů S dostaneme, když nejprve určíme množinu vrcholů C a tu pak zobrazíme ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{1}{2}$. Protože je úhel KCL pravý (nemůže být ani $C = K$, ani $C = L$) a přímka KL body A a C odděluje, leží bod C na polokružnici τ sestrojené nad průměrem KL v polorovině opačné k polorovině KLA. Které body $C \in \tau$ jsou skutečně vrcholy vyhovujících pravoúhelníků $ABCD$? Zřejmě právě ty, pro něž polopřímky CK a CL protnou analogicky sestrojené polokružnice nad průměry AK resp. AL (v bodech, které budou vrcholy B resp. D). Jsou to body oblouku $PQ \subset \tau$, jehož krajní body P, Q jsou určeny podmínkami $PK \perp AK$ a $QL \perp AL$. Hledaná množina bodů S je proto obrazem oblouku PQ ve zmíněné stejnolehlosti, takže to je skutečně oblouk MN popsaný v úvodu řešení (body M, N jsou obrazy bodů P a Q, neboť bod L_1 je obrazem bodu K a bod K_1 je obrazem bodu L).

A – III – 5

V první části řešení předpokládejme, že první z daných kvadratických rovnic má kořeny u, v a druhá z nich má kořeny u, v^{-1}. Pak platí vzorce

$$p = -(u+v), \quad q = uv, \quad r = -\left(u + \frac{1}{v}\right), \quad s = u \cdot \frac{1}{v}. \tag{1}$$

Po jejich dosazení do jednotlivých stran rovností, jež máme dokázat, dostaneme

$$\begin{aligned}
pr &= (u+v)\left(u+\frac{1}{v}\right) &&= \frac{(u+v)(uv+1)}{v},\\
(q+1)(s+1) &= (uv+1)\left(\frac{u}{v}+1\right) &&= \frac{(uv+1)(u+v)}{v},\\
p(q+1)s &= -(u+v)(uv+1)\cdot\frac{u}{v} &&= -\frac{(u+v)(uv+1)u}{v},\\
r(s+1)q &= -\left(u+\frac{1}{v}\right)\left(\frac{u}{v}+1\right)\cdot uv &&= -\frac{(uv+1)(u+v)u}{v},
\end{aligned}$$

takže vidíme, že skutečně platí rovnosti

$$pr = (q+1)(s+1) \quad \text{a} \quad p(q+1)s = r(s+1)q. \tag{2}$$

Všimněme si ještě, že rovněž platí rovnosti

$$-\frac{ps}{s+1} = \frac{(u+v)\cdot\frac{u}{v}}{\frac{u}{v}+1} = u \qquad \text{a} \qquad -\frac{p}{s+1} = \frac{u+v}{\frac{u}{v}+1} = v,$$

které nám napovídají, jak postupovat při důkazu obrácené implikace.

V druhé části řešení předpokládejme, že čísla p, q, r, s splňují rovnosti (2) a navíc platí $q \neq -1$ a $s \neq -1$. Z první rovnosti (2) pak plyne $p \neq 0$ a $r \neq 0$, takže rovnosti (2) lze upravit do tvaru

$$\frac{p}{s+1} = \frac{q+1}{r} \quad \text{a} \quad \frac{ps}{s+1} = \frac{rq}{q+1}. \tag{3}$$

Definujme reálná čísla u, v pomocí vzorců

$$u = -\frac{ps}{s+1} \quad \text{a} \quad v = -\frac{p}{s+1}. \tag{4}$$

Pak platí $v \neq 0$ a podle (4) lze rovněž psát

$$u = -\frac{rq}{q+1} \quad \text{a} \quad v = -\frac{q+1}{r}. \tag{5}$$

Ověříme-li, že tato čísla u, v splňují všechny čtyři vztahy (1), bude to znamenat, že (u, v) a (u, v^{-1}) jsou dvojice kořenů kvadratických rovnic z textu úlohy a řešení úlohy bude u konce. Podle (4) a (5) je ale prověrka vztahů (1) snadná:

$$\begin{aligned}
-(u+v) &= \frac{ps}{s+1} + \frac{p}{s+1} &&= p,\\
uv &= \frac{-rq}{q+1} \cdot \frac{-(q+1)}{r} &&= q,\\
-\left(u + \frac{1}{v}\right) &= \frac{rq}{q+1} + \frac{r}{q+1} &&= r,\\
u \cdot \frac{1}{v} &= \frac{-ps}{s+1} \cdot \frac{-(s+1)}{p} &&= s.
\end{aligned}$$

A – III – 6

Ukážeme, že požadovaným způsobem nelze obarvit patnáctici čísel

$$\underbrace{5, 4, 3, 2, 1}_{\mathrm{I}}, \underbrace{9, 8, 7, 6}_{\mathrm{II}}, \underbrace{12, 11, 10}_{\mathrm{III}}, \underbrace{14, 13}_{\mathrm{IV}}, \underbrace{15}_{\mathrm{V}},$$

pod níž jsme vyznačili rozdělení na pět skupin sousedních čísel (tvořících klesající posloupnosti).

Připusťme, že uvedenou patnáctici jsme zapsali čtyřmi barvami tak, že čísla se stejnou barvou tvoří monotonní posloupnosti. Ve skupině I je pět čísel, dvě z nich proto mají stejnou barvu; protože tvoří klesající posloupnost, barvu těchto dvou čísel nemá žádné z čísel skupin II až V. V nich jsou tedy pouze čísla tří barev; barvu dvou čísel ze skupiny II nemá žádné z čísel skupin III až V, ve kterých jsou tedy pouze čísla dvou barev. Ještě jedním opakováním předchozí úvahy zjistíme, čísla 14, 13 a 15 ze skupin IV a V jsou jedné barvy, a to je spor.

Poznámka. Příklad v uvedeném řešení lze snadným způsobem zobecnit a dokázat tak následující negativní tvrzení: Splňují-li přirozená čísla k a N rovnost

$$N = 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1),$$

pak k barev *nestačí* k tomu, abychom jimi zapsali členy jakékoliv posloupnosti sestavené z N různých celých čísel, mají-li čísla kterékoliv barvy tvořit monotonní posloupnost. Bez důkazu dodejme, že k barev k požadovanému úkolu stačí, platí-li nerovnost

$$N < 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1).$$