

57. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie Z9

In: Karel Horák (editor); Daniel Král' (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 57. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2007/2008. 49. mezinárodní matematická olympiáda. 20. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2010. pp. 126–129.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405157>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Kategorie Z9

Texty úloh

Z9 – I – 1

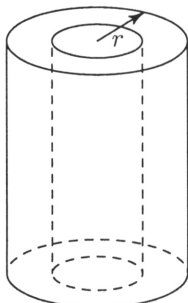
Najděte všechna čtyřmístná čísla končící číslicí 9, která jsou dělitelná každou svou číslicí. *(Pavel Thustý)*

Z9 – I – 2

Petr se ptal babičky, kolik je dědečkovi let. Babička mu odpověděla takto: „To víš, už dávno nám není padesát, ale zase nám ještě není osmdesát let. Když vynásobíš součet mého a dědečkova věku jejich rozdílem a k výsledku přičteš oba naše věky, dostaneš 492.“ „Aha,“ řekl po chvíli Petr, „tak to je dědečkovi...“ Kolik let je Petrovu dědečkovi, víte-li, že je starší než Petrova babička? *(Michaela Raabová)*

Z9 – I – 3

Středem rotačního válce s podstavou o poloměru r a výškou v byl vyvrtán válcový otvor. Objem takto vzniklého „dutého válce“ je poloviční než objem válce původního. Vyjádřete tloušťku stěny dutého válce pomocí r . *(Marie Krejčová)*



Z9 – I – 4

Minulou divadelní sezónu se prodávaly vstupenky za jednotnou cenu 160 Kč. Pro letošní sezónu se sedadla rozdělila do dvou kategorií. Místa I. kategorie stojí 180 Kč, místa II. kategorie 155 Kč. Pokud jsou všechna sedadla v sále rozprodána, je celková tržba stejná jako při vyprodaném představení loni. Ředitel divadla však není s tímto rozdělením spokojen, a pro příští sezónu plánuje změnu: z nejméně atraktivních míst současně II. kategorie vytvoří novou III. kategorii. Aby se tržba za vyprodaný sál nezměnila, rozhodl, že vstupenky budou stát 180 Kč (I. kategorie), 160 Kč (II. kategorie) a 130 Kč (III. kategorie). V jakém poměru budou příští sezónu počty sedadel jednotlivých kategorií? *(Libor Šimůnek)*

Z9 – I – 5

Jirka koupil dvě čokolády v obchodě naproti škole. Michal si koupil stejné dvě čokolády v obchodě za školou a Ivan si koupil jednu takovou čokoládu, ale ve školním bufetu. Cena zakoupených čokolád je o 6 Kč vyšší, než kdyby chlapeč nakoupili všech 5 čokolád v obchodě naproti škole, a je o 6,50 Kč nižší, než kdyby nakupovali jen v obchodě za školou. Ve školním bufetu prodávají čokoládu za 19,50 Kč. Kolik zaplatili kluci za všech pět čokolád dohromady? Kolik stojí jedna čokoláda v obchodě za školou? *(Monika Dillingerová)*

Z9 – I – 6

V rovině je dán čtyřúhelník $ABCD$. Sestrojte bod K , který je vrcholem rovnoběžníku $BCDK$, a bod L , který je vrcholem rovnoběžníku $CDAL$. Ukažte, že přímka KL prochází středem strany AB daného čtyřúhelníku $ABCD$. *(Jaroslav Švrček)*

Z9 – II – 1

Bára si napsala dvě různá celá čísla. Potom je (ve stejném pořadí) sečetla, odečetla, vynásobila a vydělila. Dostala čtyři výsledky, jejichž součet byl -100 . Když vynechala výsledek sčítání a sečetla zbývající tři výsledky, dostala také součet -100 . Jaká čísla mohla Bára původně napsat? *(Šárka Černíčková)*

Z9 – II – 2

Z krychliček o hraně 1 cm jsme postavili kvádr. Kdybychom z kvádru odebrali jeden sloupec, zbytek stavby by se skládal z 602 krychliček. Pokud bychom místo toho odebrali jeden řádek horní vrstvy, zůstala by nám stavba z 605 krychliček. Jaké má kvádr rozměry? (*Libor Šimůnek*)

Z9 – II – 3

Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky a a úsečka KL délky $5a$ tak, že $A \equiv K$ a strana AB leží na úsečce KL . Čtverec $ABCD$ se „kutálením“ (otáčením kolem pravého dolního rohu čtverce o 90°) pohybuje po úsečce KL tak dlouho, než strana AB opět splyne s částí úsečky KL ($B \equiv L$).

a) Narýsujte, jak se bude pohybovat bod S , který je středem strany AB .
b) Určete délku křivky, kterou bod S při pohybu opsal.

(*Marta Volfová*)

Z9 – II – 4

Severských závodů psích spřežení se zúčastnilo dohromady celkem 315 dvojspreží a trojspreží. Do cíle dorazilo ve stanoveném limitu 60 % všech dvojspreží a $\frac{1}{3}$ všech trojspreží, takže do cíle dorazila včas přesně polovina všech psů. Kolik dvojspreží a kolik trojspreží závodilo?

(*Lubomír Černíček*)

Z9 – III – 1

Ve Lhotě volili starostu. Kandidovali dva občané: Ing. Schopný a jeho manželka Dr. Schopná. V obci byly tři volební místnosti. V první i druhé místnosti dostala více hlasů Dr. Schopná. V první byl poměr hlasů 7 : 5, ve druhé 5 : 3. Ve třetí volební místnosti byl poměr hlasů 3 : 7 ve prospěch Ing. Schopného. Volby nakonec skončily nerozhodně, oba kandidáti totiž získali stejný počet hlasů. V jakém poměru byly počty odevzdaných platných hlasovacích lístků v jednotlivých volebních místnostech, víme-li, že v první a druhé místnosti odevzdal platný hlas stejný počet lidí?

(*Libor Šimůnek*)

Z9 – III – 2

Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), kde $|AB| > |CD|$. Bodem A se dají vést dvě přímky tak, aby rozdělily lichoběžník na tři

rovnoramenné trojúhelníky. Určete velikosti úhlů lichoběžníku $ABCD$.
(*Libuše Hozová*)

Z9 – III – 3

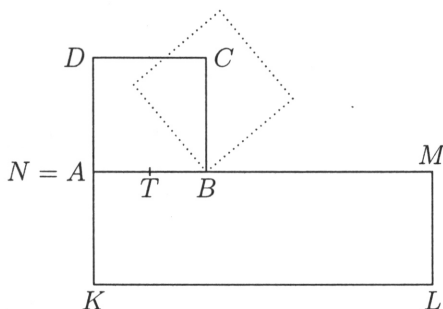
Najděte všechna kladná celá čísla x, y , pro která platí:

$$1 + x + y + xy = 2008.$$

(*Libuše Hozová*)

Z9 – III – 4

Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky a a obdélník $KLMN$ o stranách délek $|KL| = 3a$ a $|LM| = a$. Na počátku je čtverec $ABCD$ umístěn tak, že $A = N$ a strana AB leží na straně NM . Čtverec $ABCD$ se otáčením kolem svých vrcholů pohybuje jedním směrem po obvodu obdélníku $KLMN$ (obr. 40) tak dlouho, než se opět dostane do původní polohy.



Obr. 40

- Narýsujte dráhu, po níž se bude pohybovat bod T , který je středem strany AB .
- Určete obsah plochy ohraničené křivkou, kterou opisuje bod T .

(*Monika Dillingerová*)