55. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie C

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor); Jaroslav Zhouf (editor): 55. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2005/2006. 47. mezinárodní matematická olympiáda. 18. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2007. pp. 31–42.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405108

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

a) Dokažte, že pro každé přirozené číslo m je rozdíl $m^6 - m^2$ dělitelný číslem 60.
b) Určete všechna přirozená čísla m, pro která je rozdíl $m^6 - m^2$ dělitelný číslem 120. *(J. Moravčík)*

C – I – 2

Kružnice k, l, m se po dvou vně dotýkají a všechny tři mají společnou tečnu. Poloměry kružnic k, l jsou 3 cm a 12 cm. Vypočtěte poloměr kružnice m. Najděte všechna řešení. *(L. Boček)*

C – I – 3

Určete počet všech trojic navzájem různých trojmístných přirozených čísel, jejichž součet je dělitelný každým ze tří sčítaných čísel.

(J. Šimša)

C – I – 4

Je dáno přirozené číslo n ($n \geqq 2$) a reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pro která platí

$$x_1x_2 = x_2x_3 = \ldots = x_{n-1}x_n = x_nx_1 = 1.$$

Dokažte, že

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqq n.$$

(J. Švrček)

C – I – 5

V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu C a P, Q odpovídající paty kolmic vedených bodem D na strany AC a BC. Obsahy trojúhelníků ADP, DCP, DBQ, CDQ označme postupně S_1, S_2, S_3, S_4. Vypočtěte $S_1 : S_3$, jestliže $S_1 : S_2 = 2 : 3$, $S_3 : S_4 = 3 : 8$. *(P. Novotný)*

C – I – 6

Rozhodněte, které z čísel

$$\sqrt{p+\sqrt{q}}+\sqrt{q+\sqrt{p}}, \qquad \sqrt{p+\sqrt{p}}+\sqrt{q+\sqrt{q}}$$

je větší, jsou-li p a q různá kladná čísla. *(J. Moravčík)*

C – S – 1

Hokejového turnaje se zúčastnila čtyři družstva, přičemž každé sehrálo s každým právě jedno utkání. Počet branek vstřelených v každém utkání dělí celkový počet branek vstřelených v turnaji, přitom v žádných dvou utkáních jich nepadl stejný počet. Kolik nejméně mohlo v turnaji padnout branek? *(M. Panák)*

C – S – 2

Vrchol C čtverců $ABCD$ a $CJKL$ je vnitřním bodem úsečky AK i úsečky DJ, body E, F, G a H jsou po řadě středy úseček BC, BK, DK a DC. Určete obsah čtyřúhelníku $EFGH$ pomocí obsahů S a T čtverců $ABCD$ a $CJKL$. *(P. Leischner)*

C – S – 3

Kružnice k, l, m se dotýkají společné tečny ve třech různých bodech a jejich středy leží v přímce. Kružnice k a l stejně jako kružnice l a m mají vnější dotyk. Určete poloměr kružnice l, jestliže poloměry kružnic k a m jsou 3 cm a 12 cm. *(L. Boček)*

C – II – 1

Základna AB lichoběžníku $ABCD$ je třikrát delší než základna CD. Označme M střed strany AB a P průsečík úsečky DM s úhlopříčkou AC. Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníku CDP a čtyřúhelníku $MBCP$.

(Pavel Novotný)

C – II – 2

Splňují-li reálná čísla a, b, c, d rovnosti

$$a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = c^2 + d^2 = 1,$$

platí nerovnost

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd \leqq 3.$$

Dokažte a zjistěte, kdy přitom nastane rovnost. *(J. Švrček)*

C – II – 3

Kružnice k, l s vnějším dotykem leží obě v obdélníku $ABCD$, jehož obsah je $72\,\mathrm{cm}^2$. Kružnice k se přitom dotýká stran CD, DA a AB, zatímco kružnice l se dotýká stran AB a BC. Určete poloměry kružnic k a l, jestliže poloměr kružnice k je v centimetrech vyjádřen celým číslem.

(J. Švrček)

C – II – 4

Najděte všechny dvojice prvočísel p a q, pro které platí

$$p + q^2 = q + 145p^2.$$

(J. Moravčík)

C – I – 1

a) Číslo $n = m^6 - m^2 = m^2(m^2-1)(m^2+1)$ je vždy dělitelné čtyřmi, protože při sudém m je m^2 dělitelné čtyřmi a při lichém m jsou čísla m^2-1, m^2+1 obě sudá, jedno z nich je dokonce dělitelné čtyřmi a jejich součin je tedy dělitelný osmi. Ze tří po sobě jdoucích přirozených čísel m^2-1, m^2, m^2+1 je právě jedno dělitelné třemi, a proto je i číslo n dělitelné třemi. Je-li m dělitelné pěti, je m^2 dělitelné pěti, dokonce dvaceti pěti. V opačném případě je m tvaru $5k+r$, kde r je rovno některému z čísel 1, 2, 3, 4 a k je přirozené nebo 0. Pak je $m^2 = 25k^2+10kr+r^2$ a r^2 se rovná některému z čísel 1, 4, 9, 16. V prvním a v posledním případě je číslo m^2-1 dělitelné pěti, v ostatních dvou případech je číslo m^2+1 dělitelné pěti. Je tedy číslo n vždy dělitelné nesoudělnými čísly 4, 3 a 5, a tedy i jejich součinem 60.

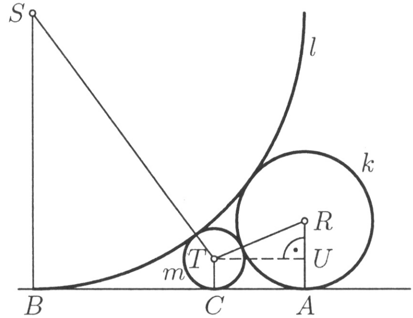
b) Už jsme ukázali, že v případě lichého m je součin $(m^2-1)(m^2+1)$ dělitelný osmi, a číslo $n = m^6 - m^2$ je tedy dělitelné číslem $120 = 8 \cdot 3 \cdot 5$. Je-li však číslo m sudé, jsou čísla m^2-1, m^2+1 lichá, žádné není dělitelné dvěma. Číslo n je pak dělitelné osmi pouze v případě, že m^2 je dělitelné osmi, tedy m je dělitelné čtyřmi. Číslo n je pak dělitelné šestnácti, třemi a pěti, a proto dokonce číslem 240.

Naše výsledky můžeme shrnout: Číslo $n = m^6 - m^2$ je dělitelné číslem 120, právě když m je liché nebo dělitelné čtyřmi.

C – I – 2

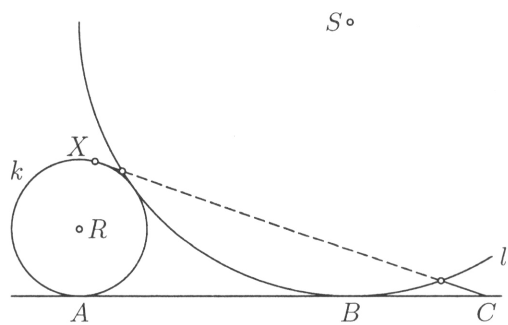
Označme po řadě R, S, T středy a A, B, C body dotyku kružnic k, l, m na společné tečně a $r = 3$, $s = 12$ a t jejich poloměry (délky a obsahy budeme počítat bez jednotek kvůli jednoduššímu dosazování). V lichoběžníku (který v případě rovnosti $r = t$ je ovšem obdélníkem) $ARTC$ (obr. 6) je $|RT| = r + t$. Označíme-li U průsečík přímky AR a přímky vedené bodem T rovnoběžně s AC, je $|RU| = |r - t|$. Z pravoúhlého trojúhelníku RUT plyne $|UT| = |AC| = \sqrt{(r+t)^2 - (r-t)^2} = 2\sqrt{rt} = 2\sqrt{3t}$. Analogicky bychom z lichoběžníků $CTSB$ a $ARSB$ dostali vztahy $|BC| = 2\sqrt{st} = 4\sqrt{3t}$ a $|AB| = 2\sqrt{rs} = 2\sqrt{3 \cdot 12} = 12$.

Uvažujme nejdříve případ, kdy bod C leží mezi body A a B. Je pak $2\sqrt{3t} + 4\sqrt{3t} = 12$, odkud $t = \frac{4}{3}$. Jestliže bod A leží mezi body C a B, dostaneme obdobně rovnici $2\sqrt{3t} + 12 = 4\sqrt{3t}$, odkud $t = 12$.



Obr. 6

Rovnice $12 + 4\sqrt{3t} = 2\sqrt{3t}$, kterou dostaneme pro polohu bodu B mezi body A a C, nemá zjevně žádné řešení. Že takový případ není možný, je vidět i z obr. 7, protože každá kružnice, která se dotýká kružnice k v bodě X různém od A a přitom obsahuje bod C polopřímky opačné k polopřímce BA, musí ve svém vnitřku obsahovat i tětivu kružnice l (vyznačenou na obrázku), takže se jí nemůže dotýkat.



Obr. 7

Poloměr kružnice m je tedy $\frac{4}{3}$ cm nebo 12 cm.

C – I – 3

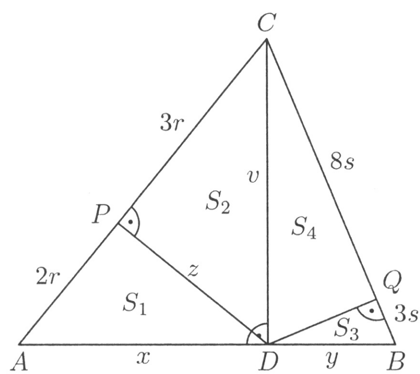
Nechť x, y, z je taková trojice navzájem různých přirozených čísel, pro kterou platí: Každé z nich dělí jejich součet $x+y+z$, takže x dělí $y+z$, y dělí $x+z$ a z dělí $x+y$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $x < y < z$. Je tedy $x+y = kz$ pro vhodné přirozené k. Protože je zároveň $x+y < 2z$, je nutně $k = 1$, $x+y = z$. Dále y dělí $x+z = 2x+y < 3y$, takže $2x+y=2y$, $y=2x$. Tři přirozená čísla daných vlastností mají tedy tvar x, $y=2x$, $z=3x$, kde x je přirozené. Protože mají být trojmístná, musí být $x \geqq 100$, $3x \leqq 999$, takže $100 \leqq x \leqq 333$. Hledaný počet trojic je $333-99=234$.

C – I – 4

Čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou podle podmínek úlohy nenulová a všechna s lichými indexy jsou si rovna, rovnají se nenulovému číslu a; všechna čísla se sudými indexy jsou si také rovna, rovnají se $1/a$, převrácené hodnotě a. Je-li n liché, plyne z rovnice $x_1x_2 = x_nx_1$ rovnost $x_n = x_2$, takže všechna x_i jsou stejná, rovnají se 1 nebo -1, neboť to jsou jediné hodnoty a, pro něž $a = 1/a$, takže součet jejich druhých mocnin je n. Je-li n sudé, rovná se součet druhých mocnin všech hodnot x_i součtu $n/2$ hodnot a^2 a $n/2$ hodnot $1/a^2$. Avšak $a^2 + 1/a^2 \geqq 2$ pro každé nenulové číslo a, což plyne z nerovnosti $(a^2-1)^2 \geqq 0$. Proto je součet druhých mocnin všech čísel x_i větší nebo roven n.

C – I – 5

Označme $x = |AD|$, $y = |BD|$, $v = |CD|$ (obr. 8). Z podobnosti trojúhelníků ADP a DCP plyne $x^2 : v^2 = S_1 : S_2 = 2 : 3$. Podobně z podobnosti trojúhelníků DBQ, CDQ plyne $y^2 : v^2 = S_3 : S_4 = 3 : 8$. Odtud $x^2 : y^2 = (2\cdot 8) : (3 \cdot 3) = 16 : 9$, $x : y = 4 : 3$. Trojúhelníky ADC, DBC mají společnou výšku, proto $(S_1 + S_2) : (S_3 + S_4) = x : y = 4 : 3$. Za S_2 sem dosadíme $\frac{3}{2}S_1$, za S_4 dosadíme $\frac{8}{3}S_3$ a po úpravě dostaneme $S_1 : S_3 = 88 : 45$.



Obr. 8

Jiné řešení. Z poměru obsahů trojúhelníku ADP a trojúhelníku CDP se společnou výškou DP plyne, že je $|AP| : |CP| = 2 : 3$, takže můžeme psát $|AP| = 2r$, $|CP| = 3r$, podobně $|BQ| = 3s$, $|CQ| = 8s$. Označme $x = |AD|$, $y = |BD|$, $v = |CD|$ a $z = |PD|$ (obr. 8). Z pravoúhlých trojúhelníků ADP, ADC, PDC plyne $x^2 = 4r^2 + z^2$, $z^2 + 9r^2 = v^2 = 25r^2 - x^2$. Odtud $z^2 = 16r^2 - x^2 = 16r^2 - (4r^2 + z^2)$, neboli $2z^2 = 12r^2$, $z = r\sqrt{6}$, $x = r\sqrt{10}$, $v = r\sqrt{15}$, $S_1 = r^2\sqrt{6}$. Analogicky bychom dostali z trojúhelníků BDQ, BDC, QDC, že $v = 2s\sqrt{22}$, $y = s\sqrt{33}$, $S_3 = 3s^2\sqrt{6}$, tedy užitím vztahu $v^2 = 15r^2 = 88s^2$ dostaneme výsledek $S_1 : S_3 = 88 : 45$.

C – I – 6

Daná čísla, která označíme po řadě A a B, nebudeme porovnávat přímo. Místo toho porovnáme jejich druhé mocniny a využijeme poznatku, že pro libovolná kladná čísla u, v platí $u > v$, právě když platí $u^2 > v^2$. Pro daná čísla máme

$$A^2 = p + \sqrt{q} + 2\sqrt{(p+\sqrt{q})\,(q+\sqrt{p})} + q + \sqrt{p},$$
$$B^2 = p + \sqrt{p} + 2\sqrt{(p+\sqrt{p})\,(q+\sqrt{q})} + q + \sqrt{q}$$

a vidíme, že mimo „dlouhých“ odmocnin jsou na pravých stranách obou vyjádření čtyři stejní sčítanci (v odlišných pořadích). Proto nerovnost $A^2 > B^2$ platí, právě když je „dlouhá odmocnina“ v prvním řádku větší než ve druhém řádku, neboli když pro odmocňované součiny platí nerovnost

$$(p+\sqrt{q})\,(q+\sqrt{p}) > (p+\sqrt{p})\,(q+\sqrt{q})\,.$$

Roznásobením a dalšími algebraickými úpravami dostaneme postupně ekvivalentní nerovnosti

$$pq + \sqrt{pq} + p\sqrt{p} + q\sqrt{q} > pq + \sqrt{pq} + p\sqrt{q} + q\sqrt{p},$$
$$(p-q)\sqrt{p} - (p-q)\sqrt{q} > 0,$$
$$(p-q)(\sqrt{p} - \sqrt{q}) > 0.$$

Vysvětlíme, proč poslední nerovnost (a tedy i výchozí nerovnost $A > B$) v případě $p \neq q$ vždy platí. Je-li totiž $p > q$, je i $\sqrt{p} > \sqrt{q}$, takže oba činitelé součinu $(p-q)(\sqrt{p}-\sqrt{q})$ jsou kladní; je-li $p < q$, jsou oba činitelé naopak záporní, v obou případech je proto daný součin kladný.

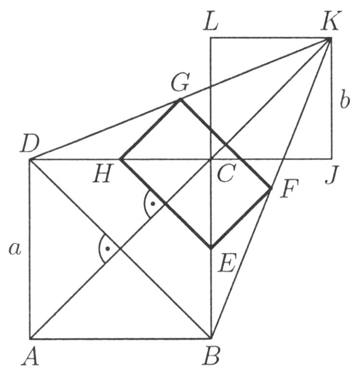
Odpověď: Větší je první z daných dvou čísel.

C – S – 1

Jestliže každé družstvo sehraje s každým jedno utkání, sehraje každé družstvo v turnaji celkem tři utkání a počet všech utkání bude $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$. Máme tedy najít šest různých přirozených čísel (nula nedělí žádné číslo) s nejmenším možným součtem tak, aby byl tento součet dělitelný každým z šesti sčítanců. Nejmenší součet šesti různých přirozených čísel je $1+2+3+4+5+6 = 21$, ten však není dělitelný např. dvěma nebo šesti. Další možností je nahradit číslo 6 číslem 7, součet bude 22. Ten však není dělitelný např. třemi. Součet 23 nemůže vyhovovat, protože číslo 23 je prvočíslo, je dělitelné pouze dvěma přirozenými čísly. Konečně číslo 24 je součtem čísel 1, 2, 3, 4, 6 a 8, přitom je číslo 24 dělitelné každým z čísel 1, 2, 3, 4, 6, 8. V turnaji proto mohlo padnout 24 branek, ne však méně.

C – S – 2

Označme $a = \sqrt{S}$, $b = \sqrt{T}$ strany čtverců $ABCD$, $CJKL$. Úsečka EH je střední příčkou trojúhelníku BCD (obr. 9), úsečka FG je střední příčkou



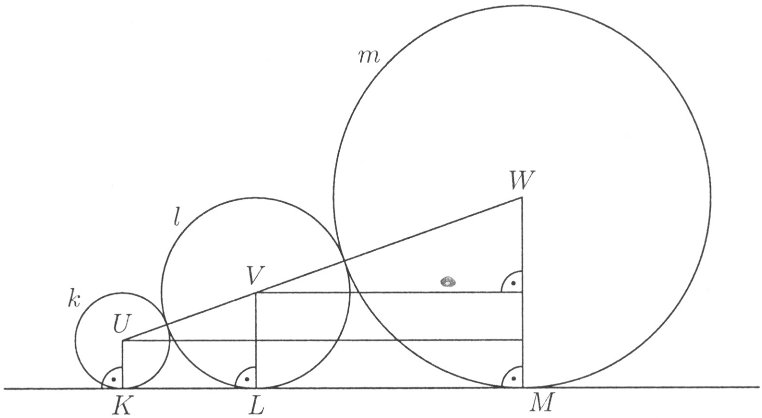
Obr. 9

v trojúhelníku BKD, proto je $2|EH| = 2|FG| = |BD|$ a úsečky EH, FG jsou rovnoběžné s BD. Podobně je úsečka HG střední příčkou v trojúhelníku DCK a úsečka EF je střední příčkou v trojúhelníku BCK. Proto je $2|HG| = 2|EF| = |CK|$ a úsečky HG, EF jsou rovnoběžné s CK, a tedy kolmé na JL a BD. Rovnoběžník $EFGH$ je tudíž obdélník s obsahem

$$|EF| \cdot |FG| = a\,\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot b\,\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\sqrt{ST}.$$

C – S – 3

Vzájemná poloha kružnic a jejich společné tečny musejí vypadat jako na obr. 10, kde jsme písmeny K, L, M označili body dotyku kružnic k,



Obr. 10

l, m na společné tečně, U, V, W jejich středy a r poloměr kružnice l (v centimetrech). Z pravoúhlých lichoběžníků $KLVU$, $LMWV$, $KMWU$ plyne podle Pythagorovy věty

$$|KL|^2 = (r+3)^2 - (r-3)^2 = 12r,$$
$$|LM|^2 = (12+r)^2 - (12-r)^2 = 48r$$

a

$$|KM|^2 = (3+2r+12)^2 - (12-3)^2 = 4r^2 + 60r + 144.$$

Jelikož $|KL| + |LM| = |KM|$, dostaneme z prvních dvou vztahů

$$|KM|^2 = (|KL| + |LM|)^2 = |KL|^2 + 2|KL||LM| + |LM|^2 =$$
$$= 60r + 2\sqrt{12 \cdot 48}\, r,$$

což spolu s třetím vztahem dává po úpravě pro r rovnici

$$4r^2 - 48r + 144 = 0.$$

Protože $4r^2 - 48r + 144 = 4(r^2 - 12r + 36) = 4(r-6)^2$, má tato rovnice jediné řešení $r = 6$ a poloměr kružnice l je tedy 6 cm.

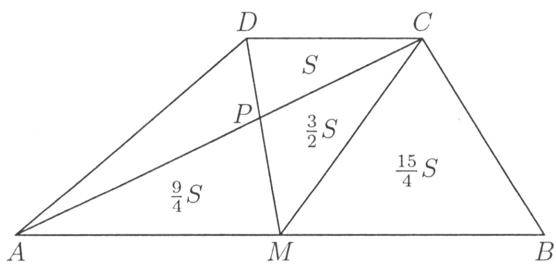
C – II – 1

Výpočet založíme na dvou známých pravidlech:

(1) Jsou-li dva trojúhelníky podobné s koeficientem podobnosti k, je poměr jejich obsahů roven k^2.

(2) Leží-li nějaké tři body X, Y, Z v jedné přímce a bod V mimo ni, je poměr obsahů trojúhelníků XYV a YZV roven poměru $|XY| : |YZ|$.

Ze shodnosti střídavých úhlů mezi rovnoběžkami AB a CD plyne, že trojúhelníky AMP a CDP jsou podle věty *uu* podobné, a to s koeficientem $|AM| : |CD| = \frac{3}{2}$. Označíme-li S obsah trojúhelníku CDP, je obsah trojúhelníku AMP roven $\left(\frac{3}{2}\right)^2 S = \frac{9}{4}S$ a z rovností $|AP| : |CP| = |MP| : |DP| = \frac{3}{2}$ plyne, že obsah každého z trojúhelníků APD a MPC je roven $\frac{3}{2}$ obsahu trojúhelníku CDP, tedy $\frac{3}{2}S$. Obsahy trojúhelníků AMC a BMC jsou stejné, a rovnají se tedy $\frac{9}{4}S + \frac{3}{2}S = \frac{15}{4}S$ (obr. 11). Odtud plyne, že obsah čtyřúhelníku $MBCP$ je $\frac{3}{2}S + \frac{15}{4}S = \frac{21}{4}S$, hledaný poměr je proto 4 : 21.



Obr. 11

C – II – 2

Z předpokladů plyne $c^2 = a^2$, $d^2 = b^2$, tedy $|c| = |a|$, $|d| = |b|$.

Je-li $c = a$ a současně $d = b$, dostaneme postupně pro levou stranu L dokazované nerovnosti

$$\begin{aligned} L &= ab + ac + ad + bc + bd + cd = \\ &= ab + a^2 + ab + ab + b^2 + ab = 1 + 4ab \leqq \\ &\leqq 1 + 2(a^2 + b^2) = 3, \end{aligned}$$

neboť pro libovolná dvě čísla a, b je $2ab \leqq a^2 + b^2$, což plyne ze zřejmé nerovnosti $(a - b)^2 \geqq 0$. Rovnost pak nastane pouze pro dvě čtveřice

$a = b = c = d = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, neboť z podmínky $a = b$ a rovnosti $a^2 + b^2 = 1$ plyne $a^2 = \frac{1}{2}$, tj. $a = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Je-li $c = -a$, $d = b$, je $L = -a^2 + b^2 \leqq a^2 + b^2 = 1 < 3$. Podobně v případě $c = a$, $d = -b$ vyjde $L = a^2 - b^2 \leqq 1$, v případě $c = -a$, $d = -b$ dokonce $L = -a^2 - b^2 \leqq 0$.

Jiné řešení. Hodnota součtu

$$S = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2$$

je zřejmě nezáporná. Pro dvojnásobek levé strany L dokazované nerovnosti proto platí

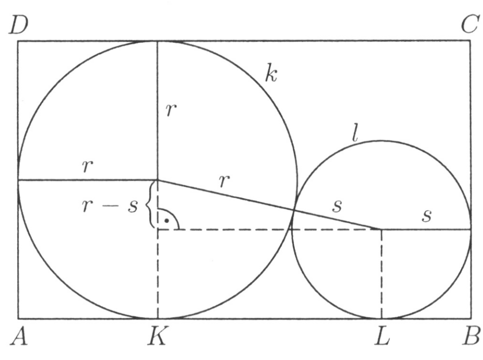
$$2L = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - S \leqq 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 6,$$

odkud $L \leqq 3$. Rovnost $L = 3$ pak nastane, právě když $S = 0$, tedy právě když čísla a, b, c, d mají tutéž hodnotu, která se ovšem musí rovnat $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (viz původní řešení).

C – II – 3

Označme r, s poloměry kružnic k, l (v centimetrech) a K, L jejich body dotyku se stranou AB (obr. 12). Je pak $|AK| = r$, $|LB| = s$, a jak snadno spočteme z Pythagorovy věty (viz též úlohu C–S–3)

$$|KL| = \sqrt{(r+s)^2 - (r-s)^2} = 2\sqrt{rs}.$$



Obr. 12

Pro délky stran obdélníku $ABCD$ platí $|AD| = 2r$, $|AB| = r+2\sqrt{rs}+$ $+ s = (\sqrt{r} + \sqrt{s})^2$. Podle předpokladu má být

$$2r\left(\sqrt{r} + \sqrt{s}\right)^2 = 72,$$

neboli po zkrácení dvěma a odmocnění

$$r + \sqrt{rs} = 6.$$

Odtud plyne, že $r < 6$, a pro velikost poloměru s dostáváme vyjádření

$$rs = (6 - r)^2,$$
$$s = \frac{(6 - r)^2}{r}. \tag{1}$$

Z podmínek úlohy dále plyne, že s nemůže být větší než r, protože jinak by kružnice l neležela v daném obdélníku, a protože i kružnice k musí ležet v daném obdélníku, musí být $|AB| \geqq |AD| = 2r$. Z nerovnosti $s \leqq r$ podle (1) dostaneme podmínku $36 - 12r + r^2 \leqq r^2$, tj. $r \geqq 3$. Z nerovnosti $|AB| \geqq 2r$ pak plyne $72 = |AB| \cdot |AD| \geqq 4r^2$, neboli $r^2 \leqq 18$, což pro celočíselné r znamená, že $r \leqq 4$. Pro poloměr r nám tak vycházejí jen dvě možnosti, $r \in \{3, 4\}$, odpovídající hodnoty poloměru s vypočteme ze vztahu (1).

Úloha má právě dvě řešení: $r = s = 3\,\mathrm{cm}$ a $r = 4\,\mathrm{cm}$, $s = 1\,\mathrm{cm}$.

C – II – 4

Pro prvočísla p, q má platit $q(q-1) = p(145p-1)$, takže prvočíslo p dělí $q(q-1)$. Prvočíslo p nemůže dělit prvočíslo q, protože to by znamenalo, že $p = q$, a tedy $145p = p$, což nejde. Proto p dělí $q - 1$, tj. $q - 1 = kp$ pro nějaké k přirozené. Po dosazení do daného vztahu dostaneme podmínku

$$p = \frac{k+1}{145 - k^2}.$$

Vidíme, že jmenovatel zlomku na pravé straně je kladný jedině pro $k \leqq$ $\leqq 12$, zároveň však pro $k \leqq 11$ je jeho čitatel menší než jmenovatel: $k + 1 \leqq 12 < 24 \leqq 145 - k^2$. Pouze pro $k = 12$ tak vyjde p přirozené a prvočíslo, $p = 13$. Je pak $q = 157$, což je také prvočíslo. Úloha má jediné řešení.