Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 0,$$

víte-li, že má čtyři různé reálné kořeny, přičemž součet dvou z nich je roven číslu 1. *(Jaromír Šimša)*

A – I – 2

Kružnice vepsaná danému trojúhelníku ABC se dotýká stran BC, CA, AB po řadě v bodech K, L, M. Označme P průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přímkou MK. Dokažte, že přímky AP a LK jsou rovnoběžné. *(Peter Novotný)*

A – I – 3

Jsou-li x, y, z reálná čísla z intervalu $\langle -1, 1\rangle$ splňující podmínku $xy + yz + zx = 1$, pak platí

$$6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \leqq 1 + (x+y+z)^2.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost. *(Jaroslav Švrček)*

A – I – 4

Určete, pro která přirozená čísla n je možno množinu $\mathsf{M} = \{1, 2, \dots, n\}$ rozdělit a) na dvě, b) na tři navzájem disjunktní podmnožiny o stejném počtu prvků tak, aby každá z nich obsahovala také aritmetický průměr všech svých prvků. *(Peter Novotný)*

A – I – 5

V rovině je dána kružnice k se středem S a bod $A \neq S$. Určete množinu středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC, jejichž strana BC je průměrem kružnice k. *(Jiří Dula)*

A – I – 6

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takové, že pro všechna celá čísla x, y platí

$$f\bigl(f(x) + y\bigr) = x + f(y + 2\,006).$$

(Petr Kaňovský)

A – S – 1

Určete všechna reálná čísla s, pro něž má rovnice

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = 0$$

čtyři různé reálné kořeny, přičemž součin dvou z nich je roven číslu -2. *(Jaromír Šimša)*

A – S – 2

Uvažujme množinu $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160\}$ a všechny její tříprvkové podmnožiny. Rozhodněte, zda je více těch, které mají součin svých prvků větší než $2\,006$, nebo těch, které mají součin svých prvků menší než $2\,006$. *(Peter Novotný)*

A – S – 3

Je dán lichoběžník $ABCD$ s pravým úhlem při vrcholu A a základnou AB, v němž platí $|AB| > |CD| \geqq |DA|$. Označme S průsečík os jeho vnitřních úhlů při vrcholech A, B a T průsečík os vnitřních úhlů při vrcholech C, D. Podobně označme U, V průsečíky os vnitřních úhlů při vrcholech A, D, resp. B, C.

a) Ukažte, že přímky UV a AB jsou rovnoběžné.

b) Dokažte, že průsečík E polopřímky DT s přímkou AB a body S, T, B leží na téže kružnici. *(Jaroslav Švrček, Pavel Calábek)*

A – II – 1

Zjistěte, jaký je nejmenší možný obsah trojúhelníku ABC, jehož výšky vyhovují nerovnostem $v_a \geqq 3\,\mathrm{cm}$, $v_b \geqq 4\,\mathrm{cm}$, $v_c \geqq 5\,\mathrm{cm}$.

(Pavel Novotný)

A – II – 2

Nechť a, b jsou reálná čísla. Má-li rovnice

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = 0$$

dva různé reálné kořeny takové, že jejich součet se rovná jejich součinu, pak platí $a + b > 0$ a přitom daná rovnice nemá žádné jiné reálné kořeny. Dokažte.

(Jaromír Šimša)

A – II – 3

Nechť M je libovolný vnitřní bod přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC. Označme S, S_1, S_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABC, AMC, BMC.

a) Dokažte, že body M, C, S_1, S_2 a S leží na téže kružnici.

b) Pro kterou polohu bodu M má tato kružnice nejmenší poloměr?

(Jaroslav Švrček)

A – II – 4

Nechť p, q $(p < q)$ jsou daná přirozená čísla. Určete nejmenší přirozené číslo m s vlastností: Součet všech zlomků v základním tvaru, které mají jmenovatel m a jejichž hodnoty leží v otevřeném intervalu (p, q), je aspoň $56(q^2 - p^2)$.

(Vojtech Bálint)

A – III – 1

Na některé pole čtvercové šachovnice $n \times n$ $(n \geqq 2)$ postavíme figurku a pak s ní táhneme střídavě „šikmo“ a „přímo“. „Šikmo“ znamená na pole, které má s předchozím společný právě jeden bod. „Přímo“ znamená na sousední pole, které má s předchozím společnou stranu. Určete všechna n, pro něž existuje výchozí pole a posloupnost tahů začínající „šikmo“ tak, že figurka projde celou šachovnici a na každém poli se octne právě jednou.

(Peter Novotný)

A – III – 2

V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný. (*Pavel Leischner*)

A – III – 3

Označme $\mathbb{N}$ množinu všech přirozených čísel a uvažujme všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{N}$ platí

$$f\big(xf(y)\big) = yf(x).$$

Určete nejmenší možnou hodnotu $f(2\,007)$. (*Pavel Calábek*)

A – III – 4

Množina M obsahuje všechna přirozená čísla od 1 do 2 007 včetně a má následující vlastnost: Je-li číslo n prvkem množiny M, leží v M všechny členy aritmetické posloupnosti s prvním členem n a diferencí $n+1$. Rozhodněte, zda množina M musí obsahovat všechna přirozená čísla větší než určité číslo m. (*Jaromír Šimša*)

A – III – 5

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC takový, že $|AC| \neq |BC|$. Uvnitř jeho stran BC a AC uvažujme body D a E, pro něž je $ABDE$ tětivový čtyřúhelník. Průsečík jeho úhlopříček AD a BE označme P. Jsou-li přímky CP a AB navzájem kolmé, pak P je průsečíkem výšek trojúhelníku ABC. Dokažte. (*Ján Mazák*)

A – III – 6

Určete všechny uspořádané trojice (x, y, z) navzájem různých reálných čísel, které vyhovují množinové rovnici

$$\{x, y, z\} = \left\{\frac{x-y}{y-z}, \frac{y-z}{z-x}, \frac{z-x}{x-y}\right\}.$$

(*Jaromír Šimša*)

A – I – 1

Označme hledané kořeny x_1, x_2, x_3, x_4 tak, aby platilo $x_1 + x_2 = 1$. Potom

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Porovnáním koeficientů u odpovídajících mocnin x dostaneme známé Viètovy vztahy

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \tag{1}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -\frac{7}{4}, \tag{2}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{11}{2}, \tag{3}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{7}{2}. \tag{4}$$

Protože $x_1 + x_2 = 1$, z (1) plyne $x_3 + x_4 = 2$. Rovnice (2) a (3) přepíšeme do tvaru

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = -\frac{7}{4},$$

$$(x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2 = -\frac{11}{2},$$

což po dosazení hodnot $x_1 + x_2 = 1$ a $x_3 + x_4 = 2$ dává

$$x_1x_2 + x_3x_4 = -\frac{15}{4},$$

$$2x_1x_2 + x_3x_4 = -\frac{11}{2}.$$

Z této soustavy dvou lineárních rovnic již snadno dostaneme

$$x_1x_2 = -\frac{7}{4}, \qquad x_3x_4 = -2.$$

Všimněme si, že pro tyto hodnoty součinů x_1x_2 a x_3x_4 je splněna i rovnice (4), kterou jsme dosud nevyužili. Z podmínek $x_1 + x_2 = 1$, $x_1x_2 = -\frac{7}{4}$ vyplývá, že x_1 a x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 - x - \frac{7}{4} = 0, \qquad \text{tedy } x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}.$$

Podobně z podmínek $x_3 + x_4 = 2$ a $x_3x_4 = -2$ dostaneme

$$x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Zkoušku nalezených kořenů není třeba provádět, protože je splněna, jak jsme zdůraznili, celá soustava rovnic (1) až (4).

Závěr. Daná rovnice má kořeny $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$, $\frac{1}{2} - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$.

Jiné řešení. Z podmínek úlohy plyne, že levá strana rovnice je součinem mnohočlenů

$$x^2 - x + p \qquad \text{a} \qquad 4x^2 + qx + r,$$

kde p, q a r jsou reálná čísla. Po jejich vynásobení a porovnání koeficientů u odpovídajících mocnin x dostaneme soustavu čtyř rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} q - 4 &= -12, \\ 4p - q + r &= -7, \\ pq - r &= 22, \\ pr &= 14. \end{aligned}$$

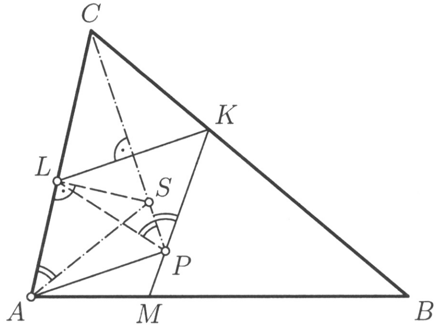
První tři rovnice mají jediné řešení $r = -8$, $p = -\frac{7}{4}$ a $q = -8$, které vyhovuje i čtvrté rovnici. Platí tedy rozklad

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = \left(x^2 - x - \frac{7}{4}\right)(4x^2 - 8x - 8).$$

Rovnice $x^2 - x - \frac{7}{4} = 0$ má kořeny $\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}$, rovnice $4x^2 - 8x - 8 = 0$ má kořeny $1 \pm \sqrt{3}$.

A – I – 2

Označme k kružnici vepsanou trojúhelníku ABC a S její střed. Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC označme obvyklým způsobem α, β, γ. Protože body K, L jsou souměrně sdruženy podle osy vnitřního úhlu při vrcholu C, jsou přímky KL a CP na sebe kolmé a platí $|\sphericalangle LPC| = |\sphericalangle KPC|$ (obr. 16).



Obr. 16

Vyjádříme-li velikosti vnitřních úhlů při základnách KM a LK v rovnoramenných trojúhelnících KMB a LKC, dostaneme $|\sphericalangle MKB| = 90° - \frac{1}{2}\beta$, $|\sphericalangle LKC| = 90° - \frac{1}{2}\gamma$. Z přímosti úhlu BKC tak plyne $|\sphericalangle MKL| = 90° - \frac{1}{2}\alpha$. Analogicky vyjde $|\sphericalangle KLM| = 90° - \frac{1}{2}\beta$, $|\sphericalangle LMK| = 90° - \frac{1}{2}\gamma$.

Protože $|\sphericalangle KPC| + \frac{1}{2}\gamma = |\sphericalangle BKP| = 90° - \frac{1}{2}\beta$, dostaneme pro velikost souměrně sdružených úhlů LPC a KPC rovnost

$$|\sphericalangle LPC| = |\sphericalangle KPC| = 90° - \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Kružnice k vepsaná trojúhelníku ABC je současně kružnicí opsanou trojúhelníku KLM, který je, jak jsme zjistili výpočtem jeho úhlů, ostroúhlý. Její střed S je proto vnitřním bodem tohoto trojúhelníku, a tedy i vnitřním bodem úsečky CP. Protože

$$|\sphericalangle LPC| = |\sphericalangle LPS| = |\sphericalangle LAS| = \frac{\alpha}{2},$$

je $APSL$ tětivový čtyřúhelník. Vzhledem k tomu, že úhel ALS je pravý, je i úhel APS pravý (přímky AP a CP jsou na sebe kolmé), a proto jsou přímky KL a AP rovnoběžné. Tím je důkaz hotov.

Poznámka. Protože kružnice k je opsaná trojúhelníku KLM, můžeme jeho vnitřní úhly snadno vyjádřit z příslušných středových úhlů: $|\sphericalangle KSL| = 180° - \gamma$, takže $|\sphericalangle KML| = 90° - \frac{1}{2}\gamma$ atd.

A – I – 3

Pro libovolná reálná čísla $x, y, z \in \langle -1, 1\rangle$ platí $1 - x^2 \geqq 0$, $1 - y^2 \geqq 0$, $1 - z^2 \geqq 0$. Užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro trojici nezáporných reálných čísel $1 - x^2$, $1 - y^2$, $1 - z^2$ tak dostaneme

$$\sqrt[3]{(1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2)} \leqq \frac{(1 - x^2) + (1 - y^2) + (1 - z^2)}{3} = \\ = \frac{3 - (x^2 + y^2 + z^2)}{3},$$

takže

$$6\sqrt[3]{(1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2)} \leqq 6 - 2(x^2 + y^2 + z^2). \qquad (1)$$

Vyhovují-li reálná čísla $x, y, z \in \langle -1, 1 \rangle$ podmínce $xy + yz + zx = 1$, ukážeme, že splňují také nerovnost

$$6 - 2(x^2 + y^2 + z^2) \leqq 1 + (x + y + z)^2. \qquad (2)$$

Pravou stranu této nerovnosti upravíme na tvar

$$1 + x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 3 + (x^2 + y^2 + z^2),$$

což po dosazení do (2) vede k ekvivalentní nerovnosti

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq 1.$$

Její platnost ověříme snadno. Stačí totiž dokázat, že pro reálná čísla x, y, z, která vyhovují podmínkám úlohy, platí nerovnost

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq xy + yz + zx,$$

což je však ekvivalentní nerovnosti

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geqq 0,$$

která platí pro všechna reálná čísla x, y, z.

Závěr. Nerovnost, kterou jsme měli dokázat, vyplývá z dokázaných nerovností (1) a (2). Rovnost v ní přitom nastane, právě když nastane současně v obou zmíněných nerovnostech. To nastane, právě když $x = y = z$, což s ohledem na podmínku $xy + yz + zx = 1$ dává pouze dvě možnosti $x = y = z = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$, pro něž v dokázané nerovnosti platí rovnost.

A – I – 4

a) Označme A a B hledané podmnožiny. Protože obě mají stejný počet prvků, je počet prvků množiny M nutně sudý. Je tedy $n = 2k$, kde k je vhodné přirozené číslo.

Pro $n = 4$ neexistuje rozklad množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, 3, 4\}$ na dvě podmnožiny daných vlastností, protože aritmetický průměr libovolných dvou různých čísel z množiny M se nemůže rovnat žádnému z těchto čísel. Sestrojme vyhovující rozklad množiny M pro několik prvních sudých čísel n (aritmetický průměr prvků podmnožin vyznačíme polotučně):

$n = 2$:	$\mathsf{A} = \{\mathbf{1}\}$	$\mathsf{B} = \{\mathbf{2}\}$
$n = 4$:	rozklad neexistuje	
$n = 6$:	$\mathsf{A} = \{1, \mathbf{2}, 3\}$	$\mathsf{B} = \{4, \mathbf{5}, 6\}$
$n = 8$:	$\mathsf{A} = \{2, 3, \mathbf{4}, 7\}$	$\mathsf{B} = \{1, \mathbf{5}, 6, 8\}$
$n = 10$:	$\mathsf{A} = \{1, 2, \mathbf{3}, 4, 5\}$	$\mathsf{B} = \{6, 7, \mathbf{8}, 9, 10\}$
$n = 12$:	$\mathsf{A} = \{1, 2, 3, \mathbf{4}, 6, 8\}$	$\mathsf{B} = \{5, 7, \mathbf{9}, 10, 11, 12\}$

Nyní ukážeme, že hledaný rozklad množiny M existuje pro libovolné $n = 2k$ takové, že $k \neq 2$.

Pro lichá čísla k vyhovuje například rozklad množiny M na podmnožiny

$$\mathsf{A} = \{1, 2, \ldots, k\}, \qquad \mathsf{B} = \{k+1, k+2, \ldots, 2k\}.$$

Součet všech prvků množiny A je $\frac{1}{2}k(k+1)$, jejich aritmetický průměr je $\frac{1}{2}(k+1)$, což je přirozené číslo. Jelikož $1 \leqq \frac{1}{2}(k+1) \leqq k$, je aritmetický průměr všech prvků množiny A prvkem množiny A. Podobně aritmetický průměr $\frac{1}{2}(3k+1)$ všech prvků množiny B je prvkem množiny B.

Pro $k = 4$ jsme existenci rozkladu ukázali v tabulce, pro sudá čísla $k \geqq 6$ vyhovuje například rozklad množiny M na podmnožiny

$$\mathsf{A} = \{1, 2, \ldots, k-2, k, \tfrac{1}{2}(3k-2)\}, \qquad \mathsf{B} = \mathsf{M} \setminus \mathsf{A}.$$

Platí $k < \frac{1}{2}(3k-2) \leqq 2k$ a $\frac{1}{2}(3k-2)$ je přirozené číslo. Množina A tedy obsahuje k přirozených čísel z množiny M. Součet všech prvků množiny A je

$$1+2+\ldots+(k-2)+k+\tfrac{1}{2}(3k-2) = \tfrac{1}{2}(k-2)(k-1)+k+\tfrac{1}{2}(3k-2) = \tfrac{1}{2}k(k+2).$$

Jejich aritmetický průměr je $\frac{1}{2}(k+2)$, což je přirozené číslo. Jelikož $1 \leqq \frac{1}{2}(k+2) \leqq k-2$, je aritmetický průměr všech prvků množiny A prvkem množiny A. Obdobně ukážeme, že aritmetický průměr $\frac{3}{2}k$ všech prvků množiny B je prvkem množiny B.

Poznámka. Pro k sudé nevyhovuje například rozklad množiny M na podmnožiny

$$\mathsf{A} = \{1, 2, \ldots, k-1, \tfrac{3}{2}k\}, \qquad \mathsf{B} = \mathsf{M} \setminus \mathsf{A},$$

protože průměr $\frac{3}{2}k$ všech prvků množiny B je prvkem množiny A. Vyhovuje však rozklad jiného druhu

$$\mathsf{A} = \{1, 3, \ldots, k-1\} \cup \{k, k+4\} \cup \{k+5, k+7, \ldots, 2k-1\},$$
$$\mathsf{B} = \{2, 4, \ldots, k-2\} \cup \{k+1, k+2, k+3\} \cup \{k+6, k+8, \ldots, 2k\},$$

a to dokonce i pro hodnotu $k = 4$, kdy v pravých stranách těchto rovností „chybějí“ třetí skupiny prvků, jež mají obecně po $\frac{1}{2}(k-4)$ prvcích. Počet prvků takové množiny A je roven $\frac{1}{2}k + 2 + \frac{1}{2}(k-4) = k$, jejich součet je roven

$$\frac{k^2}{4} + (2k+4) + \frac{(k-4)(3k+4)}{4} = k^2,$$

takže jejich průměr je číslo $k \in \mathsf{A}$. Součet všech k prvků množiny B je roven

$$\frac{(k-2)k}{4} + (3k+6) + \frac{(k-4)(3k+6)}{4} = k^2 - 2k,$$

takže jejich průměr je číslo $k - 2 \in \mathsf{B}$.

b) Označme A, B a C hledané podmnožiny množiny M. Protože všechny mají stejný počet prvků, je číslo n nutně dělitelné třemi, je tedy tvaru $n = 3k$, kde k je vhodné přirozené číslo. Pro součet s všech prvků množiny M platí $s = \frac{1}{2}3k(3k+1)$. Součet tří aritmetických průměrů všech prvků jednotlivých množin A, B a C je pak roven s/k, tedy $\frac{3}{2}(3k+1)$. Tento součet musí být podle podmínek úlohy přirozené číslo, proto je k nutně liché.

Pro čísla $n = 3k$, kde k je liché, ukážeme, že zadání vyhovuje například rozklad množiny M na podmnožiny

$$\mathsf{A} = \{1, 2, \ldots, k\}, \quad \mathsf{B} = \{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$$
$$\text{a} \quad \mathsf{C} = \{2k+1, 2k+2, \ldots, 3k\}.$$

Součet všech prvků A je $\frac{1}{2}k(k+1)$, jejich aritmetický průměr je roven $\frac{1}{2}(k+1)$, což je přirozené číslo. Jelikož $1 \leqq \frac{1}{2}(k+1) \leqq k$, je aritmetický průměr všech prvků množiny A prvkem množiny A. Podobně ukážeme, že aritmetický průměr $\frac{1}{2}(3k+1)$ všech prvků množiny B je prvkem množiny B a aritmetický průměr $\frac{1}{2}(5k+1)$ všech prvků množiny C je prvkem množiny C.

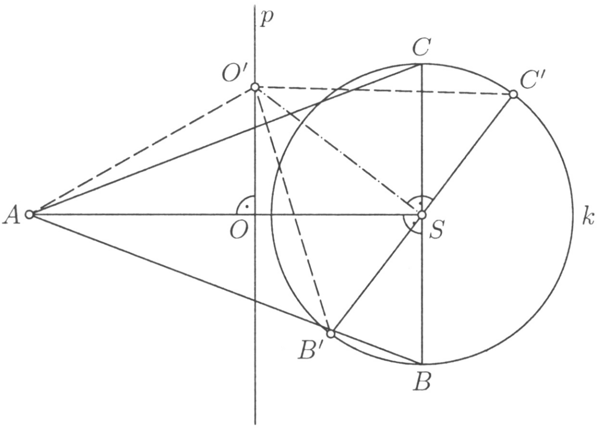
Závěr. Podmínkám úlohy v případě a) vyhovují všechna sudá čísla n různá od 4, v případě b) všechna lichá čísla n dělitelná třemi.

A – I – 5

Poloměr dané kružnice k označme r. Leží-li bod A na kružnici k, je bod S středem kružnice opsané každého z uvažovaných trojúhelníků ABC a hledanou množinou je jednobodová množina $\{S\}$. Dále rozlišíme dva případy:

a) Nechť $|AS| > r$. Uvažujme nejprve rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC, který vyhovuje podmínkám úlohy. Střed O kružnice jemu opsané je vnitřním bodem úsečky AS a přitom platí $|AO| = |BO| = |CO|$.

Nyní ukážeme, že hledanou množinou O středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC, které vyhovují podmínkám úlohy, je přímka p, která je kolmá k AS a prochází bodem O (obr. 17).



Obr. 17

Uvažujme libovolný trojúhelník $AB'C'$, kde $B'C'$ je průměr kružnice k, a označme O' průsečík osy jeho strany $B'C'$ s přímkou p, takže $|O'B'| = |O'C'|$ (bod O' leží na ose $B'C'$). Podle Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku $C'O'S$ platí

$$|O'B'| = |O'C'| = \sqrt{|O'S|^2 + r^2} = \sqrt{|OO'|^2 + |OS|^2 + r^2}.$$

Pro velikost úsečky $O'A$ přitom máme

$$|O'A| = \sqrt{|AO|^2 + |OO'|^2} = \sqrt{|BO|^2 + |OO'|^2} = \\ = \sqrt{|OS|^2 + r^2 + |OO'|^2}.$$

Odtud $|O'A| = |O'B'| = |O'C'|$, tudíž bod O' je středem kružnice opsané trojúhelníku $AB'C'$ a podle konstrukce leží na přímce p.

Naopak, pro libovolný bod O' přímky p lze sestrojit průměr $B'C'$ kružnice k, který je kolmý k přímce $O'S$. Z předchozích úvah vyplývá, že $|O'A| = |O'B'| = |O'C'|$, takže jsme našli trojúhelník $AB'C'$ požadovaných vlastností, jehož kružnice opsaná má střed O'.

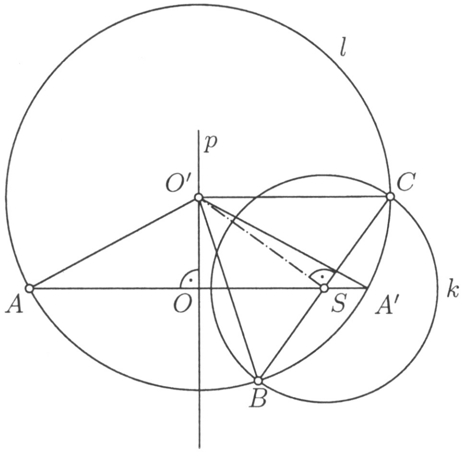
b) Nechť $|AS| < r$. V tomto případě lze postupovat analogicky. Střed O je zde vnitřním bodem polopřímky opačné k polopřímce SA. Dojdeme přitom ke stejnému výsledku jako v případě a).

Závěr. Není-li A bodem kružnice k, je hledanou množinou O přímka p, která je kolmá k AS a současně prochází středem O kružnice opsané rovnoramennému trojúhelníku ABC se základnou BC, která je průměrem kružnice k kolmým na AS. Je-li A je bodem kružnice k, je $\mathsf{O} = \{S\}$.

Jiné řešení. Pro daný bod A, který neleží na kružnici k, uvažujme trojúhelník ABC daných vlastností. Označme l kružnici opsanou trojúhelníku ABC (obr. 18). Protože bod S je středem společné tětivy BC kružnic k a l, protne kružnice l polopřímku opačnou k polopřímce SA ve vnitřním bodě, který označíme A'. Pro mocnost $m_l(S)$ bodu S ke kružnici l přitom platí

$$m_l(S) = -|BS| \cdot |CS| = -r^2 = -|AS| \cdot |A'S|, \tag{1}$$

kde r je poloměr kružnice k. Odtud plyne, že vzdálenost $|A'S|$, a tedy i poloha bodu A' na polopřímce opačné k SA jsou jednoznačně určeny polohou bodu A. Pro všechny trojúhelníky ABC vyhovující podmínkám úlohy je tedy AA' pevná úsečka. Kružnice opsané všem uvažovaným trojúhelníkům ABC proto mají společnou tětivu AA', takže jejich středy leží na ose p úsečky AA'. V případě, kdy ABC je rovnoramenný trojúhelník se základnou BC, je úsečka AA' průměrem kružnice l a její střed O je současně středem úsečky AA'. Přímka p prochází tímto bodem O kolmo k přímce AS.



Obr. 18

Naopak, ke každému bodu O' přímky p najdeme trojúhelník ABC požadovaných vlastností, který má střed opsané kružnice v bodě O'. Stačí sestrojit průměr BC kružnice k, který je kolmý k přímce $O'S$. Pro pevně uvažované body A, A' a S jsme tak sestrojili body B, C, pro něž platí vztah (1). To znamená, že body A, B, C a A' leží na téže kružnici l. Vzhledem k tomu, že bod O' je průsečíkem os tětiv AA' a BC této kružnice, které nejsou rovnoběžné, je bod O' středem kružnice l, tedy středem kružnice opsané trojúhelníku ABC.

A – I – 6

Nechť f je libovolná funkce požadovaných vlastností. Dosadíme-li do daného vztahu postupně $y = 0$ a $y = 1$, dostaneme rovnosti

$$f\bigl(f(x)\bigr) = x + f(2\,006), \quad \text{resp.} \quad f\bigl(f(x) + 1\bigr) = x + f(2\,007) \qquad (1)$$

a jejich odečtením

$$f\bigl(f(x) + 1\bigr) - f\bigl(f(x)\bigr) = f(2\,007) - f(2\,006).$$

Poslední vztah lze zjednodušeně zapsat jako

$$f(z + 1) - f(z) = f(2\,007) - f(2\,006) \qquad (2)$$

pro každé takové $z \in \mathbb{Z}$, které patří do oboru hodnot funkce f. Tímto oborem je ovšem celá množina $\mathbb{Z}$, jak hned vidíme z kterékoli z rovností (1).

Rovnost (2) platná pro každé $z \in \mathbb{Z}$ znamená, že funkce f na $\mathbb{Z}$ je (oboustranně nekonečná) aritmetická posloupnost, takže její předpis musí být tvaru $f(z) = az + b$ s vhodnými konstantami $a, b \in \mathbb{R}$. Jejich možné hodnoty zjistíme, když dosadíme do obou stran rovnosti ze zadání:

$$f\big(f(x) + y\big) = a\big(f(x) + y\big) + b = a^2x + ay + ab + b,$$
$$x + f(y + 2\,006) = x + a(y + 2\,006) + b = x + ay + 2\,006a + b.$$

Takové dva výrazy mají tutéž hodnotu pro všechna $x, y \in \mathbb{Z}$, právě když zároveň platí $a^2 = 1$ a $2\,006a = ab$, neboli $a = \pm 1$ a $b = 2\,006$. Řešením úlohy jsou tedy jediné dvě funkce určené předpisy

$$f_1(x) = x + 2\,006 \quad \text{a} \quad f_2(x) = -x + 2\,006.$$

A – S – 1

Předpokládejme, že číslo s vyhovuje zadání úlohy, a označme kořeny x_1, x_2, x_3, x_4 dané rovnice tak, aby platilo

$$x_1x_2 = -2. \tag{0}$$

Z rozkladu na kořenové činitele

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

po roznásobení a porovnání koeficientů u stejných mocnin x dostaneme Viètovy vztahy

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \tag{1}$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{s}{4}, \tag{2}$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{11}{2}, \tag{3}$$
$$x_1x_2x_3x_4 = -\frac{1}{2}. \tag{4}$$

Z rovností (0) a (4) ihned plyne

$$x_3x_4 = \frac{1}{4}.$$

Z rovnosti (3) upravené do tvaru

$$(x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2 = -\frac{11}{2}$$

vychází po dosazení hodnot x_1x_2 a x_3x_4 rovnice

$$\frac{1}{4}(x_1 + x_2) - 2(x_3 + x_4) = -\frac{11}{2},$$

která spolu s rovnicí (1) tvoří soustavu dvou lineárních rovnic pro neznámé součty $x_1 + x_2$ a $x_3 + x_4$. Snadným výpočtem zjistíme, že řešením této soustavy je dvojice hodnot

$$x_1 + x_2 = 2 \quad \text{a} \quad x_3 + x_4 = 3.$$

Dosadíme-li vše zjištěné do rovnosti (2) upravené do tvaru

$$x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = \frac{s}{4},$$

zjistíme, že nutně $s = 17$.

Nyní musíme provést zkoušku: z rovností

$$x_1 + x_2 = 2 \quad \text{a} \quad x_1x_2 = -2$$

vyplývá, že čísla $x_{1,2}$ jsou kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 - 2x - 2 = 0, \quad \text{tedy} \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}; \tag{5}$$

z rovností

$$x_3 + x_4 = 3 \quad \text{a} \quad x_3x_4 = \frac{1}{4}$$

zase plyne, že čísla $x_{3,4}$ jsou kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0, \quad \text{tedy} \quad x_{3,4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2}. \tag{6}$$

Vidíme, že $x_{1,2,3,4}$ jsou skutečně čtyři navzájem různá reálná čísla, která splňují soustavu rovnic (1)–(4) pro hodnotu $s = 17$, takže to jsou kořeny rovnice ze zadání. Zdůrazněme, že zadáním úlohy nebylo tyto kořeny vypočítat. Nestačilo by ovšem jen ověřit, že každá z kvadratických rovnic v (5) a (6) má dva různé reálné kořeny (to nastane, právě když jejich diskriminanty jsou kladná čísla), kromě toho by bylo nutné ještě ukázat, že tyto dvě rovnice nemají společný kořen.

Hledané číslo s je jediné a má hodnotu $s = 17$.

Jiné řešení. Označme $x_{1,2}$ ty kořeny dané rovnice, pro něž má platit $x_1x_2 = -2$. Mnohočlen z levé strany rovnice je dělitelný mnohočlenem $(x-x_1)(x-x_2)$, tedy mnohočlenem tvaru x^2+px-2 (kde $p = -x_1-x_2$), platí tudíž rozklad

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = (x^2 + px - 2)(4x^2 + qx + r).$$

Roznásobením a porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme soustavu

$$-20 = 4p + q, \quad s = -8 + pq + r, \quad 22 = -2q + pr, \quad -2 = -2r.$$

Ze čtvrté rovnice máme $r = 1$, po dosazení do třetí $22 = -2q + p$, což spolu s první rovnicí dává $p = -2$ a $q = -12$. Ze zbylé (druhé) rovnice pak určíme hodnotu $s = 17$. Víme, že pro ni má mnohočlen ze zadané rovnice rozklad

$$4x^4 - 20x^3 + 17x^2 + 22x - 2 = (x^2 - 2x - 2)(4x^2 - 12x + 1),$$

zbývá provést zkoušku (stejně jako při prvním postupu).

A – S – 2

Uvažovaná množina je množinou právě *všech (přirozených) dělitelů* čísla $160 = 2^5 \cdot 5$. Její prvky můžeme sdružit do dvojic tak, aby součin čísel v každé dvojici byl roven číslu 160:

$$1 \cdot 160 = 2 \cdot 80 = 4 \cdot 40 = 5 \cdot 32 = 8 \cdot 20 = 10 \cdot 16.$$

To znamená, že je-li $A = \{a, b, c\}$ trojice navzájem různých dělitelů čísla 160, je i $A' = \{160/a, 160/b, 160/c\}$ trojice navzájem různých dělitelů čísla 160.

Součin abc prvků trojice A se dá vyjádřit ve tvaru

$$2^k5^l, \quad \text{kde } k \in \{0, 1, 2, \ldots, 14\},\ l \in \{0, 1, 2, 3\} \tag{1}$$

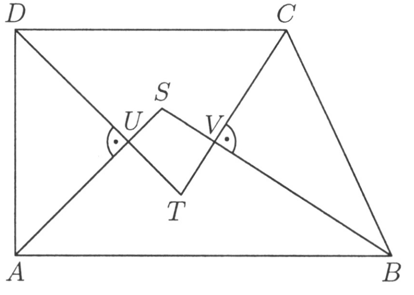
(číslo 160 má jen dva dělitele, jež jsou násobkem 2^5, proto se v rozkladu součinu abc nemůže objevit 2^{15}). Není těžké zjistit, že největší přirozené číslo tvaru (1), které je menší než 2 006, je číslo $2\,000 = 2^4 \cdot 5^3$ a nejmenší přirozené číslo, které je tvaru (1) a je větší než 2 006, je číslo $2\,048 = 2^{11}$ (samo číslo 2 006 tvaru (1) není). Přitom $2\,000 \cdot 2\,048 = 160^3$.

Je-li tedy součin prvků trojice A menší než 2 006, je nutně $abc \leqq 2\,000$ a součin $160^3/(abc)$ prvků odpovídající trojice A' je nejméně $160^3/2\,000 = 2\,048$. Naopak, je-li součin prvků trojice A větší než číslo 2 006, je $abc \geqq 2\,048$ a součin prvků trojice A' je nejvýše $160^3/2\,048 = 2\,000$. Jinými slovy *tříprvkových podmnožin se součinem prvků menším než* 2 006 *je právě tolik jako tříprvkových podmnožin se součinem prvků větším než* 2 006.

A – S – 3

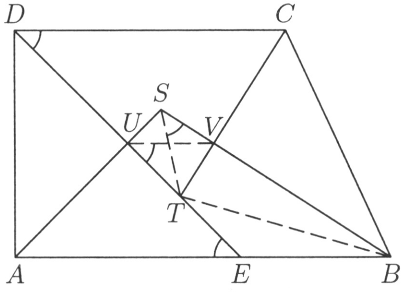
Bod U jako průsečík os vnitřních úhlů při vrcholech A a D daného lichoběžníku má stejnou vzdálenost od stran AB, AD a zároveň i od stran AD, DC. To znamená, že má stejnou vzdálenost od obou základen AB, CD lichoběžníku $ABCD$. Podobně i bod V, který je průsečíkem os úhlů při vrcholech B a C, má od obou základen stejnou vzdálenost. Jsou tedy přímky UV a AB rovnoběžné. Tím je vyřešena část a).

Protože součet vnitřních úhlů jak při vrcholech A a D, tak při vrcholech B a C je $180°$, je součet úhlů přilehlých straně AD trojúhelníku ADU roven $90°$ stejně jako součet úhlů přilehlých straně BC trojúhelníku BCV. To znamená, že oba uvedené trojúhelníky jsou pravoúhlé (s pravým úhlem při vrcholu U, resp. V, obr. 19). Čtyřúhelník $UTVS$ je tedy tětivový (z předpokladu úlohy $|AB| > |CD| \geqq |DA|$ plyne, že polopřímky AU a CV se neprotínají, body S a T proto leží v opačných polorovinách určených přímkou UV a body U, T, V, S leží na kružnici v uvedeném pořadí).



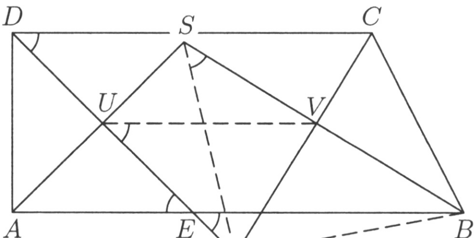
Obr. 19

Jak už víme, jsou přímky UV, AB a CD rovnoběžné, je tedy $|\sphericalangle VUT = |\sphericalangle CDT| = 45^\circ$. Z rovnosti obvodových úhlů nad stranou TV tětivového čtyřúhelníku $UTVS$ tak plyne $|\sphericalangle VST| = |\sphericalangle VUT| = 45^\circ$. To je zároveň i velikost obvodového úhlu TSB příslušného tětivě TB kružnice opsané trojúhelníku STB (obr. 20). Zbývá ukázat, že na téže



Obr. 20

kružnici leží i bod E. To je zřejmé, pokud $E = T$. V opačném případě stačí zjistit, že velikost úhlu TEB je $180^\circ - 45^\circ$ nebo 45° podle toho, zda přímka BT body S, E odděluje či nikoli, což okamžitě plyne z toho, že přímka DT svírá se základnou AB úhel 45° (obr. 20 a 21). Tím je vyřešena část b).



Obr. 21

A – II – 1

Označme a, b, c velikosti stran trojúhelníku ABC. Pro jeho výšku v_b platí nerovnost

$$c \geqq v_b,$$

neboť v_b je délka nejkratší úsečky spojující vrchol B s bodem přímky AC. Pro obsah S trojúhelníku ABC tak platí:

$$S = \frac{cv_c}{2} \geqq \frac{v_b v_c}{2} \geqq 10\,\mathrm{cm}^2.$$

Pokud existuje trojúhelník ABC vyhovující podmínkám úlohy, jehož obsah je právě $10\,\mathrm{cm}^2$, potom v obou nerovnostech $S = \frac{1}{2}cv_c \geqq \frac{1}{2}v_b v_c \geqq 10\,\mathrm{cm}^2$ nastává rovnost. Vychází tedy $c = v_b = 4\,\mathrm{cm}$ a současně $v_c = 5\,\mathrm{cm}$. Z první rovnosti plyne, že takový trojúhelník musí být pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A. Pro délku jeho odvěsny AC pak platí $b = v_c = 5\,\mathrm{cm}$ a délka a jeho přepony BC je rovna $\sqrt{41}\,\mathrm{cm}$. Ze vzorce $S = \frac{1}{2}av_a$ pro jeho výšku v_a plyne

$$v_a = \frac{2S}{a} = \frac{20}{\sqrt{41}}\,\mathrm{cm} > 3\,\mathrm{cm}.$$

Pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami $b = 5\,\mathrm{cm}$ a $c = 4\,\mathrm{cm}$ tedy vyhovuje podmínkám úlohy.

Nejmenší možný obsah trojúhelníku ABC, jehož výšky vyhovují podmínkám úlohy, je $10\,\mathrm{cm}^2$.

A – II – 2

Předpokládejme, že rovnice

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = 0 \tag{1}$$

má dva různé reálné kořeny x_1 a x_2, pro které platí $x_1 + x_2 = x_1 x_2 = p$. Potom mnohočlen na její levé straně je dělitelný kvadratickým trojčlenem $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - px + p$, a má tudíž rozklad

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = (x^2 - px + p)(x^2 + rx + s),$$

kde r a s jsou reálná čísla. Roznásobením výrazu na pravé straně poslední rovnosti a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x mnohočlenů na obou stranách dostaneme

$$-4 = -p + r, \tag{2}$$

$$4 = p + s - pr, \tag{3}$$

$$a = -ps + pr, \tag{4}$$

$$b = ps. \tag{5}$$

Ze vztahu (2) plyne

$$r = p - 4. \tag{6}$$

Dosazením za r do vztahu (3) dostaneme

$$s = 4 - p + p(p - 4) = (p - 4)(p - 1). \tag{7}$$

Jelikož kvadratická rovnice $x^2 - px + p = 0$ má dva různé reálné kořeny x_1 a x_2, je její diskriminant kladné číslo, takže

$$p^2 - 4p > 0. \tag{8}$$

Sečteme-li rovnice (4) a (5) a dosadíme za r podle (6), vyjde podle předchozího vztahu

$$a + b = pr = p(p - 4) = p^2 - 4p > 0,$$

což jsme chtěli dokázat.

Pro diskriminant D rovnice

$$x^2 + rx + s = 0$$

podle vztahů (6), (7) a (8) platí

$$D = r^2 - 4s = (p-4)^2 - 4(p-4)(p-1) = -3p(p-4) = -3(p^2 - 4p) < 0.$$

Rovnice tudíž nemá reálné kořeny. Daná rovnice (1) proto nemá jiné reálné kořeny než x_1 a x_2.

A – II – 3

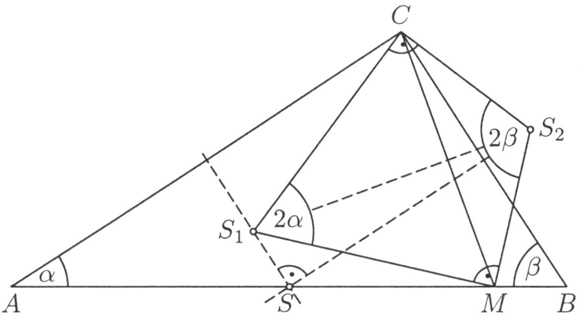
a) Označme po řadě α a β velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A a B uvažovaného pravoúhlého trojúhelníku ABC. Ze vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem pro společnou tětivu CM kružnic k_1 a k_2 opsaných po řadě trojúhelníkům AMC a BMC plyne (obr. 22)

$$|\sphericalangle MS_1C| + |\sphericalangle MS_2C| = 2\alpha + 2\beta = 180^\circ.$$

Čtyřúhelník CS_1MS_2 je tudíž tětivový. Protože body M a C jsou souměrně sdružené podle osy úsečky CM, na níž současně leží středná S_1S_2 kružnic k_1 a k_2, platí dále

$$|\sphericalangle S_1MS_2| = |\sphericalangle S_1CS_2| = 90^\circ.$$

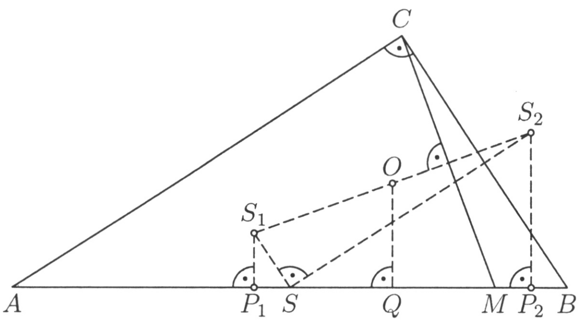
Kružnice opsaná čtyřúhelníku CS_1MS_2 je tedy Thaletovou kružnicí sestrojenou nad průměrem S_1S_2. Body S a S_1 však současně leží na ose odvěsny AC, podobně body S a S_2 leží na ose odvěsny BC uvažovaného trojúhelníku. Je tedy $|\sphericalangle S_1SS_2| = 90°$, a bod S proto leží rovněž na Thaletově kružnici opsané čtyřúhelníku CS_1MS_2. (Je-li $M = S$, platí toto tvrzení triviálně.) Tím je dokázána část a) úlohy.



Obr. 22

b) Pro poloměr r kružnice (s tětivou CS) nalezené v části a) zřejmě platí $2r \geqq |CS|$ s rovností, právě když je CS její průměr. Protože kružnice s průměrem CS prochází středy obou odvěsen AC, BC, rovnost $2r = |CS|$ nastane, právě když bod S_1 je střed AC a S_2 je střed BC (bod S_1 leží na ose odvěsny AC a bod S_2 na ose odvěsny BC), což zřejmě odpovídá volbě bodu M jako paty výšky z vrcholu C na přeponu AB.

Jiné řešení. a) Označme P_1 a P_2 po řadě středy úseček AM a BM (obr. 23). Protože ve stejnolehlosti se středem M a koeficientem $\frac{1}{2}$ se úsečka AB zobrazí na úsečku P_1P_2, zobrazí se střed S úsečky AB na

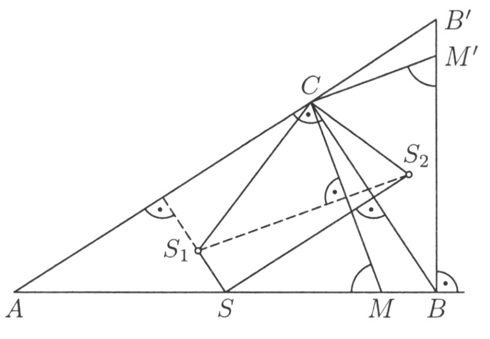


Obr. 23

střed Q úsečky P_1P_2 a zároveň jakožto obraz bodu S ve zmíněné stejnolehlosti je bod Q středem úsečky MS. Body P_1, P_2 jsou kolmé průměty bodů S_1, S_2 na přeponu AB, takže bod Q je kolmým průmětem středu O kružnice sestrojené nad průměrem S_1S_2. Podle Thaletovy věty na této kružnici zřejmě leží bod S, protože přímky S_1S a S_2S jakožto osy navzájem kolmých odvěsen AC a BC svírají pravý úhel. Ze souměrnosti uvedené kružnice podle přímky OQ pak plyne, že na ní leží i bod M, a tedy i bod C (ze souměrnosti podle přímky S_1S_2). Tím je část a) dokázána.

b) Pro úsečku S_1S_2 a její kolmý průmět P_1P_2 platí $|S_1S_2| \geqq |P_1P_2| = \frac{1}{2}|AB|$. Kružnice opsaná čtyřúhelníku CS_1MS_2 má proto nejmenší průměr $\frac{1}{2}|AB|$, právě když $S_1S_2 \parallel AB$, což vzhledem ke kolmosti úsečky CM a její osy S_1S_2 nastane, právě když M je patou výšky z vrcholu C v trojúhelníku ABC. (Poloměr r této kružnice má pak velikost $r = \frac{1}{4}|AB|$.)

Jiné řešení. a) Uvažujme podobné zobrazení složené z otočení kolem středu C o orientovaný (pravý) úhel ACB a ze stejnolehlosti se středem C a koeficientem rovným poměru $|BC| : |AC|$. Toto zobrazení převede body A, B a M po řadě do bodů B, B' a M', přičemž BC je výška na přeponu AB' pravoúhlého trojúhelníku ABB' a bod M' leží na jeho odvěsně BB' (obr. 24). Podle shodných úhlů AMC a $BM'C$ (nebo též podle pravých



Obr. 24

úhlů MCM' a MBM') vidíme, že kružnice opsaná trojúhelníku BMC je opsána i trojúhelníku $BM'C$, takže její střed S_2 je obrazem bodu S_1 v uvažovaném podobném zobrazení (to převádí trojúhelník AMC právě na trojúhelník $BM'C$). To znamená, že úhel S_1CS_2 je pravý, takže je pravý i úhel S_1MS_2 (neboť přímka S_1S_2 je osou úsečky CM). Konečně pravý je i úhel S_1SS_2 (neboť jeho ramena leží na osách navzájem kolmých odvěsen AC a BC), takže všechny tři body C, M, S leží na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem S_1S_2.

Tím je dokázána část a) úlohy. Část b) vyřešíme stejně jako v prvním řešení.

A – II – 4

Ukážeme, že nejmenší m je 113 (nezávisle na hodnotách p, q). Zřejmě je $m > 1$. Pro libovolná přirozená čísla $c < d$ a $m > 1$ označme $S_m(c,d)$ součet všech zlomků v základním tvaru, které leží v otevřeném intervalu (c,d) a jejichž jmenovatel je m. Pak platí nerovnost

$$\begin{aligned} S_m(c,c+1) &\leqq \left(c+\frac{1}{m}\right)+\left(c+\frac{2}{m}\right)+\ldots+\left(c+\frac{m-1}{m}\right)= \\ &=(m-1)c+\frac{m-1}{2}, \end{aligned}$$

v níž rovnost nastane, právě když všechna čísla $1,2,\ldots,m-1$ jsou nesoudělná s m, tj. právě když m je prvočíslo.

Pro daná přirozená čísla p, q a $m > 1$ platí

$$\begin{aligned} S_m(p,q) &= S_m(p,p+1)+S_m(p+1,p+2)+\ldots+S_m(q-1,q) \leqq \\ &\leqq \left((m-1)p+\frac{m-1}{2}\right)+\left((m-1)(p+1)+\frac{m-1}{2}\right)+\ldots \\ &\quad+\left((m-1)(q-1)+\frac{m-1}{2}\right)= \\ &=(m-1)\frac{(q-p)(p+q-1)}{2}+(m-1)\frac{q-p}{2}= \\ &=(m-1)\frac{q-p}{2}(p+q-1+1)=\frac{(m-1)(q^2-p^2)}{2}, \end{aligned}$$

tedy

$$S_m(p,q) \leqq \frac{(m-1)(q^2-p^2)}{2}. \tag{9}$$

Rovnost ve vztahu (9) přitom nastane, právě když m je prvočíslo. Podle zadání však platí

$$S_m(p,q) \geqq 56(q^2-p^2).$$

S ohledem na vztah (9) vidíme, že nutně platí $\frac{1}{2}(m-1) \geqq 56$, tj. $m \geqq 113$. Vzhledem k tomu, že číslo 113 je prvočíslo, je nejmenší hledané číslo $m = 113$.

Jiné řešení. Součet všech zlomků, které mají jmenovatel m, nejsou celá čísla a leží v intervalu (p, q), můžeme také určit jako rozdíl součtu všech zlomků se jmenovatelem m ležících v uzavřeném intervalu $\langle p, q\rangle$ a součtu všech přirozených čísel z tohoto intervalu. Pro uvažovaný rozdíl d pak platí

$$d = \sum_{j=pm}^{qm} \frac{j}{m} - \sum_{j=p}^{q} j.$$

Menšence i menšitele v uvažovaném rozdílu lze určit jako součty členů aritmetických posloupností. Pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti (a_i) využijeme známý vztah

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \tfrac{1}{2}n(a_1 + a_n).$$

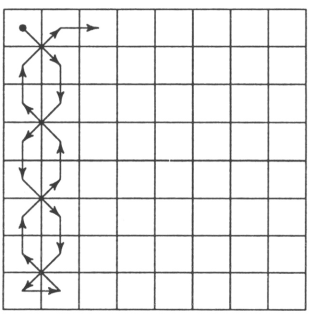
Pro hledaný rozdíl d tak dostáváme:

$$\begin{aligned} d &= \tfrac{1}{2}(p+q)\big((q-p)m+1\big) - \tfrac{1}{2}(p+q)(q-p+1) = \\ &= \tfrac{1}{2}(p+q)\big[\big((q-p)m+1\big) - (q-p+1)\big] = \tfrac{1}{2}(m-1)(q^2-p^2). \end{aligned}$$

Dále budeme postupovat stejně jako v předchozím řešení.

A – III – 1

Nejprve ukážeme, že úloha má řešení pro libovolné sudé n. Postavíme-li figurku např. na kterékoliv rohové pole šachovnice $n \times n$, projdeme celou šachovnici po sousedních blocích typu $2 \times n$ způsobem naznačeným na obr. 25 pro $n = 8$. Posloupnosti tahů zde odpovídá posloupnost na sebe navazujících orientovaných úseček. Zcela analogicky lze postupovat pro každé sudé n.



Obr. 25

A		A		A		A
	B		B		B	
A		A		A		A
	B		B		B	
A		A		A		A
	B		B		B	
A		A		A		A

Obr. 26

Nyní ukážeme, že pro žádné $n \geqq 3$ liché nelze šachovnici projít požadovaným způsobem. Důkaz provedeme sporem. Připusťme, že pro určité liché n na šachovnici $n \times n$ existuje posloupnost tahů vyhovující podmínkám úlohy. Všechna její pole obarvíme podobně jako běžnou šachovnici 8×8, a to tak, že rohová pole budou černá (podobně jako na obr. 26 pro $n = 7$). Dále všechna černá pole označíme písmeny A a B tak, aby žádná dvě černá pole mající společný právě jeden bod (vrchol) nebyla označena týmž písmenem. Budou-li rohová (černá) pole označena např. písmenem A, bude zřejmě počet polí A o n větší než počet polí B.

Pole šachovnice, která figurka požadovaným způsobem projde, označme postupně $1, 2, 3, \ldots, n^2$ a k-tý tah zápisem $k \mapsto k + 1$. Je-li pole s číslem 1 černé, jsou černá právě pole s čísly $1, 2, 5, 6, 9, 10, \ldots$; přitom každý (šikmý) tah $1 \mapsto 2$, $5 \mapsto 6$, $9 \mapsto 10, \ldots$ spojuje černá pole označená různými písmeny, takže se celkové počty polí A a B liší nejvýše o 1, což odporuje zjištěnému rozdílu. Ke stejnému sporu dojdeme i v případě, kdy je pole s číslem 1 bílé, takže černá jsou právě pole s čísly $3, 4, 7, 8, 11, 12, \ldots$ spojená (šikmými) tahy $3 \mapsto 4$, $7 \mapsto 8$, $11 \mapsto 12, \ldots$

Tím je úloha vyřešena, jejímu zadání vyhovují všechna sudá $n \geqq 2$.

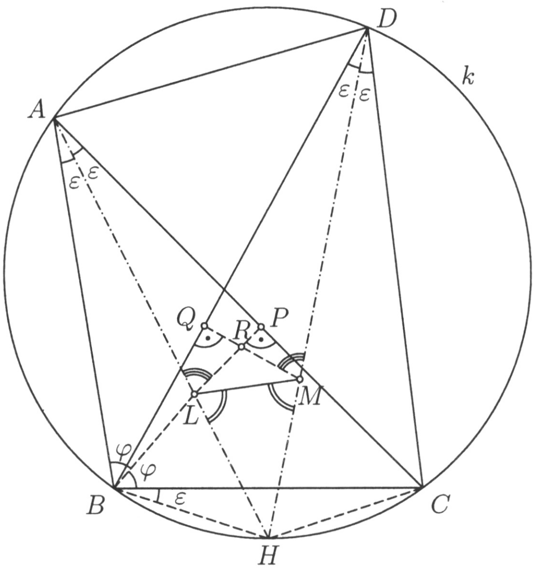
A – III – 2

Průsečík os vnitřních úhlů při vrcholech A, D v trojúhelnících BCA, BCD označme H (obr. 27). Jak známo, je bod H středem příslušného oblouku BC kružnice k opsané čtyřúhelníku $ABCD$ (oblouku, který neobsahuje vrcholy A a D). Označme $\varepsilon = |\sphericalangle BAH| = |\sphericalangle CAH| = |\sphericalangle BDH| = |\sphericalangle CDH| = |\sphericalangle CBH|$ a $\varphi = |\sphericalangle ABL| = |\sphericalangle CBL|$. Pak platí

$$|\sphericalangle BLH| = |\sphericalangle BAL| + |\sphericalangle ABL| = \varepsilon + \varphi = |\sphericalangle LBH|.$$

Trojúhelník HLB je tudíž rovnoramenný se základnou LB, takže $|HB| = |HL|$. Analogicky je i $|HC| = |HM|$. A protože $|HB| = |HC|$, je rovněž $|HL| = |HM|$, takže trojúhelník HML je rovnoramenný a platí $|\sphericalangle HLM| = |\sphericalangle HML|$.

Označme ještě P kolmý průmět bodu L na přímku AC a Q kolmý průmět bodu M na přímku BD (uvažovaný bod R je tak průsečíkem přímek LP a MQ). Protože pravoúhlé trojúhelníky APL a DQM se shodují v úhlech při vrcholech A a D, jsou shodné i úhly PLA a QMD při vrcholech L a M. Odtud a z rovnosti $|\sphericalangle HLM| = |\sphericalangle HML|$ tak vyplývá rovnost $|\sphericalangle PLM| = |\sphericalangle QML|$. To znamená, že trojúhelník LMR je rovnoramenný, jak jsme měli dokázat.



Obr. 27

A – III – 3

Uvažujme libovolnou funkci f požadovaných vlastností. Nejprve ukážeme, že je prostá. Jestliže $f(y_1) = f(y_2)$, pak pro všechna přirozená čísla x platí

$$y_1 f(x) = f\bigl(xf(y_1)\bigr) = f\bigl(xf(y_2)\bigr) = y_2 f(x),$$

a poněvadž $f(x)$ je přirozené číslo, plyne odtud $y_1 = y_2$, což znamená, že funkce f je prostá.

Volbou $x = 1$ v dané rovnici dostaneme $f\bigl(f(y)\bigr) = yf(1)$, což pro $y = 1$ dává $f\bigl(f(1)\bigr) = f(1)$. Protože f je prostá, plyne odtud

$$f(1) = 1, \tag{1}$$

takže pro všechna přirozená čísla y navíc platí

$$f\bigl(f(y)\bigr) = y. \tag{2}$$

Z právě odvozeného vztahu zároveň plyne, že oborem hodnot funkce f je celá množina $\mathbb{N}$. Můžeme tedy pro libovolné přirozené číslo z najít y, pro něž $y = f(z)$ a zároveň $f(y) = z$, takže podle vztahu ze zadání pak platí

$$f(xz) = f\big(x(f(y)\big) = yf(x) = f(z)f(x).$$

Odtud lze matematickou indukcí snadno odvodit, že pro všechna přirozená čísla n, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$f(x_1x_2\ldots x_n) = f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n). \tag{3}$$

Ukážeme, že obraz $f(p)$ libovolného prvočísla p je také prvočíslo. Předpokládejme, že $f(p) = ab$, kde a, b jsou přirozená čísla různá od jedné. Podle (2) a (3) platí

$$p = f\big(f(p)\big) = f(ab) = f(a)f(b).$$

Protože funkce f je prostá a $f(1) = 1$, platí $f(a) > 1$, $f(b) > 1$, což odporuje předpokladu, že p je prvočíslo.

Jelikož $2\,007 = 3^2 \cdot 223$ je rozklad čísla 2 007 na prvočinitele, dostaneme podle (3)

$$f(2\,007) = f^2(3)f(223),$$

kde obě čísla $f(3)$ a $f(223)$ jsou prvočísla. Jestliže $f(3) = 2$, potom podle (2) platí $f(2) = 3$ a nejmenší možná hodnota $f(223)$ je 5, takže $f(2\,007) \geqq 20$. Pokud $f(3) = 3$, nejmenší možná hodnota $f(223)$ je 2 a platí $f(2\,007) \geqq 18$. Snadno vidíme, že pro každou jinou volbu hodnot $f(3)$ a $f(223)$ platí $f(2\,007) \geqq 18$.

Ukážeme, že existuje funkce vyhovující zadání, pro kterou platí $f(2\,007) = 18$. Definujme funkci f následujícím způsobem: Pro libovolné přirozené číslo x, které zapíšeme jako $x = 2^k 223^m q$, kde k a m jsou celá nezáporná čísla a q je přirozené číslo nesoudělné s čísly 2 a 223, zadáme hodnotu $f(x)$ vztahem

$$f(2^k 223^m q) = 2^m 223^k q.$$

Pak platí $f(2\,007) = f(223 \cdot 3^2) = 2 \cdot 3^2 = 18$. Ověříme, že tato funkce f má požadovanou vlastnost. Nechť $x = 2^{k_1}223^{m_1}q_1$ a $y = 2^{k_2}223^{m_2}q_2$ jsou libovolná přirozená čísla zapsaná výše uvedeným způsobem. Potom

$$\begin{aligned} f\big(xf(y)\big) &= f\big(2^{k_1}223^{m_1}q_1 f(2^{k_2}223^{m_2}q_2)\big) = f(2^{k_1+m_2}223^{m_1+k_2}q_1q_2) = \\ &= 2^{k_2+m_1}223^{m_2+k_1}q_1q_2 \end{aligned}$$

a současně

$$yf(x) = 2^{k_2}223^{m_2}q_2 f(2^{k_1}223^{m_1}q_1) = 2^{k_2+m_1}223^{m_2+k_1}q_1q_2.$$

Závěr. Nejmenší možná hodnota čísla $f(2\,007)$ je 18.

Poznámka. Z výše uvedeného řešení vyplývá, že každá funkce f, která vyhovuje dané funkcionální rovnici, je určena nějakou bijekcí φ množiny prvočísel na sebe, která pro každé prvočíslo p splňuje rovnost $\varphi\bigl(\varphi(p)\bigr) = p$, a to předpisem

$$f(1) = 1,$$
$$f(p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_m^{k_m}) = \varphi(p_1)^{k_1}\varphi(p_2)^{k_2}\dots\varphi(p_m)^{k_m},$$

kde p_i jsou navzájem různá prvočísla a k_i nezáporná celá čísla. Každá bijekce φ uvedené vlastnosti rozkládá množinu prvočísel na sjednocení jednoprvkových a dvouprvkových navzájem disjunktních množin takových, že pro každou z nich tvaru $\{p\}$ platí $\varphi(p) = p$ a pro každou z nich tvaru $\{p_1, p_2\}$ platí $\varphi(p_1) = p_2$, $\varphi(p_2) = p_1$. Naopak každý takový rozklad určuje vyhovující bijekci φ.

A – III – 4

Ukážeme, že uvedený závěr obecně neplatí. Jako protipříklad zvolíme množinu

$$\mathsf{M} = \mathbb{N} \setminus \bigl\{a\colon a+1 \text{ je prvočíslo větší než } 2\,008\bigr\},$$

která zřejmě obsahuje všechna čísla od 1 do 2 007. Přitom aritmetická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvním členem $a_1 = n \in \mathsf{M}$ a diferencí $d = n+1$ má obecný člen tvaru

$$a_k = a_1 + (k-1)d = n + (k-1)(n+1) = (n+1)k - 1,$$

odkud plyne, že číslo $a_k + 1 = (n+1)k$ není prvočíslo pro žádný index $k > 1$, takže a_k leží v M pro každý index k (ať už $a_k \leqq 2\,007$, nebo $a_k \geqq 2\,008$). Protože prvočísel je nekonečně mnoho, je nekonečně mnoho i přirozených čísel, která ve zvolené množině M neleží.

Jiné řešení. Každá vyhovující množina M musí obsahovat všechny členy 2 007 aritmetických posloupností s prvním členem k a diferencí $k+1$, kde $k \leqq 2\,007$:

$$A_1 = (1, 3, 5, \dots),\ A_2 = (2, 5, 8, \dots),\ \dots,$$
$$A_{2\,007} = (2\,007, 4\,015, 6\,023, \dots).$$

Zřejmě množina hodnot $\mathsf{A}_k = \{k, 2k+1, 3k+2, \ldots\}$ posloupnosti A_k je pro každé k tvořena všemi přirozenými čísly tvaru $i(k+1)+k$ s celým nezáporným i.

Vysvětlíme, proč

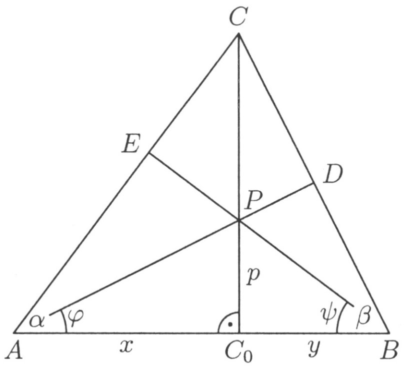
$$\mathsf{M} = \mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathsf{A}_{2\,007}$$

je nejmenší množina požadované vlastnosti. Ukážeme totiž, že pokud $n \in \mathsf{A}_k$ pro některá čísla n a k, pak $\mathsf{A}_n \subseteq \mathsf{A}_k$. Nechť tedy $n \in \mathsf{A}_k$ a $m \in \mathsf{A}_n$. Pak platí $n = i(k+1)+k$ a $m = j(n+1)+n$ pro vhodná celá nezáporná i a j, odkud $m = j(i+1)(k+1)+i(k+1)+k = (ji+j+i)(k+1)+k$, což znamená, že $m \in \mathsf{A}_k$.

Existuje však nekonečně mnoho přirozených čísel, která v sestrojené „minimální" vyhovující množině M neleží; jsou to například všechny násobky čísla $2\,008!$.

A – III – 5

Označme $\varphi = |\sphericalangle BAD|$ a $\psi = |\sphericalangle ABE|$ (obr. 28). Z rovnosti obvodových úhlů $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle ADB|$ v tětivovém čtyřúhelníku $ABDE$ tak při ob-



Obr. 28

vyklém značení úhlů v trojúhelníku ABC plyne

$$\alpha + \psi = \beta + \varphi. \tag{1}$$

Označme C_0 patu výšky z vrcholu C, v_c velikost výšky CC_0 a x, y, p velikosti příslušných úseků AC_0, BC_0, PC_0 (obr. 28), takže

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{x}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{p}{y}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{v_c}{x}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{v_c}{y}. \tag{2}$$

Pokud bod P není průsečík výšek (tj. úhel $\alpha + \psi$ není pravý), můžeme podle (1) psát

$$\operatorname{tg}(\alpha + \psi) = \operatorname{tg}(\beta + \varphi),$$

což podle známého vzorce pro tangens součtu po dosazení z (2) dává (využíváme rovnost $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\varphi$, která z (2) navíc plyne)

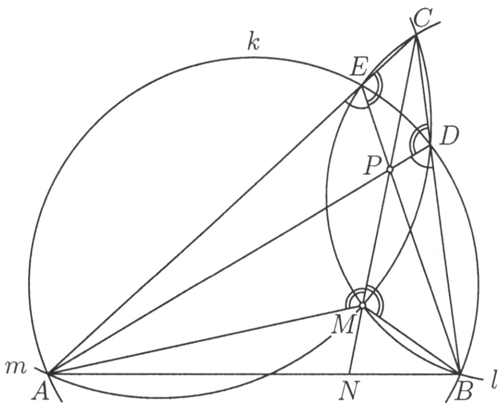
$$\frac{v_c}{x} + \frac{p}{y} = \frac{v_c}{y} + \frac{p}{x}$$

neboli

$$(p - v_c)(x - y) = 0.$$

Protože vzhledem k daným předpokladům je $p < v_c$ a $x \neq y$, nemůže poslední rovnost platit. Je tedy $\alpha + \psi = 90°$ a bod P je průsečíkem výšek, což jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Označme k kružnici opsanou tětivovému čtyřúhelníku $ABDE$ a uvažme ještě kružnice l a m opsané trojúhelníkům BEC a ADC (obr. 29). Protože tětiva BE kružnice l protíná tětivu AD kružnice m



Obr. 29

v bodě P, mají kružnice l, m kromě bodu C ještě další průsečík, který označíme M. Z uvedené konstrukce vyplývá, že bod P leží uvnitř každé ze tří uvažovaných kružnic a má k nim stejnou mocnost (je to jejich *potenční* bod), proto bod P leží uvnitř úsečky CM.

Z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou BC kružnice l plyne $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BEC| = 180° - |\sphericalangle AEB|$ a analogicky $|\sphericalangle AMC| = |\sphericalangle ADC| = 180° - |\sphericalangle ADB|$, což vzhledem k rovnosti obvodových úhlů $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle ADB|$ nad tětivou AB kružnice k znamená, že

$$|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle AMC|.$$

Označme N patu výšky z vrcholu C trojúhelníku ABC. Pokud $M \neq N$, znamená poslední rovnost, že pravoúhlé trojúhelníky BNM a ANM jsou shodné, což ovšem odporuje předpokladu $|AC| \neq |BC|$. Je proto $M = N$, $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle AMC| = 90°$ a bod P je tak průsečíkem výšek trojúhelníku ABC, což jsme chtěli dokázat.

A – III – 6

Jsou-li x, y, z tři navzájem různá reálná čísla, pak hodnoty

$$u = \frac{x-y}{y-z}, \quad v = \frac{y-z}{z-x}, \quad w = \frac{z-x}{x-y} \tag{1}$$

jsou zřejmě čísla různá od 0 a -1 a jejich součin je roven 1. Stejnou vlastnost tedy musí mít i hodnoty x, y, z z každé hledané trojice. Budeme proto neustále předpokládat, že platí vztahy

$$x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \quad x \neq y \neq z \neq x, \quad xyz = 1. \tag{2}$$

Protože daná množinová rovnice je pro uspořádané trojice (x, y, z), (z, x, y) a (y, z, x) stejná, budeme kromě (2) předpokládat, že platí $x > \max\{y, z\}$, a rozlišíme dva případy podle toho, zda $y > z$, nebo $z > y$. Zaveďme ještě označení intervalů $I_1 = (0, \infty)$, $I_2 = (-1, 0)$, $I_3 = (-\infty, -1)$.

Případ $x > y > z$. Pro zlomky (1) zřejmě platí $u \in I_1, v \in I_2$ a $w \in I_3$, takže $u > v > w$. Daná množinová rovnice proto může být splněna jedině tak, že $u = x$, $v = y$ a $w = z$. Po dosazení zlomků (1) a snadné úpravě dojdeme k rovnicím

$$xy + y = yz + z = zx + x, \quad \text{kde } x \in I_1, \ y \in I_2, \ z \in I_3. \tag{3}$$

Podle podmínky $xyz = 1$ z (2) můžeme do rovnice $xy + y = zx + x$ za člen zx dosadit $1/y$ a rovnici dále upravit:

$$xy + y = \frac{1}{y} + x \Rightarrow x(y-1) = \frac{1-y^2}{y} \Rightarrow x = -\frac{1+y}{y} \Rightarrow y = -\frac{1}{1+x}.$$

(Využili jsme toho, že s ohledem na $y \in I_2$ platí $y \neq 1$.) Z posledního vzorce plyne, že hodnota prvního výrazu v soustavě (3) je rovna -1, takže z rovnosti druhého výrazu -1 máme

$$z = -\frac{1}{1+y} = -\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+x}} = -\frac{1+x}{x},$$

pak ovšem i třetí výraz v (3) je roven -1. Proto každé řešení naší úlohy (ve zkoumaném případě, kdy $x > y > z$) je tvaru

$$(x, y, z) = \left(t, -\frac{1}{1+t}, -\frac{1+t}{t}\right), \tag{4}$$

kde $t \in I_1$ je libovolné (protože platí (3), zkouška není nutná). Z uvedeného postupu rovněž plyne, že volbou $t \in I_2$ (resp. $t \in I_3$) ve vzorci (4) dostaneme všechna řešení naší úlohy s vlastností $z > x > y$ (resp. $y > z > x$), takže při výpisu všech řešení v závěrečné odpovědi není nutné uvádět cyklické permutace trojic ze vzorce (4).

Případ $x > z > y$. Pro zlomky (1) tentokrát platí $u \in I_3$, $v \in I_1$ a $w \in I_2$, takže $v > w > u$, a daná množinová rovnice je tudíž splněna, právě když $u = y$, $v = x$ a $w = z$. Po dosazení zlomků z (1) dojdeme k soustavě

$$x - y = y(y - z), \quad y - z = x(z - x), \quad z - x = z(x - y). \tag{5}$$

Sečtením těchto tří rovnic dostaneme

$$0 = y(y - z) + x(z - x) + z(x - y) = (y - x)(x + y - 2z),$$

odkud vzhledem k $x \neq y$ plyne $z = \frac{1}{2}(x + y)$. Po dosazení zpět do (5) snadno zjistíme (opět s ohledem na $x \neq y$), že vyhovuje pouze $x = 1$, $y = -2$ a $z = -\frac{1}{2}$. Stejnou trojicí čísel je tvořeno (jediné) řešení úlohy s vlastností $y > x > z$, jakož i (jediné) řešení, pro něž $z > y > x$.

Odpověď: Řešením úlohy jsou všechny uspořádané trojice (4), kde $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, a tři trojice (x, y, z) tvaru

$$\left(1, -2, -\frac{1}{2}\right), \ \left(-\frac{1}{2}, 1, -2\right), \ \left(-2, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Poznámka. Vypíšeme-li všech šest možných soustav odpovídajících dané množinové rovnici, dostaneme kromě soustav (3) a (5) ještě soustavy

$$
\begin{aligned}
x-y&=z(y-z), & y-z&=y(z-x), & z-x&=x(x-y);\\
x-y&=x(y-z), & y-z&=z(z-x), & z-x&=y(x-y);\\
x-y&=y(y-z), & y-z&=z(z-x), & z-x&=x(x-y);\\
x-y&=z(y-z), & y-z&=x(z-x), & z-x&=y(x-y).
\end{aligned}
$$

První dvě vzniknou ze soustavy (5) cyklickou záměnou proměnných, takže je lze řešit týmž postupem jako (5). Sečtením všech tří rovnic v každé ze dvou zbývajících soustav dostaneme tutéž rovnici

$$x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx \quad \text{neboli} \quad (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0,$$

která má jediné řešení $x=y=z$, což nejsou navzájem různá čísla.

Jiné řešení. Jsou-li x, y, z tři navzájem různá reálná čísla, pak hodnoty

$$u=\frac{x-y}{y-z}, \quad v=\frac{y-z}{z-x}, \quad w=\frac{z-x}{x-y} \tag{1}$$

jsou zřejmě různé od čísel 0 a -1 a platí mezi nimi vztahy

$$v=f(u), \quad w=f(v) \quad \text{a} \quad u=f(w), \tag{2}$$

kde f je lineární lomená funkce daná předpisem $f(t)=-\dfrac{1}{1+t}$. Přesvědčíme se o tom přímým výpočtem:

$$f(u)=-\frac{1}{1+u}=-\frac{1}{1+\dfrac{x-y}{y-z}}=-\frac{y-z}{(x-y)+(y-z)}=\frac{y-z}{z-x}=v;$$

z důvodu cykličnosti platí i zbývající dva vztahy v (2).

Uvedený poznatek znamená, že každé řešení úlohy je pro vhodné $t\in \in\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$ buďto uspořádaná trojice tvaru

$$(x,y,z)=\bigl(t,f(t),f\bigl(f(t)\bigr)\bigr)=\Bigl(t,-\frac{1}{1+t},-\frac{1+t}{t}\Bigr), \tag{3}$$

nebo uspořádaná trojice tvaru

$$(x,y,z)=\bigl(t,f\bigl(f(t)\bigr),f(t)\bigr)=\Bigl(t,-\frac{1+t}{t},-\frac{1}{1+t}\Bigr). \tag{4}$$

Zbývá provést zkoušku: snadno se přesvědčíme, že zatímco trojice tvaru (3) je řešením pro každé $t\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$, trojice tvaru (4) vyhovují pouze pro $t=1$, $t=-2$ a $t=-\frac{1}{2}$ a jsou to cyklické permutace těchto tří hodnot.