Kategorie Z9

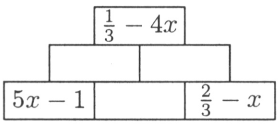
Texty úloh

Z9 – I – 1

Kolik šestimístných přirozených čísel má tu vlastnost, že součin jejich číslic je 750? *(P. Tlustý)*

Z9 – I – 2

Vyplňte správnými výrazy prázdná pole ve sčítací pyramidě na obr. 42. Ve správně vyplněné sčítací pyramidě se v každém poli (kromě těch ze spodního patra) nachází součet výrazů, které jsou napsány ve dvou polích těsně pod ním. *(S. Bednářová)*



Obr. 42

Z9 – I – 3

Do kružnice s poloměrem 2 cm je vepsán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Přímky FE a CD se protínají v bodě M. Určete délku úsečky AM. *(M. Volfová)*

Z9 – I – 4

Matematické soutěže se zúčastnilo 142 žáků. Ne každý však odevzdal třetí úlohu. Když nakonec autor soutěže zpracovával statistiku, zapsal si, že odevzdané třetí úlohy ohodnotil průměrně 3,9 bodu (zaokrouhleno na desetiny) a každý soutěžící dostal za třetí úlohu průměrně 2,7 bodu (zaokrouhleno na desetiny). Kolik žáků mohlo odevzdat třetí úlohu? Uděloval se pouze celý počet bodů, za neodevzdanou úlohu bylo 0 bodů.

(*L. Šimůnek*)

Z9 – I – 5

Trojúhelník REZ s obsahem $84\,\mathrm{cm}^2$ ($|RE| = 14\,\mathrm{cm}$, $|ZE| = 15\,\mathrm{cm}$) jsme dvěma přímými řezy rozdělili na tři části a z těch jsme složili (bez překrývání) obdélník. Jaké rozměry mohl obdélník mít? Najděte všechny možnosti. (*S. Bednářová*)

Z9 – I – 6

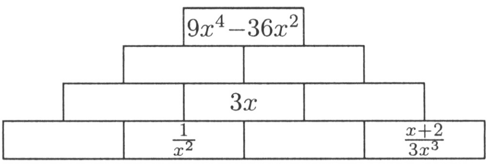
Dokažte, že číslo

$$(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2003 \cdot 2005) + (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2004 \cdot 2006)$$

je dělitelné číslem 2007^4. (*P. Tlustý*)

Z9 – II – 1

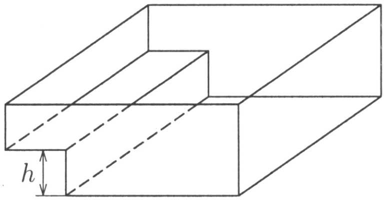
V součinové pyramidě se v každém poli (kromě těch ze spodního patra) nachází součin výrazů, které jsou napsány ve dvou polích těsně pod ním. Doplňte do prázdných polí v součinové pyramidě na obr. 43 chybějící výrazy. Snažte se psát výrazy v co nejjednodušším tvaru a uveďte, v jakém pořadí jste je doplňovali ($x \neq 0$). (*S. Bednářová*)



Obr. 43

Z9 – II – 2

Na obr. 44 vidíte bazén s dlouhým schodem při jedné jeho stěně. Prázdný bazén jsme začali napouštět přívodem s neměnným průtokem a sledovali jsme výšku hladiny. Za 8 min hladina vystoupila do výšky 20 cm a zatím



Obr. 44

ještě nebyla na úrovni schodu. Po 23 min napouštění se hladina nacházela ve výšce 55 cm a schod již byl nějakou dobu pod hladinou. Po 35,5 min napouštění byl bazén naplněn do výšky 80 cm. V jaké výšce h ode dna bazénu se nachází schod? (*L. Šimůnek*)

Z9 – II – 3

Nováková, Vaňková a Sudková vyhrály štafetu a kromě diplomů dostaly i bonboniéru, kterou hned po závodech sluply. Kdyby snědla Petra o 3 bonbóny více, snědla by jich právě tolik, co Míša s Janou dohromady. A kdyby si Jana pochutnala ještě na sedmi bonbónech, také by jich měla tolik, co druhé dvě dohromady. Ještě víme, že počet bonbónů, které snědla Vaňková, je dělitelný třemi a že Sudková si smlsla na sedmi bonbónech. Jak se děvčata jmenovala? Kolik bonbónů snědla každá z nich?

(*M. Volfová*)

Z9 – II – 4

Je dán obdélník $KLMN$, kde $|KL| = 6\,\mathrm{cm}$ a $|ML| = 4\,\mathrm{cm}$. Vypočtěte obvody všech rovnoramenných trojúhelníků KLX, jestliže bod X leží na straně MN. (*M. Dillingerová*)

Z9 – III – 1

Pavel si zvolil dvě přirozená čísla a, b ($a \geqq b$) a vypočítal rozdíl jejich druhých mocnin. Vyšlo mu 2 007. Které dvojice čísel si mohl Pavel zvolit?

(*P. Tlustý*)

Z9 – III – 2

V laboratoři na polici stojí uzavřená skleněná nádoba ve tvaru kvádru. Nachází se v ní 2,4 litru destilované vody, avšak objem nádoby je větší. Voda sahá do výšky 16 cm. Když kvádrovou nádobu postavíme na jinou její stěnu, bude hladina ve výšce 10 cm. Kdybychom ji postavili ještě na jinou stěnu, voda by sahala jen do výšky 9,6 cm. Určete rozměry nádoby.

(*L. Šimůnek*)

Z9 – III – 3

Přečtěte si výsledky ankety konané v Peci pod Sněžkou, při níž bylo osloveno 1 240 lidí:

„V existenci Krakonoše věří 46 % dotázaných (zaokrouhleno na celé číslo), 31 % v jeho existenci nevěří (zaokrouhleno na celé číslo). Ostatní dotazovaní odmítli na tuto otázku jakkoli reagovat.“

a) Kolik nejméně lidí mohlo v anketě odpovědět, že věří v existenci Krakonoše?

b) Kolik nejvíce lidí mohlo odmítnout na anketu odpovědět? Uveďte konkrétní počty, nikoli procenta. (*L. Šimůnek*)

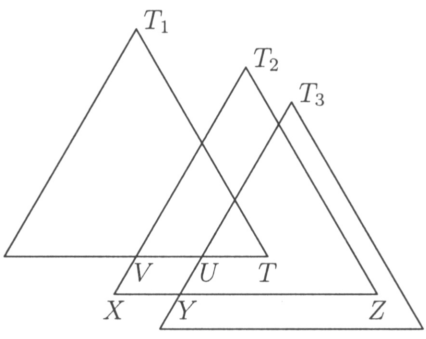
Z9 – III – 4

Na obr. 45 jsou znázorněny tři shodné, navzájem se překrývající rovnostranné trojúhelníky. Určete obsah každého z nich, když víte, že současně platí:

▷ Průnikem trojúhelníku T_1 a trojúhelníku T_2 je rovnostranný trojúhelník s obsahem $\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

▷ Průnikem trojúhelníku T_2 a trojúhelníku T_3 je rovnostranný trojúhelník s obsahem $\frac{9}{4}\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

▷ Průnikem trojúhelníku T_1 a trojúhelníku T_3 je rovnostranný trojúhelník s obsahem $\frac{1}{4}\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. (*S. Bednářová*)



Obr. 45