57. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie C

In: Karel Horák (editor); Daniel Kráľ (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 57. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2007/2008. 49. mezinárodní matematická olympiáda. 20. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2010. pp. 31–45.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405149

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Určete nejmenší přirozené číslo n, pro něž i čísla $\sqrt{2n}$, $\sqrt[3]{3n}$, $\sqrt[5]{5n}$ jsou přirozená. (*Jaroslav Švrček*)

C – I – 2

Čtyřúhelníku $ABCD$ je vepsána kružnice se středem S. Určete rozdíl $|\sphericalangle ASD| - |\sphericalangle CSD|$, jestliže $|\sphericalangle ASB| - |\sphericalangle BSC| = 40°$.

(*Jaromír Šimša*)

C – I – 3

Máme určitý počet krabiček a určitý počet kuliček. Dáme-li do každé krabičky právě jednu kuličku, zbyde nám n kuliček. Když však dáme právě n krabiček stranou, můžeme všechny kuličky rozmístit tak, aby jich v každé zbývající krabičce bylo právě n. Kolik máme krabiček a kolik kuliček? (*Vojtech Bálint*)

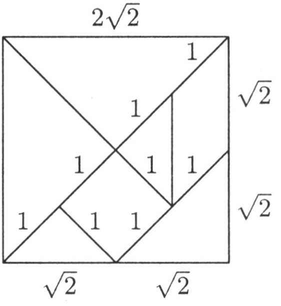
C – I – 4

Tangram je skládačka, kterou lze vyrobit z papíru rozřezáním vystřiženého čtverce na sedm dílů podle čar vyznačených na obrázku. Předpokládejme, že délka strany čtverce je $2\sqrt{2}$ cm. Rozhodněte, zda lze z dílů tangramu složit:

a) obdélník 2cm × 4cm,

b) obdélník $\sqrt{2}$cm × $4\sqrt{2}$cm.

(*Pavel Leischner*)



C – I – 5

Ve skupině n lidí ($n \geqq 4$) se někteří znají. Vztah „znát se" je vzájemný: jestliže osoba A zná osobu B, pak také B zná A a nazýváme je dvojicí známých.

a) Jestliže mezi každými čtyřmi osobami jsou aspoň čtyři dvojice známých, pak každé dvě osoby, které se neznají, mají společného známého. Dokažte.

b) Zjistěte, pro která $n \geqq 4$ existuje skupina osob, v níž jsou mezi každými čtyřmi osobami aspoň tři dvojice známých a současně se některé dvě osoby neznají ani nemají společného známého.

c) Rozhodněte, zda ve skupině šesti osob mohou být v každé čtveřici právě tři dvojice známých a právě tři dvojice neznámých.

(*Ján Mazák*)

C – I – 6

Klárka měla na papíru napsáno trojmístné číslo. Když ho správně vynásobila devíti, dostala čtyřmístné číslo, jež začínalo touž číslicí jako číslo původní, prostřední dvě číslice se rovnaly a poslední číslice byla součtem číslic původního čísla. Které čtyřmístné číslo mohla Klárka dostat?

(*Peter Novotný*)

C – S – 1

Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b větších než 1 tak, aby jejich součet i součin byly mocniny prvočísel (s kladnými celočíselnými mocniteli).

(*Ján Mazák*)

C – S – 2

V daném rovnoběžníku $ABCD$ je bod E střed strany BC a bod F leží uvnitř strany AB. Obsah trojúhelníku AFD je 15 cm^2 a obsah trojúhelníku FBE je 14 cm^2. Určete obsah čtyřúhelníku $FECD$.

(*Peter Novotný*)

C – S – 3

Ve skupině šesti lidí existuje právě 11 dvojic známých. Vztah „znát se" je vzájemný, tzn. jestliže osoba A zná osobu B, pak také B zná A. Pokud se kdokoli ze skupiny dozví nějakou zprávu, řekne ji všem svým známým. Dokažte, že se tímto způsobem zprávu dozví nakonec všichni.

(*Vojtech Bálint*)

C – II – 1

Trojúhelník ABC splňuje při obvyklém značení délek stran podmínku $a \leqq b \leqq c$. Vepsaná kružnice se dotýká stran AB, BC a AC po řadě v bodech K, L a M. Dokažte, že z úseček AK, BL a CM lze sestrojit trojúhelník, právě když platí $b + c < 3a$. (*Jaroslav Švrček*)

C – II – 2

Klárka udělala chybu při písemném násobení dvou dvojmístných čísel, a tak jí vyšlo číslo o 400 menší, než byl správný výsledek. Pro kontrolu vydělila číslo, které dostala, menším z násobených čísel. Tentokrát počítala správně a vyšel jí neúplný podíl 67 a zbytek 56. Která čísla Klárka násobila? (*Jaromír Šimša*)

C – II – 3

Dokažte, že pokud ve skupině šesti osob existuje aspoň deset dvojic známých, pak v ní lze nalézt tři osoby, které se znají navzájem. Vztah „znát se“ je vzájemný, tzn. jestliže osoba A zná osobu B, pak také B zná A. Ukažte, že taková trojice existovat nemusí, jestliže ve skupině šesti osob je méně než deset dvojic známých. (*Vojtech Bálint*)

C – II – 4

Najděte všechny trojice celých čísel x, y, z, pro něž platí

$$x + y\sqrt{3} + z\sqrt{7} = y + z\sqrt{3} + x\sqrt{7}.$$

(*Ján Mazák*)

C – I – 1

Vysvětlíme, proč prvočíselný rozklad hledaného čísla musí obsahovat jen vhodné mocniny prvočísel 2, 3 a 5. Každé případné další prvočíslo by se v rozkladu čísla n muselo vyskytovat v mocnině, jejíž mocnitel je dělitelný dvěma, třemi i pěti zároveň (viz návodnou úlohu 1). Po vyškrtnutí takového prvočísla by se číslo n zmenšilo a zkoumané odmocniny by přitom zůstaly celočíselné.

Položme proto $n = 2^a 3^b 5^c$, kde a, b, c jsou přirozená čísla. Čísla $\sqrt[3]{3n}$ a $\sqrt[5]{5n}$ jsou celá, proto je exponent a násobkem tří a pěti. Také $\sqrt{2n}$ je celé číslo, proto musí být číslo a liché. Je tedy lichým násobkem patnácti: $a \in \in \{15, 45, 75, \ldots\}$. Analogicky je mocnitel b takový násobek deseti, který při dělení třemi dává zbytek 2: $b \in \{20, 50, 80, \ldots\}$. Číslo c je pak tím násobkem šesti, který při dělení pěti dává zbytek 4: $c \in \{24, 54, 84, \ldots\}$. Z podmínky, že n je nejmenší, nakonec plyne $n = 2^{15} 3^{20} 5^{24}$.

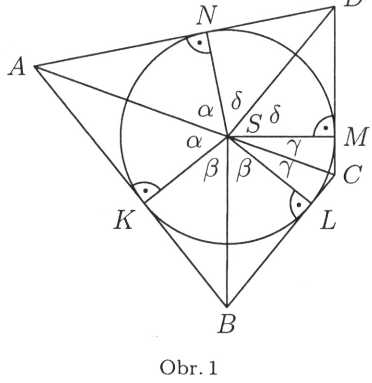
Přesvědčíme se ještě, že dané odmocniny jsou přirozená čísla:

$$\sqrt{2n} = 2^8 3^{10} 5^{12}, \quad \sqrt[3]{3n} = 2^5 3^7 5^8, \quad \sqrt[5]{5n} = 2^3 3^2 5^5.$$

Závěr: $n = 2^{15} 3^{20} 5^{24}$.

C – I – 2

Paty kolmic ze středu S vepsané kružnice ke stranám AB, BC, CD a DA označme po řadě písmeny K, L, M a N (obr. 1). Pravoúhlé troj-



Obr. 1

úhelníky ASK a ASN jsou shodné podle věty Ssu. Mají totiž společnou přeponu AS a shodné odvěsny SK a SL, jejichž délka je rovna poloměru vepsané kružnice. Ze shodnosti těchto trojúhelníků plyne jednak známé tvrzení o délkách tečen ($|AK| = |AN|$), jednak shodnost úhlů ASK a ASN, jejichž společnou velikost označíme α:

$$|\sphericalangle ASK| = |\sphericalangle ASN| = \alpha.$$

Analogicky zjistíme shodnost trojúhelníků SBK a SBL, dále pak SCL a SCM, nakonec SDM a SDN. Na základě uvedených shodností zjistíme, že lze položit

$$|\sphericalangle BSK| = |\sphericalangle BSL| = \beta, \quad |\sphericalangle CSL| = |\sphericalangle CSM| = \gamma,$$
$$|\sphericalangle DSM| = |\sphericalangle DSN| = \delta.$$

Odtud a z obr. 1 pak plyne

$$\begin{aligned}|\sphericalangle ASD| - |\sphericalangle CSD| &= (\alpha+\delta) - (\gamma+\delta) = \alpha - \gamma = \\ &= (\alpha+\beta) - (\gamma+\beta) = |\sphericalangle ASB| - |\sphericalangle BSC| = 40^\circ.\end{aligned}$$

Závěr: $|\sphericalangle ASD| - |\sphericalangle CSD| = 40^\circ$.

C – I – 3

Označíme-li x počet krabiček a y počet kuliček, vede zadání na soustavu rovnic

$$x + n = y \qquad \text{a} \qquad (x-n)\cdot n = y \tag{1}$$

s neznámými x, y a n z oboru přirozených čísel. Vyloučením neznámé y dostaneme rovnici $x + n = (x-n)\cdot n$, která nemá řešení pro $n = 1$. Pro $n \geqq 2$ dostaneme

$$x = \frac{n^2+n}{n-1} = n + 2 + \frac{2}{n-1},$$

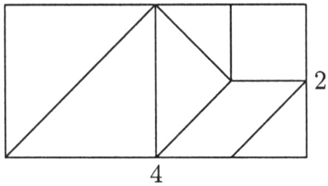
odkud vidíme, že (přirozené) číslo $n-1$ musí být dělitelem čísla 2. Tedy $n \in \{2,3\}$. Přípustné hodnoty n dosadíme do (1) a soustavu vyřešíme (lze též využít poslední vztah). Pro $n = 2$ dostaneme $x = 6$, $y = 8$ a pro $n = 3$ určíme $x = 6$ a $y = 9$.

Zkouška: Mějme šest krabiček a osm kuliček. Když do každé krabičky dáme právě jednu kuličku, zbyde $n = 2$ kuliček. Když však odebereme dvě krabičky, můžeme do zbývajících čtyř rozdělit kuličky právě po dvou. Podmínky úlohy jsou tedy splněny. Pro šest krabiček a devět kuliček provedeme zkoušku stejně snadno.

Závěr: Buď máme šest krabiček a osm kuliček, nebo šest krabiček a devět kuliček.

C – I – 4

a) Obdélník složit lze (obr. 2).



Obr. 2

b) Celková délka „iracionálních" stran všech dílů tangramu je $10\sqrt{2}$ cm. Je tedy rovna obvodu obdélníku, který máme složit.

Pro celá nezáporná čísla a, b, c, d platí, že Délku úsečky lze vyjádřit ve tvaru $a + b\sqrt{2}$ a současně ve tvaru $c + d\sqrt{2}$, právě když $a = c$ a $b = d$. Rovnost $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ je totiž ekvivalentní se vztahem $a - c = (d - b)\sqrt{2}$, jehož levá strana je celé číslo, zatímco pravá strana je pro $d \neq b$ iracionální. Rovnost nastává, jen když platí $a = c$ a $b = d$.

Vidíme tedy, že všechny „iracionální" strany dílů tangramu musejí být umístěny na hranici skládaného obdélníku. To však není možné, neboť protilehlé „iracionální" strany kosodélníkového dílu mají vzdálenost menší než 1 cm, kdežto nejmenší vzdálenost protilehlých stran obdélníku je $\sqrt{2}$ cm.

Závěr: Obdélník 2 cm × 4 cm lze z tangramu složit, ale obdélník $\sqrt{2}$ cm × $4\sqrt{2}$ cm složit nelze.

C – I – 5

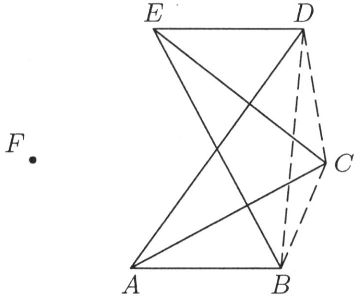
a) Označme A, B dvě osoby, jež se neznají, a přidejme k nim libovolné další dvě osoby X a Y. Kdyby ani osoba X, ani osoba Y nebyla společným známým osob A a B, měli bychom ze všech šesti dvojic ve čtveřici $ABXY$ aspoň tři dvojice neznámých: dvojici AB, dvojici AX nebo BX a dvojici

AY nebo BY. Dvojice známých ve čtveřici $ABXY$ by tak byly nejvýše tři, což odporuje předpokladu ze zadání části a). Tím je část a) dokázána.

b) Skupina požadovaných vlastností existuje pro všechna $n \geqq 4$. Jako příklad stačí zvolit skupinu, v níž se osoba A nezná s nikým a ostatní se znají navzájem. Pak existuje dokonce $n-1$ dvojic osob, které se ani neznají, ani nemají společného známého, a mezi každými čtyřmi osobami jsou aspoň tři dvojice známých.

c) Budeme předpokládat, že šestice osob s popsanou vlastností existuje. Využijeme grafických znázornění, v nichž osoby zakreslíme jako body. Plnou (resp. čárkovanou) úsečkou, kterou některé dva z těchto bodů spojíme, vyznačíme dvojici známých (resp. dvojici neznámých).

Z každého bodu grafického znázornění skupiny šesti osob vychází právě pět úseček. Podle Dirichletova principu jsou proto aspoň tři úsečky, jež vycházejí z téhož bodu, stejného typu (jsou buď čárkované, nebo plné). Označme body A, B, C, D, E a F tak, aby byly téhož typu úsečky AB, AC a AD, a předpokládejme nejprve, že označují dvojice známých. Ve čtveřici $ABCD$ jsou však podle předpokladu právě tři dvojice neznámých, a proto je trojúhelník BCD v grafickém znázornění zakreslen čárkovaně. Ve čtveřici $BCDE$ pak úsečky EB, EC, ED nutně představují dvojice známých (obr. 3). Odtud plyne, že ve čtveřici $ABDE$ jsou aspoň čtyři dvojice známých, které na obr. 3 znázorňují úsečky AB, AD, EB a ED, což odporuje našemu předpokladu. Případ, kdy úsečky AB, AC a AD představují dvojice neznámých, vede ke sporu analogicky (v předchozích úvahách stačí zaměnit vztahy *znát se* a *neznat se* a samozřejmě i čárkované a nečárkované úsečky).



Obr. 3

Závěr části c): Neexistuje skupina šesti osob, která má v každé své čtveřici právě tři dvojice známých a právě tři dvojice neznámých.

C – I – 6

Hledejme původní číslo $x = 100a + 10b + c$, jehož číslice jsou a, b, c. Číslici, která se vyskytuje na prostředních dvou místech výsledného součinu, označme d. Ze zadání plyne:

$$9(100a + 10b + c) = 1\,000a + 100d + 10d + (a + b + c), \qquad (1)$$

přičemž výraz v poslední závorce představuje číslici shodnou s poslední číslicí součinu $9c$. To ovšem znamená, že nemůže být $c \geqq 5$: pro takové c totiž končí číslo $9c$ číslicí nepřevyšující 5, a protože $a \neq 0$, platí naopak $a + b + c > c \geqq 5$.

Také zřejmě je $c \neq 0$ (v opačném případě by platilo $a = b = c = x = 0$). Ostatní možnosti vyšetříme sestavením následující tabulky.

c	$9c$	$a+b+c$	$a+b$
1	9	9	8
2	18	8	6
3	27	7	4
4	36	6	2

Tabulka 1

Rovnost (1) lze přepsat na tvar

$$100(b - a - d) = 10d + a + 11b - 8c. \qquad (2)$$

Hodnota pravé strany je aspoň -72 a menší než 200, neboť každé z čísel a, b, c, d je nejvýše rovno devíti. Je tedy buď $b - a - d = 0$, nebo $b - a - d = 1$.

V prvním případě po substituci $d = b - a$ upravíme vztah (2) na tvar $8c = 3(7b - 3a)$, z nějž vidíme, že c je násobkem tří. Z tabulky 1 pak plyne $c = 3$, $a = 4 - b$, což po dosazení do rovnice $8c = 3(7b - 3a)$ vede k řešení $a = b = 2$, $c = 3$. Původní číslo je tedy $x = 223$ a jeho devítinásobek $9x = 2\,007$.

Ve druhém případě dosadíme $d = b - a - 1$ do (2) a zjistíme, že $8c + 110 = 3(7b - 3a)$. Výraz $8c + 110$ je tudíž dělitelný třemi, proto číslo c dává při dělení třemi zbytek 2. Dosazením jediných možných hodnot $c = 2$ a $b = 6 - a$ do poslední rovnice zjistíme, že $a = 0$, což odporuje tomu, že číslo $x = 100a + 10b + c$ je trojmístné.

Závěr: Klárka obdržela čtyřmístné číslo 2 007.

Poznámka. Tabulka 1 nabízí jednodušší, ale numericky pracnější postup přímého dosazování všech přípustných hodnot čísel a, b, c do rovnice (1). Počet všech možností lze omezit na deset odhadem $b \geqq a$, který zjistíme pomocí vhodné úpravy vztahu (1) — například na tvar (2). Řešení uvádíme v tabulce 2.

a	1	2	3	4	1	2	3	1	2	1
b	7	6	5	4	5	4	3	3	2	1
c	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4
$9x$	1 539	2 349	3 159	3 969	1 368	2 178	2 988	1 197	2 007	1 026

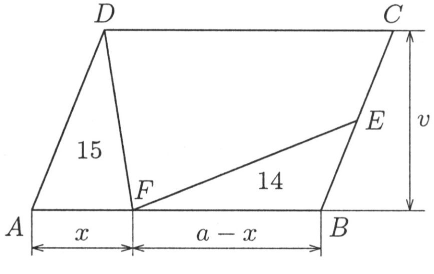
Tabulka 2

C – S – 1

Z podmínky pro součin plyne, že a i b jsou mocninami téhož prvočísla p: $a = p^r$, $b = p^s$, kde r, s jsou celá kladná čísla. Kdyby bylo p liché, byl by součet $a + b$ dělitelný kromě čísla p i číslem 2, takže by nebyl mocninou prvočísla. Je-li $p = 2$ a $r < s$, je součet $a + b = 2^r(1 + 2^{s-r})$ opět číslo sudé dělitelné lichým číslem větším než 1, není tudíž mocninou prvočísla. Analogicky dojdeme ke stejnému závěru i v případě, kdy $r > s$. Zbývá proto jediná možnost: $a = b = 2^r$, kde r je celé kladné číslo. Zkouška $a + b = 2^r + 2^r = 2^{r+1}$ a $ab = 2^{2r}$ potvrzuje, že řešením jsou všechny dvojice $(a, b) = (2^r, 2^r)$, kde r je celé kladné číslo.

C – S – 2

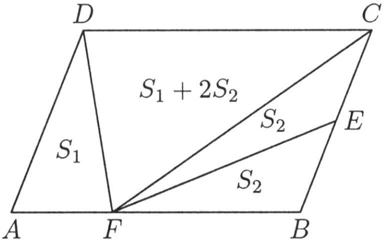
Označme v vzdálenost bodu C od přímky AB, $a = |AB|$ a $x = |AF|$. Pro obsahy trojúhelníků AFD a FBE (obr. 4) platí: $S_{AFD} = \frac{1}{2}x \cdot v = 15$, $S_{FBE} = \frac{1}{2}(a - x) \cdot \frac{1}{2}v = 14$. Odtud $xv = 30$, $av - xv = 56$.



Obr. 4

Sečtením obou rovnic nalezneme obsah rovnoběžníku $ABCD$: $S_{ABCD} = av = 86\,\mathrm{cm}^2$. Obsah čtyřúhelníku $FECD$ je tedy $S_{FECD} = S_{ABCD} - (S_{AFD} + S_{FBE}) = 57\,\mathrm{cm}^2$.

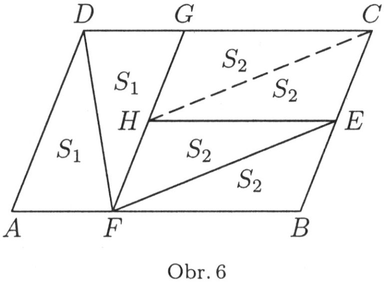
Jiné řešení. Trojúhelníky BEF a ECF mají stejnou výšku z vrcholu F a shodné základny BE a EC. Proto jsou obsahy obou trojúhelníků stejné. Z obr. 5 vidíme, že obsah trojúhelníku CDF je polovinou



Obr. 5

obsahu rovnoběžníku $ABCD$ (oba útvary mají společnou základnu CD a stejnou výšku), druhou polovinu tvoří součet obsahů trojúhelníků AFD a BCF. Odtud $S_{FECD} = S_{ECF} + S_{CDF} = S_{ECF} + (S_{AFD} + S_{BCF}) = S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57\,\mathrm{cm}^2$.

Jiné řešení. Do rovnoběžníku přikreslíme úsečky FG a EH rovnoběžné se stranami BC a AB tak, jak znázorňuje obr. 6. Rovnoběžníky



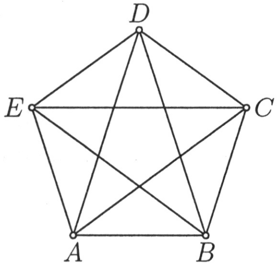
Obr. 6

$AFGD$ a $FBEH$ jsou svými úhlopříčkami DF a EF rozděleny na dvojice shodných trojúhelníků. Je tedy $S_{GDF} = S_{AFD} = 15\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{HFE} = S_{BEF} = 14\,\mathrm{cm}^2$. Ze shodnosti rovnoběžníků $HECG$ a $FBEH$ navíc snadno nahlédneme, že všechny čtyři trojúhelníky FBE, EHF, HEC a CGH jsou shodné, takže obsah čtyřúhelníku $FECD$ je $S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57\,\mathrm{cm}^2$.

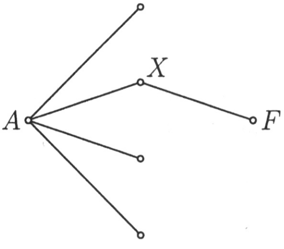
C – S – 3

Jednotlivé osoby označíme písmeny A, B, C, D, E a F. Aspoň jedna z nich (označme ji A) má aspoň čtyři známé (pokud by měla každá osoba nejvýše tři známé, bylo by známých dvojic méně než deset). Kdyby měla dokonce pět známých, dozví se zprávu od každého ve skupině a může ji komukoli ve skupině sdělit.

Pokud má osoba A právě čtyři známé, například osoby B, C, D a E, existuje ve skupině osob A, B, C, D, E nejvýše 10 známostí (obr. 7, dvojice známých znázorňují úsečky), a tak se osoba F musí znát s některou osobou $X \in \{B, C, D, E\}$. Možnost šíření zprávy od libovolné osoby ke kterékoli jiné snadno ověříme podle obr. 8.

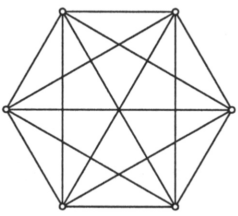


Obr. 7



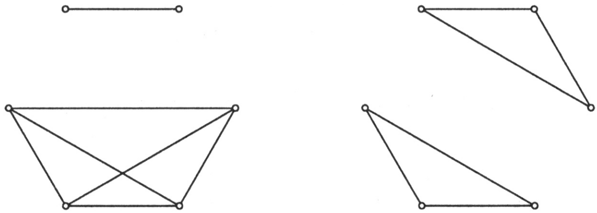
Obr. 8

Jiné řešení. Znázornění kterékoli množiny právě jedenácti dvojic známých ve skupině šesti osob obdržíme odstraněním čtyř z patnácti hran úplného grafu (obr. 9, v něm z každého uzlu vychází právě pět hran). Po odstranění pouze čtyř hran z grafu na obr. 9 musí tedy z každého vrcholu vycházet aspoň jedna hrana. Ve skupině tedy neexistuje člověk, který by



Obr. 9

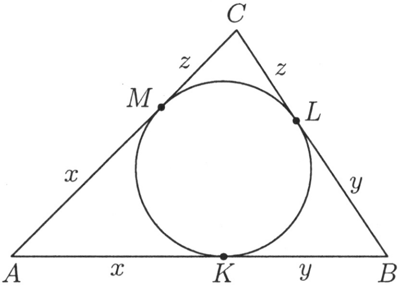
nikoho neznal. Aby se proto zpráva nemohla od některé z osob rozšířit ke všem ostatním, musela by v příslušném grafu existovat buď aspoň jedna oddělená dvojice, nebo dvě oddělené trojice, v nichž se osoby znají navzájem. V žádné z těchto situací však počet dvojic známých nepřevyšuje sedm, jak vidíme z obr. 10. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.



Obr. 10

C – II – 1

Označme $x = |AK| = |AM|$, $y = |BL| = |BK|$, $z = |CM| = |CL|$ (obr. 11) shodné úseky tečen z jednotlivých vrcholů trojúhelníku k vepsané kružnici. Zřejmě platí:



Obr. 11

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y. \tag{1}$$

Z uvedených rovností vidíme, že daná podmínka

$$b + c < 3a \tag{2}$$

je ekvivalentní nerovnosti

$$x < y + z, \tag{3}$$

což je nutná podmínka existence trojúhelníku se stranami délek x, y a z.

Dosazením z (1) do podmínek $b \leqq c$ a $a \leqq b$ zjistíme, že $z \leqq y$ a $y \leqq x$. To znamená, že další dvě trojúhelníkové nerovnosti $y < z+x$ a $z < x+y$ jsou automaticky splněny, takže nerovnost (3), a tím i (2) je podmínkou postačující. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

C – II – 2

Označme x menší a y větší z násobených čísel. Podle zadání platí $xy - 400 = 67x + 56$, neboli

$$x(y-67) = 456. \qquad (1)$$

Číslo x je tedy dvojmístný dělitel čísla $456 = 2^3 \cdot 3 \cdot 19$. Ze zadání navíc plyne, že číslo x je větší než příslušný zbytek 56. Nejmenší takové x je $x = 3 \cdot 19 = 57$. Pro každý další takový dělitel platí $x \geqq 4 \cdot 19 = 76$ a $y - 67 \leqq 2 \cdot 3 = 6$, takže $y \leqq 73 < x$, což odporuje zvolenému označení $x < y$. Je tedy $x = 57$ a $y = 75$. Snadno ověříme, že tato čísla vyhovují zadání úlohy.

Závěr. Klárka násobila čísla 57 a 75.

C – II – 3

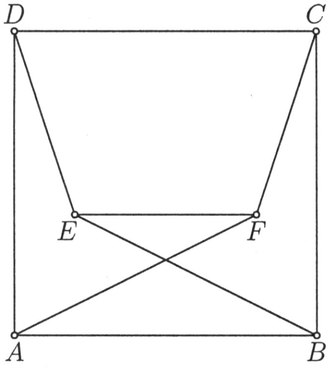
Nazvěme A osobu (případně jednu z osob), která má v dané skupině nejvíce známých, a tento počet známých označme n. Zřejmě je $n \leqq 5$.

Je-li $n = 5$, existuje mezi zbývajícími osobami aspoň pět dalších dvojic známých. Kterákoliv z těchto dvojic pak tvoří s osobou A trojici známých.

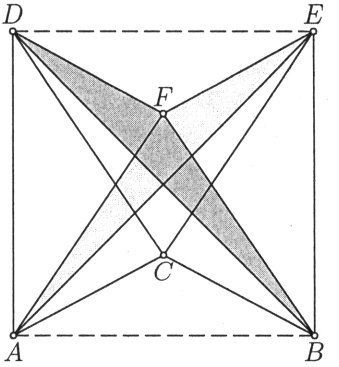
Je-li $n = 4$, existuje osoba B, která se s A nezná, a ta má rovněž nejvýše čtyři známé. Proto se mezi známými osoby A vyskytují aspoň dvě dvojice známých. Osoba A s jednou z těchto dvojic tvoří opět trojici známých.

Situace $n \leqq 3$ nemůže nastat, protože celkový počet dvojic známých ve skupině je pak nejvýše $\frac{1}{2} \cdot 6n \leqq 9$.

Příklad skupiny šesti osob s devíti dvojicemi, ale s žádnou trojicí známých je znázorněn grafem na obr. 12. V něm body A, B, C, D, E a F představují jednotlivé osoby a dvojice známých jsou vyznačeny úsečkami. Přitom žádné tři z úseček netvoří trojúhelník. Pokud je ve skupině méně než devět dvojic známých, sestrojíme vhodný příklad odstraněním příslušného počtu úseček z obr. 12 (přitom určitě žádný trojúhelník nevznikne).



Obr. 12



Obr. 13

Jiné řešení. Je-li v šestici osob aspoň 10 dvojic známých, je v ní nejvýše 5 dvojic neznámých, neboť všech dvojic je právě 15. Budeme proto naopak předpokládat, že se v každé trojici najde dvojice neznámých, a dokážeme, že v celé šestici je takových dvojic alespoň 6. Za uvedeného předpokladu můžeme označení osob zvolit tak, aby v trojicích ABC a DEF byly dvojice neznámých AB a DE. Pak další čtyři různé dvojice neznámých najdeme (po jedné) v trojicích ACD, AEF, BCE, BDF (každá dvojice se vyskytuje nejvýše v jedné z uvedených čtyř trojic a žádná z těchto trojic neobsahuje ani dvojici AB, ani dvojici DE; jinými slovy (obr. 13) libovolné dva z uvedených trojúhelníků mají společný nejvýše jeden vrchol, tedy žádnou stranu).

Příklad pro menší počet dvojic známých sestrojíme stejně jako v předchozím řešení.

C – II – 4

Rovnici přepíšeme na tvar

$$x - y = (z - y)\sqrt{3} + (x - z)\sqrt{7}$$

a umocníme. Po jednoduché úpravě dostaneme

$$(x - y)^2 - 3(z - y)^2 - 7(x - z)^2 = 2(x - z)(z - y)\sqrt{21}. \qquad (1)$$

Pro $x \neq z$ a $y \neq z$ nemůže rovnost (1) platit, protože její pravá strana je v takovém případě číslo iracionální, kdežto levá je číslo celé. Rovnost tedy může nastat, jen když $x = z$ nebo $y = z$.

V prvním případě po dosazení $x = z$ do původní rovnice dostaneme $z - y = \sqrt{3}(z - y)$. Odtud $z = y = x$.

Ve druhém případě, kdy $y = z$, dojdeme analogicky k témuž výsledku.

Závěr. Řešením dané rovnice jsou všechny trojice $(x, y, z) = (k, k, k)$, kde k je libovolné celé číslo.