Přípravné soustředění před 49. MMO

Výběrové soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu proběhlo od 7.–11. dubna 2008 v Kostelci nad Černými lesy. Na soustředění bylo pozváno 11 nejlepších řešitelů III. kola. Soustředění bylo zaměřeno na přípravu reprezentantů a posloužilo ke konečné nominaci šestičlenného družstva.

Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Josef Tkadlec	7/8	GJK Praha 6, Parléřova	90,5
Miroslav Klimoš	3/4	GMK Bílovec, 17. listopadu	77
Samuel Říha	3/4	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	68
David Klaška	2/4	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	63,5
Tomáš Hřebejk	8/8	G Praha 4, Písnická	58
Jakub Töpfer	7/8	GJK Praha 6, Parléřova	56
Jan Matějka	7/8	G České Budějovice, Jírovcova	53,5
Alena Skálová	6/6	G Praha 4, Na Vítězné Pláni	51,5
Alena Peterová	8/8	G Dobruška	50,5
Van Nhan Nguyen	7/8	G Praha 6, Nad Alejí	43
Van Minh Nguyen	5/6	G Tachov	38

Na základě uvedených výsledků, v nichž jsou započítány i výsledky oblastního a celostátního kola, bylo tedy vybráno reprezentační družstvo. Z první šestice se omluvil David Klaška, takže ho nahradil sedmý Jan Matějka a náhradnicí se tak stala osmá Alena Skálová. Toto družstvo nás reprezentovalo i na již tradičním střetnutí s družstvy Slovenska a Polska.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:
dr. *Jaroslav Zhouf* (7. 4.),
dr. *Karel Horák* (8. 4.),
dr. *Martin Panák* (9. 4.),
dr. *Jaroslav Švrček* (10. 4.)
a doc. *Jaromír Šimša* (11. 4.).

Úlohy zadané na přípravném soustředění

1. Adam a Borek hrají hru na neohraničeném čtverečkovaném papíru. Adam vždy vyznačí čtverec 2×2 nebo 3×3 a Borek v něm začerní jeden čtvereček. Zakreslované čtverce se mohou překrývat, ale nesmějí to být ty samé, které již jednou byly vyznačeny, a také začerňovaný čtvereček musí být pokaždé jiný. Borek vyhraje, jestliže se mu podaří udělat aspoň 20 tahů, jinak vyhrává Adam. Kdo vyhraje při bezchybné hře?

2. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Bod P leží na oblouku AVB, kde V je průsečík výšek trojúhelníku ABC. Přímky AP, BP protnou strany BC, AC postupně v bodech Q, R. Najděte množinu středů úseček QR.

3. Je dáno přirozené číslo $n > 6$. Uvažujme všechna přirozená čísla z otevřeného intervalu $(n(n-1); n^2)$, která jsou nesoudělná s číslem $n(n-1)$. Dokažte, že největší společný dělitel všech těchto čísel je 1.

4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geqq 1$ a libovolná kladná reálná čísla $x_1, x_2, ..., x_n$ platí nerovnost

$$(1+x_1)(1+x_1+x_2)...(1+x_1+x_2+...+x_n) \geqq \sqrt{(n+1)^{n+1}}\sqrt{x_1 x_2 ... x_n}.$$

5. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2, jež se protínají v bodech A a B. Označme PQ a RS úseky jejich společných tečen (body P, R leží na k_1, body Q, S na k_2) a W další průsečík kružnice k_2 s polopřímkou RB. Určete poměr $|RB|/|BW|$, jestliže $RB \parallel PQ$.

6. Označme postupně A_1, B_1, C_1 body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC se stranami BC, CA, AB. Další průsečík úsečky AA_1 s vepsanou kružnicí označme Q. Průsečíky přímek A_1C_1 a A_1B_1 s přímkou p procházející vrcholem A rovnoběžně s BC označme P a R. Dokažte, že úhly PQR a B_1QC_1 mají stejnou velikost.

7. Ve čtverci 300×300 je n čtverečků začerněno tak, že žádné tři černé čtverečky netvoří „roh" (trojici sousedních čtverečků uspořádaných do tvaru L), a přitom začerněním libovolného bílého čtverečku už nějaký černý roh vznikne. Najděte nejmenší možné n.

8. V trojúhelníku ABC označme A_0, B_0 průsečíky příslušných os vnitřních úhlů při vrcholech A a B s kružnicí trojúhelníku opsanou a A_1, B_1 průsečíky obou os s odpovídajícími stranami BC a CA. Průsečík přímek A_0B_0 a A_1B_1 označme P. Dokažte, že spojnice bodu P se středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC je rovnoběžná se stranou AB.

9. Máme rovnoramenné váhy a sadu $n+1$ závaží, jejichž hmotnosti v uncích jsou celá kladná čísla a jejichž úhrnná hmotnost je $2n$ uncí. Závaží po jednom umísťujeme od nejtěžšího po nejlehčí na váhy tak, že je položíme vždy na tu misku, na které jsou závaží o menší celkové hmotnosti. Pokud v některém kroku (třeba na počátku) jsou váhy v rovnováze, vybereme misku libovolně. Dokažte, že po umístění všech závaží budou váhy v rovnováze.

10. Nechť x, y, z jsou nezáporná reálná čísla splňující rovnost $x + y + z + xyz = 4$. Dokažte, že

$$x + y + z \geqq xy + yz + zx.$$

11. Jsou dány dvě různoběžky p a q protínající se v bodě P. Pro libovolný bod O na p (mimo bod P) uvažme kružnici k_1 se středem O, která se dotýká přímky q, a dále kružnici k_2, která se dotýká přímek p, q i kružnice k_1. Nalezněte množinu všech bodů dotyku takových kružnic k_1 a k_2.

12. Uvažujme trojúhelník ABC, v němž (při obvyklém označení velikostí vnitřních úhlů) je $\beta > \gamma$. Označme E střed kružnice připsané straně BC uvažovaného trojúhelníku. Nechť M a N jsou po řadě takové body stran AB a AC, že EM je osou úhlu AEB a N osou úhlu AEC. Dokažte větu: Protínají-li se přímky MN a BC v bodě L, pak platí

$$|\sphericalangle BEL| + |\sphericalangle CEL| = 180^\circ.$$

13. Jsou dána dvě celá čísla m, n taková, že $0 \leqq m \leqq 2n$. Dokažte, že číslo

$$2^{2n+2} + 2^{m+2} + 1$$

je druhou mocninou nějakého přirozeného čísla, právě když $m = n$.

14. V rovině je dán trojúhelník ABC, v němž $|AB| < |BC|$. Uvažujme takový bod D jeho strany AC, pro který platí $|AB| = |BD|$. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran AB a AC po řadě v bodech K a L. Označme J střed kružnice vepsané trojúhelníku BCD. Dokažte, že přímka KL prochází středem úsečky AJ.

15. Pro každé přirozené n určete všechny mnohočleny tvaru

$$n!\,x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + (-1)^n(n+1)n$$

s celočíselnými koeficienty $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, které mají n různých reálných kořenů $x_1, x_2, \ldots, x_n$ splňujících nerovnosti $k \leqq x_k \leqq k+1$ pro všechna $k = 1, 2, \ldots, n$.

16. Daný trojúhelník $A_1A_2A_3$ není pravoúhlý a kružnice $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$ mají následující vlastnosti:

(i) $A_2, A_3 \in k_1$, $A_1, A_3 \in k_2$, $A_1, A_2 \in k_3$,

(ii) kružnice k_3 má vnitřní dotyk s každou z kružnic k_1, k_2, které samy mají vnější dotyk.

Za předpokladu, že trojúhelníky $A_1A_2A_3$ a $O_1O_2O_3$ jsou podobné (pořadí odpovídajících si vrcholů není známo), vypočtěte jejich vnitřní úhly a zapište je ve stupních.

17. Vypište vzorcem alespoň 398 dvojic trojmístných celých kladných čísel a, b, pro něž je součet $\sqrt{a^2 - 2\,008b} + \sqrt{b^2 + 2\,008a}$ celočíselný.

18. Pro daná celá m, n větší než 1 uvažujme šestiúhelník $ABCDEF$ s vrcholy $A[0,0]$, $B[m,0]$, $C[m,n]$, $D[m-1,n]$, $E[m-1,1]$, $F[0,1]$ rozdělený na $m+n-1$ jednotkových čtverců s vrcholy v mřížových bodech. Najděte počet cest z A do C po hranicích zmíněných čtverců, které každým bodem procházejí nejvýše jedenkrát. (Výsledek musí být uveden v nejjednodušším tvaru.)