46. mezinárodní matematická olympiáda

Mérida, hlavní město mexického státu Yucatán, který se rozkládá na stejnojmenném poloostrově, hostila ve dnech 8.–19. července 2005 účastníky každoročního klání nejlepších matematických talentů mezi studenty středních škol. Sjeli se tam v rekordním počtu 513 soutěžících z 91 zemí celého světa.

Přípravu a zdárný průběh celé akce zajišťovali organizátoři z řad členů *Mexické matematické společnosti* za podpory mexického ministerstva školství, vlády státu Yucatán, tamních univerzit a desítek sponzorů. Nashromážděné finanční prostředky umožnily ubytovat všechny soutěžící, vedoucí družstev i členy výborů a hodnotících komisí v areálu luxusních hotelů nedaleko centra yucatánské metropole, založené španělskými dobyvateli roku 1542 na místě mayského města *Tihó*. Mexičtí hostitelé připravili výborné podmínky pro vlastní soutěž i zajímavý doprovodný program, jehož vrcholem byl celodenní výlet ke zříceninám mayského města *Chichén Itzá*. Závěr olympiády mírně narušil příchod hurikánu *Emily*, který však nakonec Méridu minul zhruba o 80 km a v samotném městě se projevil jen silnějším větrem.

Vedoucím českého družstva byl RNDr. *Karel Horák*, CSc., z Matematického ústavu Akademie věd v Praze. Soutěžní družstvo, které doprovázel pedagogický vedoucí doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, bylo jmenováno na základě výsledků ústředního kola 54. ročníku MO v Benešově a následného týdenního soustředění v Bílovci. Tvořili je *Jaroslav Hančl* z 3. ročníku Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci, *Pavel Kocourek* ze 4. ročníku SPŠ ST v Panské ulici v Praze, *František Konopecký* z 8. ročníku Gymnázia Holešov, *Jaromír Kuben* a *Jakub Opršal* z 3. ročníku Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně a *Marek Pechal* ze 7. ročníku Gymnázia v Lesní čtvrti ve Zlíně.

Soutěžící jako obvykle řešili ve dvou půldnech vždy tři soutěžní úlohy po dobu 4,5 hodiny; za každou ze šesti úloh mohli získat nejvýše 7 bodů. Po následných opravách a koordinacích vyšlo najevo, že letos žádná soutěžní úloha nebyla extrémně obtížná — 16 soutěžících totiž dosáhlo maxima 42 bodů. Dostali pochopitelně zlaté medaile spolu s dalšími 26 soutěžícími, kteří získali alespoň 35 bodů. Mezi nimi ovšem vynikl moldavský reprezentant *Iurie Boreico*, který získal zvláštní cenu za originální řešení třetí úlohy (viz dále). Kromě 42 zlatých medailí bylo uděleno 79 stříbrných medailí (za zisk 23–34 bodů) a 127 bronzových medailí (za zisk 12–22 bodů). Naši reprezentanti podali nečekaně dobrý výkon a vybojovali pět medailí, přičemž *František Konopecký* získal zlatou. Bez ocenění se tak vrátil domů pouze *Jaroslav Hančl*.

Je to bezesporu nejlepší výkon českého družstva na mezinárodní matematické olympiádě za posledních osm let, neboť předchozí zlatou medaili jsme získali na 38. MMO (tehdy jsme dosáhli i stejného počtu bodů):

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
340.–354.	Jaroslav Hančl	2	0	0	1	2	0	5	
72.–88.	Pavel Kocourek	7	7	0	7	7	0	28	II.
29.–34.	František Konopecký	7	7	7	7	7	1	36	I.
57.–64.	Jaromír Kuben	7	7	0	7	7	2	30	II.
156.–174.	Jakub Opršal	7	7	0	2	2	0	18	III.
122.–130.	Marek Pechal	7	7	0	1	7	0	22	III.
	Celkem	37	35	7	25	32	3	139	

Pro srovnání uveďme i výsledky slovenských reprezentantů, kteří získali jen o pár bodů méně:

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
114.–121.	Jozef Bodnár	7	7	0	7	0	2	23	II.
108.–113.	Ondrej Budáč	7	1	0	7	7	2	24	II.
65.–71.	Michal Burger	1	7	0	7	7	7	29	II.
191.–206.	Peter Černo	6	1	0	7	2	0	16	III.
108.–113.	František Simančík	0	7	1	7	7	2	24	II.
207.–224.	Jakub Závodný	7	1	0	7	0	0	15	III.
	Celkem	28	24	1	42	23	13	131	

Tvrzení o českém úspěchu dokládá naše umístění v níže uvedeném neoficiálním pořadí družstev, ve kterém nám v posledních letech obvykle patřilo místo ve třetí, a někdy i ve čtvrté desítce. V mexické Méridě jsme však obsadili 16. místo před takovými státy, jako jsou Hong-Kong, Kanada, Polsko či Austrálie, ve kterých se výchově matematických talentů věnují — ve srovnání s Českou republikou — s větší intenzitou, danou především objemem institucionálních prostředků, které jsou na tuto péči vyčleňovány. (Případná čísla v závorce upozorňují na nižší počet reprezentantů.)

	I	II	III	body
ČLR	5	1	0	235
USA	4	2	0	213
Rusko	4	2	0	212
Írán	2	4	0	201
Korea	3	3	0	200
Rumunsko	4	1	1	191
Tchaj-wan	3	2	1	190
Japonsko	3	1	2	188
Maďarsko	2	3	1	181
Ukrajina	2	2	2	181
Bulharsko	2	3	1	173
Německo	1	3	2	163
Velká Británie	1	3	2	159
Singapur	0	4	2	145
Vietnam	0	3	3	143
Česká republika	1	2	2	139
Hongkong	1	3	1	138
Bělorusko	1	3	1	136
Kanada	1	2	2	132
Slovensko	0	4	2	131
Moldavsko	1	2	2	130
Turecko	0	4	1	130
Thajsko	0	4	2	128
Itálie	0	2	4	120
Austrálie	0	0	6	117
Izrael	0	2	3	113
Kazachstán	0	2	3	112
Kolumbie	0	2	2	105
Polsko	0	1	5	105
Peru	0	0	6	104
Mexiko	0	0	4	91
Francie	0	0	4	83
Arménie	0	0	5	82
Brazílie	1	0	1	82
Chorvatsko	0	1	2	82
Indie	0	1	1	81
Gruzie	0	0	4	80
Nový Zéland	0	1	2	77
Srbsko a Černá Hora	0	0	3	75
Belgie	0	1	1	74
Rakousko	0	0	2	74
Indonézie	0	0	3	70
Švýcarsko	0	1	1	70
Dánsko	0	0	4	69
Estonsko	0	0	3	68
Argentina	0	1	2	65

	I	II	III	body
Lotyšsko	0	0	2	62
Nizozemsko	0	0	2	62
Ázerbájdžán	0	0	2	59
Řecko	0	0	2	58
Irsko	0	1	0	55
Kuba (4)	0	0	3	54
Litva	0	0	1	53
Makedonie	0	0	2	50
Bosna a Hercegovina	0	0	2	49
Finsko	0	0	2	49
Slovinsko	0	1	0	49
Kirgizie	0	0	2	46
Španělsko	0	0	1	46
Albánie	0	1	0	44
Švédsko	0	0	0	42
Jihoafrická republika	0	0	0	39
Macao	0	0	1	38
Norsko	0	0	0	38
Kostarika	0	0	0	37
Uruguay (5)	0	0	1	37
Srí Lanka	0	0	1	32
Filipíny	0	0	0	30
Portugalsko	0	0	0	27
Salvador	0	0	0	25
Island	0	0	1	23
Maroko	0	0	0	18
Turkmenistán (3)	0	0	1	18
Ekvádor	0	0	1	17
Malajsie	0	0	0	15
Venezuela (2)	0	0	0	15
Kypr	0	0	0	14
Trinidad a Tobago	0	0	0	13
Paraguay	0	0	0	12
Pákistán	0	0	0	11
Tunisko (3)	0	0	0	9
Portoriko	0	0	0	8
Guatemala (3)	0	0	0	6
Lichtenštejnsko (3)	0	0	0	4
Bangladéš	0	0	0	3
Kuvajt (5)	0	0	0	3
Lucembursko (2)	0	0	0	3
Saudská Arábie (5)	0	0	0	3
Tádžikistán (3)	0	0	0	3
Mozambik (5)	0	0	0	2
Bolívie (2)	0	0	0	0

Hostitelskými zeměmi příštích olympiád budou Slovinsko a Vietnam.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Na stranách rovnostranného trojúhelníku ABC je zvoleno šest bodů: body A_1, A_2 na straně BC, body B_1, B_2 na straně CA a body C_1, C_2 na straně AB, přičemž tyto body tvoří vrcholy konvexního šestiúhelníku $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ se stranami téže délky. Dokažte, že přímky A_1B_2, B_1C_2 a C_1A_2 mají společný bod. (*Rumunsko*)

2. Nechť $a_1, a_2, \ldots$ je posloupnost celých čísel s nekonečným počtem kladných členů a s nekonečným počtem záporných členů. Předpokládejme, že pro každé přirozené číslo n čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ po dělení číslem n dávají n různých zbytků. Dokažte, že každé celé číslo se v posloupnosti vyskytuje právě jednou. (*Nizozemsko*)

3. Nechť x, y a z jsou kladná reálná čísla taková, že $xyz \geqq 1$. Dokažte, že

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geqq 0.$$

(*Korea*)

4. Uvažujme posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ definovanou vztahem

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

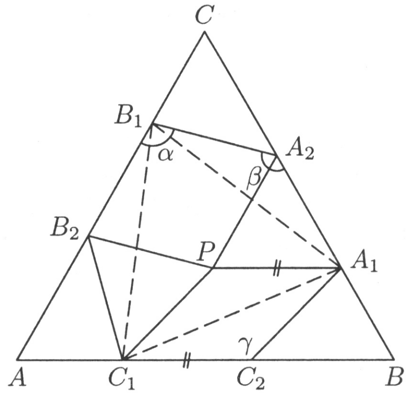
Určete všechna kladná celá čísla, která jsou nesoudělná s každým členem uvažované posloupnosti. (*Polsko*)

5. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se stejně dlouhými a různoběžnými stranami BC a AD. Nechť bod E leží uvnitř strany BC a bod F uvnitř strany AD, přičemž $|BE| = |DF|$. Přímky AC a BD se protínají v bodě P, přímky BD a EF v bodě Q, přímky EF a AC v bodě R. Uvažujme všechny trojúhelníky PQR určené měnícími se body E a F. Ukažte, že kružnice opsané těmto trojúhelníkům mají společný bod různý od P. (*Polsko*)

6. V matematické soutěži dostali soutěžící 6 úloh. Každou dvojici úloh vyřešilo více než $\frac{2}{5}$ soutěžících. Všech 6 úloh nevyřešil nikdo. Dokažte, že právě 5 úloh vyřešili aspoň dva soutěžící. (*Rumunsko*)

Řešení soutěžních úloh

1. Označme P vnitřní bod trojúhelníku ABC takový, že trojúhelník A_1A_2P je rovnostranný (obr. 54). Zřejmě pak je $A_1P \parallel C_1C_2$ a $|A_1P| = |C_1C_2|$, takže $A_1PC_1C_2$ je kosočtverec. Podobně i $A_2PB_2B_1$ je



Obr. 54

kosočtverec. Označme α velikost úhlu $B_2B_1A_2$, β velikost úhlu $B_1A_2A_1$ a γ velikost úhlu $C_1C_2A_1$. Protože velikost úhlu při vrcholu C v trojúhelníku A_2CB_1 je $60°$, je $\alpha + \beta = 240°$, navíc je také $|\sphericalangle B_2PA_2| = \alpha$ a $|\sphericalangle C_1PA_1| = \gamma$. Je tedy

$$\alpha + \gamma = 360° - (|\sphericalangle C_1PB_2| + |\sphericalangle A_1PA_2|) = 240°,$$

takže $\beta = \gamma$. Podobně $|\sphericalangle C_1B_2B_1| = \beta$. Trojúhelníky $A_1A_2B_1$, $B_1B_2C_1$ a $C_1C_2A_1$ jsou tudíž shodné a trojúhelník $A_1B_1C_1$ je rovnostranný. To znamená, že přímky A_1B_2, B_1C_2 a C_1A_2 jsou osy jeho stran B_1C_1, C_1A_1 a A_1B_1. Tím je tvrzení dokázáno.

Jiné řešení. (Podle *Jakuba Závodného*, Slovensko.) Označme vnitřní úhly při základnách rovnoramenných trojúhelníků $C_1B_1B_2$, $A_1C_1C_2$, $B_1A_1A_2$ postupně α, β, γ (obr. 55). Dopočítáním úhlů do $180°$ při vrcholu C_2, v trojúhelníku C_2BA_1 a v rovnoramenném trojúhelníku $A_2C_2A_1$ postupně dostaneme

$$|\sphericalangle BC_2A_1| = 2\beta, \quad |\sphericalangle C_2A_1B| = 120° - 2\beta, \quad |\sphericalangle C_2A_2A_1| = 60° - \beta.$$

Podobně

$$|\sphericalangle CA_2B_1| = 2\gamma, \quad |\sphericalangle A_2B_1C| = 120° - 2\gamma, \quad |\sphericalangle B_1A_2B_2| = 60° - \gamma.$$

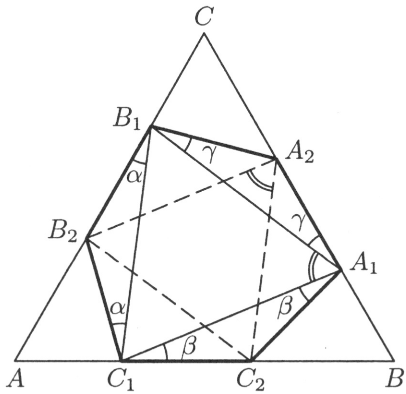
Proto

$$|\sphericalangle B_1A_1C_1| = 180^\circ - (120^\circ - 2\beta) - \beta - \gamma = 60^\circ + \beta - \gamma,$$
$$|\sphericalangle B_2A_2C_2| = 180^\circ - 2\gamma - (60^\circ - \gamma) - (60^\circ - \beta) = 60^\circ + \beta - \gamma,$$

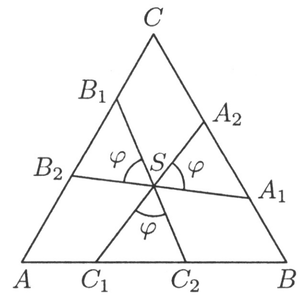
takže $|\sphericalangle B_1A_1C_1| = |\sphericalangle B_2A_2C_2|$. Stejným způsobem odvodíme i rovnosti

$$|\sphericalangle C_1B_1A_1| = |\sphericalangle C_2B_2A_2| \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle A_1C_1B_1| = |\sphericalangle A_2C_2B_2|.$$

Trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ jsou tedy podobné. Uvažujme (jednoznačně určené) podobné zobrazení, které zobrazí první z trojúhelníků na druhý. Uvedenou podobnost lze dostat složením otočení kolem středu S o úhel φ a stejnolehlosti s týmž středem S a koeficientem k (používáme známé tvrzení, že takový rozklad podobnosti existuje).



Obr. 55



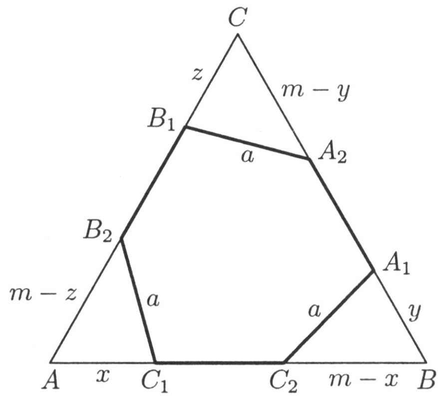
Obr. 56

Trojúhelníky SA_1A_2, SB_1B_2, SC_1C_2 jsou navzájem podobné, protože při vrcholu S mají stejný úhel (obr. 56) a navíc $|SA_2| : |SA_1| = |SB_2| : |SB_1| = |SC_2| : |SC_1| = k$. Podle zadání je však $|A_1A_2| = |B_1B_2| = |C_1C_2|$, takže uvedené trojúhelníky jsou shodné a mají shodné výšky z vrcholu S. Odtud plyne, že bod S má stejnou vzdálenost od všech stran trojúhelníku ABC, takže to musí být střed jeho vepsané kružnice (středy připsaných kružnic snadno vyloučíme). Z odvozené shodnosti plyne rovněž $|SA_1| = |SB_1| = |SC_1|$, a protože trojúhelník ABC je rovnostranný (se středem S), je díky symetrii rovnostranný i trojúhelník $A_1B_1C_1$.

Nyní už dokážeme požadované tvrzení. Čtyřúhelník $C_1A_1B_1B_2$ je deltoid ($|C_1A_1| = |A_1B_1|$ a $|B_1B_2| = |B_2C_1|$), takže jeho úhlopříčka A_1B_2

je zároveň osou úsečky B_1C_1. Podobně je B_1C_2 osou úsečky C_1A_1 a C_1A_2 osou úsečky A_1B_1. Vidíme, že dané tři přímky jsou osami stran trojúhelníku $A_1B_1C_1$, proto se protínají v jednom bodě.

Jiné řešení. (Podle *Ondreje Budáče*, Slovensko.) Označme a délku strany šestiúhelníku $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ a položme $|AB| - a = m$. Dále pišme $|AC_1| = x$, $|BA_1| = y$, $|CB_1| = z$, takže $|BC_2| = m - x$, $|CA_2| = m - y$, $|AB_2| = m - z$ (obr. 57).



Obr. 57

Z kosinové věty pro trojúhelníky AC_1B_2 a BA_1C_2 (je $\cos 60° = \frac{1}{2}$) dostaneme

$$a^2 = x^2 + (m - z)^2 - x(m - z) = y^2 + (m - x)^2 - y(m - x)$$

a po jednoduché úpravě

$$m(-2z + x + y) = (y - z)(y + z + x).$$

Zcela analogicky (z kosinové věty pro trojúhelníky AC_1B_2 a CB_1A_2, nebo využijeme cyklickou záměnu) dostaneme i rovnost

$$(x - y)(x + y + z) = m(-2y + z + x).$$

Po vynásobení obou rovností, zkrácení nenulových činitelů m a $(x+y+z)$, roznásobení a dalších úpravách obdržíme

$$(x - y)(-2z + x + y) = (y - z)(-2y + z + x),$$
$$x^2 - y^2 - 2zx + 2yz = -2y^2 - z^2 + xy + 3yz - zx,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx,$$

přičemž poslední rovnost je ekvivalentní rovnosti

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0.$$

Nutně tedy $x=y=z$, takže trojúhelník $A_1B_1C_1$ je rovnostranný (díky symetrii). Důkaz tvrzení úlohy dokončíme stejně jako v předchozím řešení.

Jiné řešení. Uvažujme šest vektorů

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{B_2C_1},\ \boldsymbol{u}'=\boldsymbol{C_1C_2},\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{C_2A_1},\ \boldsymbol{v}'=\boldsymbol{A_1A_2},\ \boldsymbol{w}=\boldsymbol{A_2B_1},\ \boldsymbol{w}'=\boldsymbol{B_1B_2},$$

jež mají všechny stejnou délku a v součtu dávají nulový vektor. Protože zřejmě i součet vektorů $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{w}'$ je nulový vektor, platí totéž i pro vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, takže $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{w}$.

Ovšem dva vektory stejné délky dávají v součtu vektor téže délky jedině tehdy, když svírají úhel $120°$. To znamená, že přímky B_2C_1, C_2A_1, A_2B_1 určují rovnostranný trojúhelník. Jak snadno nahlédneme, znamená to, že strany tohoto trojúhelníku protínají odpovídající dvě strany daného trojúhelníku pod stejnými úhly, takže „rohové" trojúhelníky AC_1B_2, BA_1C_2 a CB_1A_2 jsou podobné, ba dokonce vzhledem k rovnostem $|B_2C_1|=|C_2A_1|=|A_2B_1|$ shodné. Daný trojúhelník i šestiúhelník jsou tedy invariantní vůči otočení o $120°$ kolem středu O trojúhelníku ABC. Odtud mimo jiné plyne i rovnost úhlů

$$|\sphericalangle B_2C_1C_2|=|\sphericalangle C_2A_1A_2|,\qquad |\sphericalangle A_1A_2B_1|=|\sphericalangle B_1B_2C_1|,$$

tudíž B_1C_2 je osou šestiúhelníku $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ a prochází středem O. Podobně procházejí středem O i další dvě přímky A_1B_2 a C_1A_2.

2. Žádné číslo se v uvažované posloupnosti nemůže vyskytnout dvakrát. Kdyby totiž pro $i<j$ bylo $a_i=a_j$, pro každé $n \geqq j$ by mezi čísly $a_1, a_2, \dots, a_n$ byla čísla a_i, a_j, která dávají při dělení n stejný zbytek. Navíc pro každé přirozené číslo n je rozdíl libovolných dvou čísel mezi čísly $a_1, a_2, \dots, a_n$ nejvýše $n-1$: jinak bychom totiž našli dvě čísla a_i, a_j taková, že $i<j \leqq n \leqq |a_i-a_j|=m$, což znamená, že mezi čísly $a_1, a_2, \dots, a_m$ by byla dvě se stejným zbytkem při dělení číslem m.

Uvažujme množinu $\mathsf{M}=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ pro libovolné přirozené n. Je-li c nejmenší a d největší číslo z M, z předešlého odstavce vyplývá, že $d-c \geqq n-1$ (všechny prvky množiny M jsou různé) a zároveň $d-c \leqq n-1$

(protože $c, d \in \mathsf{M}$). Je tedy nutně $d-c = n-1$ a množinu M tvoří všechna celá čísla mezi c a d.

Nechť x je libovolné celé číslo. Protože uvažovaná posloupnost má nekonečně mnoho kladných i záporných členů a všechny její členy jsou navzájem různé, existuje index i, pro který $a_i < x$, a zároveň index j, pro který $x < a_j$. Pro $n = \max\{i, j\}$ jsou tak mezi čísly $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kromě jiných i všechna celá čísla mezi a_i a a_j, tudíž i číslo x.

3. Odečtením jedničky od každého ze zlomků dané nerovnosti dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2} \leqq 3. \qquad (1)$$

Z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti pro trojice $(x^{5/2}, y, z)$ a $(y^{1/2}z^{1/2}, y, z)$ a podmínky $xyz \geqq 1$ dostaneme

$$\begin{aligned}(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2) &\geqq \left(x^{5/2}(yz)^{1/2}+y^2+z^2\right)^2 \geqq \\ &\geqq (x^2+y^2+z^2)^2,\end{aligned}$$

takže pro zlomky z (1) máme odhad

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} \leqq \frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Analogické nerovnosti platí i pro další dva zlomky, proto

$$\begin{aligned}\frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{zx+z^2+x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{xy+x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2} &\leqq \\ \leqq 2 + \frac{yz+zx+xy}{x^2+y^2+z^2} &\leqq 3,\end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. (Podobně jako v jednom z řešení první úlohy jsme využili známou nerovnost $yz+zx+xy \leqq x^2+y^2+z^2$, která platí pro libovolná reálná čísla.)

Jiné řešení. (Podle *Iurie Boreica*, Moldavsko, na 46. MMO oceněno zvláštní cenou.) Protože

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} - \frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)} = \frac{x^2(x^2+z^2)(x^3-1)^2}{x^3(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)} \geqq 0$$

(a podobná nerovnost platí i pro zlomky, jež dostaneme cyklickou záměnou proměnných), stačí místo dané nerovnosti dokázat silnější nerovnost

$$\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}+\frac{y^5-y^2}{y^3(x^2+y^2+z^2)}+\frac{z^5-z^2}{z^3(x^2+y^2+z^2)} \geqq 0, \qquad (1)$$

která je ekvivalentní s nerovností

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\left(x^2-\frac{1}{x}+y^2-\frac{1}{y}+z^2-\frac{1}{z}\right) \geqq 0.$$

Z podmínky $xyz \geqq 1$ plyne $1/x \leqq yz$, $1/y \leqq zx$, $1/z \leqq xy$, pro výraz v závorce proto platí

$$x^2-\frac{1}{x}+y^2-\frac{1}{y}+z^2-\frac{1}{z} \geqq x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right] \geqq 0.$$

Tím je nerovnost (1) dokázaná.

Jiné řešení. (Podle *Františka Konopeckého.*)

1. Redukce případu $xyz > 1$ na případ $xyz = 1$. Je-li $xyz > 1$, je

$$x = kx_1,\ y = ky_1,\ z = kz_1, \quad \text{kde } k > 1 \text{ a } x_1y_1z_1 = 1.$$

Pro zlomky z dokazované nerovnosti

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geqq 0$$

platí

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} = \frac{k^3x_1^5-x_1^2}{k^3x_1^5+y_1^2+z_1^2} \geqq \frac{x_1^5-x_1^2}{x_1^5+y_1^2+z_1^2},$$

neboť pro kladná čísla A, B, C, D

$$\frac{Ak^3-B}{Ck^3+D}-\frac{A-B}{C+D} = \frac{(k^3-1)(AD+BC)}{(Ck^3+D)(C+D)} > 0.$$

Stačí tedy danou nerovnost dokázat pro čísla x_1, y_1, z_1, jež splňují rovnost $x_1y_1z_1 = 1$.

2. Předpokládejme, že $xyz = 1$, a dokazovanou nerovnost

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geqq 0$$

vynásobme součinem (kladných) jmenovatelů. Pak pro funkci

$$F(x,y,z) = (x^5 - x^2)(x^2 + y^5 + z^2)(x^2 + y^2 + z^5)$$

máme dokázat nerovnost

$$F(x,y,z) + F(y,z,x) + F(z,x,y) \geqq 0.$$

Po pracném roznásobení a úpravě (vyjde 54 členů, po sečtení se „zruší“ 12 členů typu x^7y^2, členy se záporným znaménkem převedeme z levé strany na pravou) dostaneme:

$$\begin{aligned} & x^9 + 2x^7y^5 + 2x^7z^5 + 2x^5y^7 + 3\underline{x^5y^5z^5} + \\ & \quad + x^5y^2z^2 + 2x^5z^7 + x^2y^5z^2 + x^2y^2z^5 + \\ & \quad + y^9 + 2y^7z^5 + 2y^5z^7 + z^9 \geqq \\ & x^6 + x^5y^5z^2 + x^5y^4 + x^5y^2z^5 + x^5z^4 + x^4y^5 + \\ & \quad + x^4y^2 + x^4z^5 + x^4z^2 + x^2y^5z^5 + x^2y^4 + \\ & \quad + 3\underline{x^2y^2z^2} + x^2z^4 + y^6 + y^5z^4 + \\ & \quad + y^4z^5 + y^4z^2 + y^2z^4 + z^6 \end{aligned} \tag{1}$$

Podtržené členy jsou rovny 1. Dále na levé straně máme

$$x^9 + x^5y^2z^2 = x^9 + x^3 \geqq 2\sqrt{x^9 \cdot x^3} = 2x^6$$

a na pravé straně podle $uv + uw + vw \leqq u^2 + v^2 + w^2$

$$\begin{aligned} x^5y^5z^2 + x^5y^2z^5 + x^2y^5z^5 = x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3 \leqq \\ \leqq x^6 + y^6 + z^6. \end{aligned}$$

Proto stačí dokázat nerovnost

$$\begin{aligned} & 2(x^7y^5 + x^5y^7 + \ldots) \geqq \\ & \qquad \geqq (x^5y^4 + x^4y^5 + \ldots) + (x^4y^2 + x^2y^4 + \ldots). \end{aligned}$$

Homogenizujme členy na společný stupeň 12:

$$\begin{aligned} x^5y^4 &= x^5y^4 \cdot xyz = x^6y^5z, \\ x^4y^2 &= x^4y^2 \cdot (xyz)^2 = x^6y^4z^2. \end{aligned}$$

Dostaneme tak homogenní nerovnost

$$2(x^7y^5 + \dots) \geqq (x^6y^5z + \dots) + (x^6y^4z^2 + \dots).$$

Ta už plyne z toho, že pro libovolná $x, y, z > 0$ máme dle tzv. Muirheadovy nerovnosti

$$(x^7y^5 + \dots) \geqq (x^6y^5z + \dots) \geqq (x^6y^4z^2 + \dots).$$

Vysvětlíme ještě, proč platí předchozí nerovnost, pomocí rozkladu rozdílů zastoupených výrazů:

$$x^5(y^7 + z^7 - y^6z - z^6y) + \dots = x^5(y^6 - z^6)(y - z) + \dots \geqq 0,$$

což dokazuje levou nerovnost, pravou nerovnost nejdříve zkrátíme výrazem xyz do tvaru

$$(x^5y^4 + \dots) \geqq (x^5y^3z + \dots)$$

a pak podobně rozložíme:

$$x^5(y^4 + z^4 - y^3z - z^3y) + \dots = x^5(y^3 - z^3)(y - z) + \dots \geqq 0.$$

Poznámka. V souvislosti s právě uvedeným řešením připomeňme dvě užitečné nerovnosti. Pro n-tici $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ kladných reálných čísel a nezáporná čísla $x_1, \dots, x_n$ zaveďme označení

$$T_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \sum y_1^{a_1} \dots y_n^{a_n},$$

kde sčítáme přes všechny permutace $(y_1, \dots, y_n)$ čísel $x_1, \dots, x_n$. O dvou n-ticích $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ a $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ navíc řekneme, že α majorizuje β, jestliže $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$ a zároveň všechny částečné součty splňují nerovnosti $a_1 + \dots + a_j \geqq b_1 + \dots + b_j$ $(1 \leqq j \leqq n - 1)$.

Jestliže α majorizuje β, pak platí

$$T_\alpha(x_1, \dots, x_n) \geqq T_\beta(x_1, \dots, x_n)$$

s rovností, právě když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ (*Muirheadova nerovnost*).

Jestliže λ a μ jsou nezáporná reálná čísla, pak platí

$$T_{\lambda+2\mu,0,0}(x_1, x_2, x_3) + T_{\lambda,\mu,\mu}(x_1, x_2, x_3) \geqq 2T_{\lambda+\mu,\mu,0}(x_1, x_2, x_3)$$

s rovností, právě když $x_1 = x_2 = x_3$ nebo $x_1 = x_2$ a $x_3 = 0$ nebo $x_1 = x_3$ a $x_2 = 0$ nebo $x_2 = x_3$ a $x_1 = 0$ (*Schurova nerovnost*).

Dokazovanou nerovnost (1) v předchozím řešení tak můžeme zapsat (pro jednoduchost vynecháme všude trojice proměnných (x, y, z)) jako

$$T_{9,0,0} + 2T_{7,5,0} + T_{5,2,2} \geqq T_{6,0,0} + T_{5,5,2} + T_{5,4,0} + T_{4,2,0}$$

a její platnost teď plyne z následujících (zřejmých) nerovností (využíváme rovnost $xyz = 1$):

$$\begin{aligned} T_{9,0,0} + T_{5,2,2} &\geqq 2T_{7,2,0} \quad \text{(Schur)},\\ T_{7,2,0} &\geqq T_{7,1,1} = T_{6,0,0},\\ T_{7,2,0} &\geqq T_{5,3,1} = T_{4,2,0},\\ T_{7,5,0} &\geqq T_{5,5,2},\\ T_{7,5,0} &\geqq T_{6,5,1} = T_{5,4,0}. \end{aligned}$$

4. Ukážeme, že každé prvočíslo p má v dané posloupnosti svůj násobek. Protože $a_2 = 48$ je násobkem dvou i tří, stačí uvažovat $p > 3$. V takovém případě dostáváme z malé věty Fermatovy (modulo p)

$$2^{p-1} \equiv 1, \quad 3^{p-1} \equiv 1, \quad \text{a tedy} \quad 6^{p-1} \equiv 1.$$

Odtud

$$\begin{aligned} 6a_{p-2} &= 6 \cdot 2^{p-2} + 6 \cdot 3^{p-2} + 6 \cdot 6^{p-2} - 6 =\\ &= 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 = 0. \end{aligned}$$

Číslo $6a_{p-2}$ je tedy dělitelné p, a protože $p > 3$, je i číslo a_{p-2} násobkem prvočísla p.

Jediné kladné číslo, které je nesoudělné se všemi členy dané posloupnosti, je tedy 1.

Jiné řešení. Protože $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1^n$, má daná posloupnost charakteristický mnohočlen q s kořeny 2, 3, 6 a 1, tj.

$$q(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda - 1) = \lambda^4 - 12\lambda^3 + 47\lambda^2 - 72\lambda + 36.$$

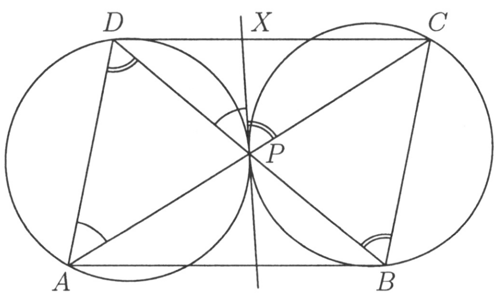
To znamená, že daná posloupnost splňuje následující rekurentní vztah

$$a_{n+4} = 12a_{n+3} - 47a_{n+2} + 72a_{n+1} - 36a_n \tag{1}$$

pro libovolné přirozené n. Daná posloupnost je tudíž pro libovolné prvočíslo p od jistého členu počínaje periodická modulo p. Je-li p prvočíslo nesoudělné s koeficientem 36 ($p \notin \{2, 3\}$) u členu a_n, můžeme rekurenci „obrátit“ a počítat členy posloupnosti „zpět“. Posloupnost čísel modulo takové prvočíslo p je tedy periodická celá. Snadno ovšem nahlédneme, že rekurentnímu vztahu (1) vyhovují i celočíselné členy $a_0 = 2$ a $a_{-1} = 0$, takže mezi členy dané posloupnosti musí existovat čísla dělitelná prvočíslem p.

Protože $a_2 = 48$, je 1 jediné kladné číslo, které je nesoudělné se všemi členy dané posloupnosti.

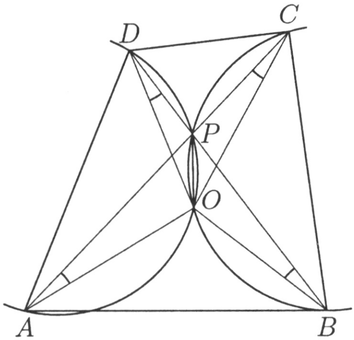
5. (Podle *Františka Simančíka*, Slovensko.) Uvažujme kružnice opsané trojúhelníkům BCP a ADP. Předpokládejme, že se v bodě P dotýkají a že jejich společná tečna v tomto bodě protíná stranu CD v bodě X (obr. 58). Z rovnosti obvodových a úsekových úhlů příslušných tětivám



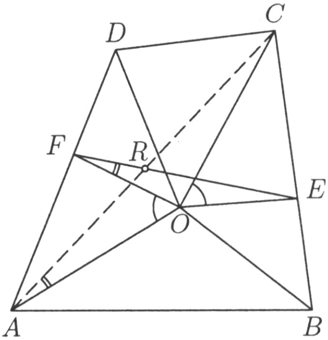
Obr. 58

DP a CP plynou rovnosti $|\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle DPX|$ a $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle CPX|$. Protože vedlejší úhel CPD trojúhelníku APD je roven součtu jeho úhlů při vrcholech A a D, vidíme, že $|\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle CPX| = |\sphericalangle CBP|$. To znamená, že strany BC a AD jsou rovnoběžné, což odporuje zadání úlohy. Uvažované kružnice se proto nedotýkají, a mají tak kromě bodu P ještě další průsečík, který označíme O.

Protože $|BC| = |AD|$ a $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle APD|$, mají obě kružnice stejné poloměry a obvodové úhly příslušné společné tětivě PO mají stejnou velikost (obr. 59). Odtud vyplývá, že trojúhelníky CAO a BDO jsou rovnoramenné, takže $|OA| = |OC|$, $|OB| = |OD|$. Trojúhelníky OAD a OCB jsou proto shodné podle věty *sss*, a protože $|EC| = |AF|$, jsou shodné i trojúhelníky OAF a OCE. Odtud $|\sphericalangle AOF| = |\sphericalangle COE|$, takže $|\sphericalangle FOE| = |\sphericalangle AOC|$ a rovnoramenné trojúhelníky FOE a AOC jsou



Obr. 59



Obr. 60

podobné. Proto $|\sphericalangle OFE| = |\sphericalangle OAC| = |\sphericalangle OAR|$ a čtyřúhelník $AORF$ je tětivový (obr. 60).

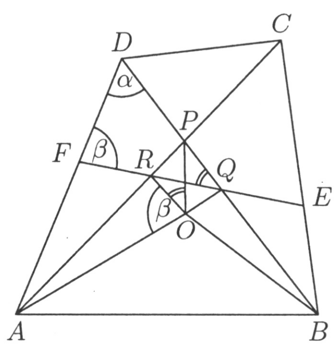
Označme $|\sphericalangle ADB| = \alpha$, $|\sphericalangle DFE| = \beta$. V tětivovém čtyřúhelníku $AORF$ máme $|\sphericalangle AOR| = 180^\circ - |\sphericalangle AFR| = \beta$. V tětivovém čtyřúhelníku $AOPD$ zase $|\sphericalangle AOP| = 180^\circ - \alpha$, tj.

$$|\sphericalangle ROP| = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Zároveň však z trojúhelníku FQD máme

$$|\sphericalangle RQP| = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Odtud $|\sphericalangle ROP| = |\sphericalangle RQP|$ a čtyřúhelník $PROQ$ je tětivový (obr. 61). Bod O proto leží na kružnici opsané trojúhelníku PQR. Protože poloha bodu O na volbě bodů E, F nezávisí, je úloha vyřešena.



Obr. 61

6. Označme n počet soutěžících a N počet všech vyřešených dvojic úloh (pokud soutěžící vyřešil r úloh, započítáme do N číslo $\binom{r}{2}$). Každou z 15 dvojic vyřešilo více než $\frac{2}{5}$ soutěžících, tj. aspoň $\frac{1}{5}(2n+1)$ soutěžících, proto

$$N \geqq 15 \cdot \frac{2n+1}{5} = 6n+3. \tag{1}$$

Předpokládejme, že právě 5 úloh vyřešilo k účastníků. Každý z nich vyřešil 10 dvojic úloh, zatímco každý z ostatních $n-k$ účastníků vyřešil nejvýše 6 dvojic úloh, takže

$$N \leqq 10k + 6(n-k) = 6n + 4k.$$

Z uvedených dvou odhadů je zřejmé, že $k \geqq 1$. Kdyby navíc nebylo $\frac{1}{5}(2n+1)$ celé číslo, vyřešilo by každou dvojici úloh aspoň $\frac{1}{5}(2n+2)$ účastníků a první odhad by měl tvar $N \geqq 6n+6$, což dává nerovnost $k \geqq 2$, takže bychom byli hotovi. Podobně pokud by některý z účastníků vyřešil méně než 4 úlohy, tj. vyřešil by nejvýše 3 dvojice úloh, měl by druhý odhad tvar $N \leqq 6n+4k-3$, a to spolu s (1) opět dává nerovnost $k \geqq 2$.

Zbývá tedy vyloučit případ, kdy je $2n+1$ dělitelné pěti, jeden účastník (nazvěme ho *vítěz*) vyřešil 5 úloh a každý jiný vyřešil právě 4 úlohy. Předpokládejme, že taková situace nastala. Je tedy $N = 10 + 6(n-1) = 6n+4$ (vítěz vyřešil 10 dvojic a zbylí účastníci po 6 dvojicích úloh). Vzhledem k předpokládané hodnotě N a odhadu (1) existuje právě jedna dvojice úloh (nazvěme ji *speciální*), kterou vyřešilo právě $\frac{1}{5}(2n+1)+1$ účastníků, zatímco každou ze zbylých 14 dvojic vyřešilo právě $\frac{1}{5}(2n+1)$ účastníků.

Nazvěme úlohu, kterou *vítěz* nevyřešil, *těžkou*. Označme M počet vyřešených dvojic úloh, z nichž jedna je *těžká*. Pro každou z pěti dvojic obsahujících *těžkou* úlohu máme buď $\frac{1}{5}(2n+1)$, nebo $\frac{1}{5}(2n+1)+1$ účastníků, kteří obě úlohy z dvojice vyřešili. Takže $M = 2n+1$ nebo $M = 2n+2$ (druhá možnost nastane, pokud *speciální* dvojice obsahuje *těžkou* úlohu). Na druhé straně, pokud *těžkou* úlohu vyřešilo m účastníků, je $M = 3m$, protože každý z nich vyřešil kromě *těžké* úlohy právě 3 další. Dohromady tak dostáváme, že $2n+1$ nebo $2n+2$ je dělitelné třemi, neboli že (modulo 3) $2n+1 \equiv 0$ nebo $2n+1 \equiv 2$.

Zvolme nyní libovolnou úlohu u, která není *těžká* a není ani ve *speciální* dvojici (takové úlohy jsou aspoň tři). Označme L počet vyřešených dvojic úloh, z nichž jedna je u. Zřejmě $L = 2n+1$ (každou z pěti dvojic úloh obsahujících u vyřešilo právě $\frac{1}{5}(2n+1)$ účastníků). Na druhé straně pokud úlohu u kromě *vítěze* vyřešilo ještě l dalších účastníků, je $L = 3l + 4$ (vítěz kromě u vyřešil 4 další úlohy, tj. vyřešil 4 dvojice obsahující u, ostatních l vyřešilo 3 dvojice obsahující u). Dostáváme tak $2n + 1 \equiv 1 \pmod 3$, což odporuje předchozím dvěma možnostem. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.