Přípravná soustředění před 46. MMO

V průběhu 54. ročníku se konalo výběrové soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu bezprostředně po skončeném celostátním kole kategorie A, a to od 18. do 22. dubna 2005 v Bílovci. Na soustředění bylo pozváno všech 10 vítězů III. kola kategorie A. Soustředění bylo zaměřeno na přípravu reprezentantů a ke konečné nominaci šestičlenného družstva.

Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

František Konopecký	8/8, GLJ Holešov	82
Ondřej Bílka	3/4, G Zlín, Lesní čtvrť	56,5
Marek Pechal	7/8, G Zlín, Lesní čtvrť	72,5
Jakub Opršal	3/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	58
Marek Scholle	6/8, G Pardubice	49
Jaroslav Hančl	3/4, GMK Bílovec	60
Jaromír Kuben	3/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	75,5
Michal Švagerka	4/4, GJKT Hradec Králové	47
Pavel Kocourek	4/4, SPŠST Praha 1, Panská	63
Martin Křivánek	3/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	47

Na základě uvedených výsledků, v nichž jsou započítány i výsledky oblastního a celostátního kola, bylo prvních šest vybráno do reprezentačního družstva a sedmý byl určen jako náhradník. Toto družstvo nás reprezentovalo i na již tradičním střetnutí s družstvy Slovenska a Polska.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:
dr. *Jaroslav Zhouf* (18. 4.),
dr. *Pavel Calábek* (20. 4.),
dr. *Jaroslav Švrček* (19. 4. a 21. 4.)
a doc. *Jaromír Šimša* (22. 4.).

Úlohy zadané na přípravném soustředění

1. Funkce f z oboru celých čísel do oboru celých čísel splňuje zároveň tyto podmínky:

1) $f(f(n)) = n$ pro všechna celá čísla n,
2) $f(f(n+2)+2) = n$ pro všechna celá čísla n,
3) $f(0) = 1$.

Určete $f(2005)$.

2. Dokažte, že pro každá čtyři kladná reálná čísla a, b, c, d platí

$$\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{cd} \leqq \sqrt[3]{(a+b+c)(b+c+d)}.$$

3. V sázkové kanceláři se přijímají sázky na šest zápasů, v nichž může dojít buď k výhře domácích, nebo k výhře hostů, nebo k nerozhodnému výsledku. Každá sázka je na všech šest zápasů. Jaký nejmenší počet sázek je možné zvolit, aby mezi nimi jistě byla sázka, v níž jsou výsledky všech šesti zápasů nesprávné?

4. Je dán trojúhelník ABC, který není rovnoramenný. Středy kružnic mu vepsané a opsané označme po řadě I a O. Vně připsaná kružnice se středem I_a se dotýká strany BC v bodě A_1 a polopřímek AB a AC po řadě v bodech A_2 a A_3. Bod I_a' je souměrný s bodem I_a podle přímky A_2A_3. Dokažte, že přímka OI_a dělí úsečku A_1I_a' na dvě poloviny.

5. Množina přirozených čísel $1, 2, \ldots, 5n$ je disjunktním způsobem rozdělena na dvě podmnožiny. Dokažte, že v těchto podmnožinách existuje aspoň n dvojic (x, y), kde $x > y$, tak, že číslo $x - y$ patří téže podmnožině jako čísla x a y.

6. Střed I kružnice vepsané tečnovému čtyřúhelníku $ABCD$ a středy jeho úhlopříček AC a BD leží na téže přímce. Dokažte.

7. V rovině je dán pravidelný n-úhelník $A_1A_2\ldots A_n$ $(n \geqq 3)$. Určete počet všech navzájem neshodných trojúhelníků, jejichž vrcholy jsou totožné s některými třemi vrcholy daného n-úhelníku.

8. Na kružnici o jsou dány čtyři body, které po řadě označíme A, B, C, D (tj. $ABCD$ je konvexní tětivový čtyřúhelník). Uvnitř kruhu ohraničeného kružnicí o je dán bod S tak, že

$$|\sphericalangle SAD| = |\sphericalangle SCB| \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle SDA| = |\sphericalangle SBC|.$$

Osa úhlu ASB protíná kružnici o v bodech P a Q. Dokažte, že S je střed úsečky PQ.

9. Nechť n je přirozené číslo. Do čtvercové tabulky $2n \times 2n$ je vepsáno $4n^2$ reálných čísel jejichž součet je 0 (na každém poli tabulky je právě jedno číslo). Absolutní hodnota každého z těchto čísel není větší než 1. Dokažte, že existuje řada tabulky (tj. řádek nebo sloupec) taková, že absolutní hodnota součtu jejích prvků není větší než n.

10. Nechť $\mathbb{R}_+$ je množina kladných reálných čísel. Ukažte, že existuje právě jedna funkce $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ taková, že pro všechna $x \in \mathbb{R}_+$ platí

$$f\bigl(f(x)\bigr) = 6x - f(x).$$

11. Najděte alespoň jeden mnohočlen f s reálnými koeficienty takový, že $f(0) = 1$ a pro všechna přirozená čísla n je součet druhých mocnin všech koeficientů mnohočlenu $f^n(x)$ roven součtu druhých mocnin všech koeficientů mnohočlenu $(3x^2 + 7x + 2)^n$.

12. Nechť n je přirozené číslo, $n \geqq 3$. Dokažte, že součet třetích mocnin všech přirozených čísel menších než n a nesoudělných s n je dělitelný číslem n.

13. Nechť D značí střed strany BC v trojúhelníku ABC. Určete velikost vnitřního úhlu při vrcholu C v tomto trojúhelníku, víte-li, že platí

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ACB| \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle DAC| = 15^\circ.$$

14. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla platí nerovnost

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geqq \frac{3}{1+abc}.$$

Zjistěte, kdy platí rovnost.

15. Stranám AC a BC ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou zvnějšku připsány pravoúhelníky $ACPQ$ a $BKLC$, které mají shodné obsahy. Dokažte, že střed úsečky PL, vrchol C a střed kružnice opsané trojúhelníku ABC leží na téže přímce.

16. Funkce f a g z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ splňují pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x + g(y)) = 2x + y + 5.$$

Vyjádřete hodnotu výrazu $g\bigl(x + f(y)\bigr)$ bez neznámých hodnot f a g.

17. Rozhodněte, zda existuje osm přirozených čísel a_k takových, že

$$\sum_{k=1}^{8} \sqrt{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_k - 1}} = 2.$$

18. Na tabuli je v jedné řadě zapsáno 54 znaků „minus". Dva hráči A a B se střídají v tazích (první tah má hráč A). V každém tahu vybere hráč jeden nebo dva sousední znaky „minus" a změní ho, resp. je na „plus". (Znaky „minus" například v trojici $-+-$ nejsou sousední.) Vítězí ten hráč, který změní poslední „minus" na „plus". Navrhněte jednomu z hráčů vítěznou strategii.

19. Na poličce je v jedné řadě všech 100 dílů sebraných spisů Lva Tolstého. V libovolném kroku smíme vybrat dva díly, jeden s lichým číslem a druhý se sudým číslem, a navzájem vyměnit jejich místa v dané řadě. Určete nejmenší počet takových kroků, které stačí k tomu, abychom libovolné původní pořadí dílů změnili na „správné" rostoucí pořadí dílů od čísla 1 po číslo 100 (zleva doprava).