O průběhu 58. ročníku matematické olympiády

Padesátý osmý ročník matematické olympiády se uskutečnil v České republice ve školním roce 2008/09. Hlavním pořadatelem soutěže bylo (stejně jako v předchozích letech) Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, dále Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd ČR. Průběh soutěže zajišťovala stejně jako v předchozích ročnících soutěže Ústřední komise MO (ÚK MO), které předsedal doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., s místopředsedy RNDr. *Jaroslavem Švrčkem*, CSc. (pro kategorie A, B, C), RNDr. *Vojtěchem Žádníkem*, Ph.D. (pro kategorie Z9–Z5) a doc. RNDr. *Pavlem Töpferem*, CSc. (pro kategorii P). Tajemníkem ÚK MO byl RNDr. *Karel Horák*, CSc.

Přípravou a výběrem úloh pro jednotlivé kategorie a soutěžní kola byly pověřeny Ústřední komisí MO dvě úlohové komise (jedna pro kategorie A, B, C a druhá pro kategorie Z). Obě komise se sešly na svých pracovních seminářích dvakrát ročně (v listopadu 2008 a v květnu 2009). Ve spolupráci se slovenskými kolegy zabezpečují obě komise s více než ročním předstihem výběr úloh pro další ročník MO v České republice i na Slovensku. Garanty výběru úloh pro tento ročník soutěže byli Peter Novotný (kategorie A), Pavel Calábek (kategorie B) a Martin Panák (kategorie C).

Průběh 58. ročníku soutěže byl standardní. Letáky s úlohami a komentáře k řešením úloh I. kola 58. ročníku MO byly pro všechny kategorie soutěže dodány včas. Krajská (II.) kola v jednotlivých kategoriích se uskutečnila ve stanovených termínech: 20. 1. 2009 v kategorii A, 7. 4. 2009 v kategoriích B a C a 13. 1. 2009 v kategorii P. Celkové počty účastníků v jednotlivých krajích každé z uvedených kategorií jsou uvedeny v tabulkách, které tvoří přílohu této zprávy.

Ústřední kolo 58. ročníku Matematické olympiády v kategorii A se uskutečnilo 22.–25. března 2009 v Plzni. Organizace závěrečného kola soutěže se v tomto roce ujala Krajská komise MO Plzeňského kraje. Vlastní soutěž se konala v prostorách Západočeské univerzity v Plzni, soutěžící a členové ÚK MO byli po dobu soutěže ubytováni v Domově mládeže Středního odborného učiliště elektrotechnického a Hotelové školy v Plzni.

Slavnostní zahájení ústředního kola proběhlo v neděli 22. března 2009 v Západočeském muzeu v Plzni. Záštitu nad III. kolem soutěže převzali Mgr. *Ondřej Liška*, ministr školství, mládeže a tělovýchovy České republiky, doc. MUDr. *Milada Emmerová*, CSc., hejtmanka Plzeňského kraje, Ing. *Pavel Rödl*, primátor města Plzně, doc. Ing. *Josef Průša*, CSc., rektor Západočeské univerzity, a dále senátoři Ing. *Jiří Bís* a Mgr. *Miroslav Nenutil*. Kromě soutěžících, členů ÚK MO a garantů se zahájení soutěže zúčastnili rovněž pozvaní hosté, mezi nimiž byli především zástupci společenského života v Plzni a dále zástupci sponzorských firem (skupina ČEZ, Vydavatelství Fraus, Komerční banka, a.s., ČSOB) a Gymnázia v Plzni na Mikulášském náměstí.

Na základě jednotné koordinace úloh krajského kola kategorie A pozvala ÚK MO k účasti v ústředním kole 50 nejlepších řešitelů z celé republiky. Svého zástupce v něm tentokrát neměl pouze Karlovarský a Ústecký kraj. Soutěžními dny byly 23. a 24. březen 2009. Na řešení obou trojic soutěžních úloh měli soutěžící již tradičně vyhrazeny vždy 4,5 hodiny čistého času a za každou úlohu bylo možno získat maximálně 7 bodů.

Plzeňští organizátoři připravili pro soutěžící a pro členy ÚK MO zajímavý doprovodný program. Pondělní odpoledne bylo vyhrazeno nejprve prohlídce historického centra Plzně, dále pak byla pro všechny účastníky zajištěna zajímavá exkurze do Plzeňského Prazdroje, a.s. Odpoledne po druhém soutěžním dni absolvovali soutěžící exkurzi do některých významných pracovišť ZČU v Plzni.

Slavnostní vyhlášení výsledků a předání cen nejlepším soutěžícím se uskutečnilo ve středu 25. března 2009 dopoledne v aule Gymnázia v Plzni na Mikulášském náměstí opět za přítomnosti představitelů města Plzeň a zástupců ZČU v Plzni. Předseda ÚK MO ve svém závěrečném projevu mj. poděkoval také všem, kteří se zasloužili o bezchybnou organizaci ústředního kola kategorie A, především pak předsedkyni Krajské komise MO v Plzeňském kraji PaedDr. *Nadě Kubešové* a krátce informoval všechny přítomné o ústředním kole nadcházejícího 59. ročníku MO, které se uskuteční v březnu 2010 v Karlovarském kraji (v Chebu).

Na ústřední kolo kategorie A bezprostředně navázalo ústřední kolo kategorie P. K účasti v závěrečném kole této soutěže bylo tentokrát pozváno 30 nejlepších řešitelů krajského kola, finále soutěže se však zúčastnilo pouze 29 z nich.

Soutěžními dny ústředního kola v kategorii P byly 26. a 27. březen 2009. První soutěžní den řešili soutěžící tři úlohy teoretické, celý druhý soutěžní den byl vyhrazen tradičně řešení dvou praktických úloh. Za každou teoretickou úlohu mohli soutěžící získat nejvýše 10 bodů, za řešení každé praktické úlohy pak 15 bodů — celkově tedy nejvýše 60 bodů. Na přípravě soutěžních úloh v kategorii P se podíleli pracovníci Katedry matematické informatiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Devět z deseti vítězů soutěže v kategorii A bylo pozváno k výběrovému soustředění před 50. mezinárodní matematickou olympiádou. Ta se uskutečnila v červenci 2009 v německých Brémách. Kromě toho bylo vybráno také družstvo pro 3. ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO), který se konal koncem září 2009 v polské Poznani. Družstvo pro tuto mezinárodní soutěž tvořila šestice úspěšných řešitelů ústředního kola kategorie A, kteří se nezúčastnili 50. MMO. Počátkem července 2009 se konal v Rumunsku (Tîrgu-Mureş) za české účasti také 16. ročník Středoevropské olympiády v informatice (CEOI) a zhruba o měsíc později se české reprezentační družstvo zúčastnilo již 21. ročníku Mezinárodní olympiády v informatice v bulharském Plovdivu. Podrobnější zprávy o těchto mezinárodních soutěžích jsou uvedeny na konci ročenky.

Ústřední komise MO se během 58. ročníku soutěže sešla na dvou pravidelných jednáních, a to 12. prosince 2008 v Matematickém ústavu AV ČR v Praze a dále 23. března 2009 v Plzni u příležitosti ústředního kola MO.

Pro 40 nejlepších řešitelů krajského kola 58. ročníku MO v kategoriích B a C uspořádala ÚK MO v červnu 2009 tradiční soustředění v Jevíčku, organizované ředitelem tamějšího gymnázia, dr. Dagem Hrubým. Lektorsky chod soustředění zabezpečovali doc. Calda, doc. Boček, doc. Šimša, Mgr. Panák, dr. Švrček a dr. Hrubý. Počátkem září téhož roku se konalo v Janských Lázních na chatě Lovrana ještě výběrové soustředění nejlepších řešitelů kategorie A, jež bylo zároveň i poslední přípravou reprezentačního družstva pro 3. MEMO v Polsku. Na tomto soustředění jednotlivé semináře vedli doc. Šimša, dr. Horák, dr. Švrček, dr. Leischner, Mgr. Panák a dr. Calábek.

Závěrem dovolte poděkovat všem nadšeným učitelům matematiky, kteří nad své pracovní povinnosti připravovali své matematicky talentované žáky pro soutěž v tomto ročníku. Bez nich si lze jen těžko představit úspěšný průběh nejstarší předmětové soutěže v České republice, kterou je MO.

Projev předsedy Ústřední komise MO při slavnostním zahájení ústředního kola 58. ročníku MO v Plzni

Dámy a pánové, vážení hosté, milí soutěžící,

po následující dva dny čekají vás, posledně jmenované, hodiny nesnadného přemýšlení o matematických problémech. Atmosféru napínavého hledání dílčích poznatků, které by mohly vést k vytčenému cíli, doprovázenou pocity objevitelského nadšení z dílčích hypotéz, střídaného často trpkým poznáním, že to byly pouhé domněnky, vám nyní přiblížím velice osobním vyprávěním o jednom příběhu s doposud otevřeným koncem.

Loni v červnu v anglicky psané knize *Secrets in Inequalities* vietnamského autora *Pham Kim Hunga* (vydanou rumunským nakladatelstvím Gil Publishing House v roce 2007) jsem objevil následující úlohu samotného autora knihy:

Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\sqrt{\frac{ab}{4a^2+b^2+4c^2}}+\sqrt{\frac{bc}{4b^2+c^2+4a^2}}+\sqrt{\frac{ca}{4c^2+a^2+4b^2}} \leqq 1. \qquad (1)$$

Autorské řešení podané v knize je velmi náročné: nejprve je pro součet tří hodnot konkávní funkce $f(x)=\sqrt{x}$ využita Jensenova nerovnost s rafinovaně vybranými váhovými koeficienty, po následném dvojím užití AG-nerovnosti je úloha zredukována na důkaz takové nerovnosti:

$$\begin{aligned}9\bigl(a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\bigr)+3abc(a+b+c) &\leqq \\ \leqq 4\bigl(a^4+b^4+c^4\bigr)+17\bigl(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\bigr)&.\end{aligned}$$

I to je však nesnadný úkol řešený v knize tak, že získaná symetrická nerovnost je nejprve upravena do tvaru se součtem tří analogických sčítanců

$$\sum_{\text{cykl}}\Bigl(2a^2+2b^2+\frac{3c^2}{2}-5ab\Bigr)(a-b)^2 \geqq 0.$$

Další úvahy o znaménkách tří velkých závorek a porovnávání jejich absolutních hodnot založená na předpokladu $a \geqq b \geqq c$ zde nebudu uvádět, nemá to pro další děj příběhu význam.

Nad takovým postupem jsem si jen povzdechl, že tohle bych sám asi nikdy nevymyslel. Nepropadl jsem však trudnomyslnosti, protože vím, jak podobné příklady často autoři vytvářejí, totiž opačným postupem od metody důkazu k zadání. S chladnější hlavou a kritičností jsem si položil otázku, proč vůbec kompetentní autor zapletl do zadání úlohy odmocniny, když díky známé Cauchyově nerovnosti

$$\left(\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w}\right)^2 \leqq 3(u+v+w)$$

mohl dokazovat tvarově jednodušší, a přitom silnější výsledek

$$\frac{ab}{4a^2+b^2+4c^2}+\frac{bc}{4b^2+c^2+4a^2}+\frac{ca}{4c^2+a^2+4b^2} \leqq \frac{1}{3}. \qquad (2)$$

Možné vysvětlení bylo dvojí: buďto nerovnost (2) pro některé trojice kladných a, b, c neplatí, nebo autor nebyl schopen obecně platnou nerovnost (2) dokázat (po listování celou zmíněnou knihou bych téměř vyloučil, že její autor na nerovnost (2) nepomyslel). Že by v případě druhé možnosti byl důkaz jednodušší nerovnosti (2) ještě obtížnější než důkaz složitější nerovnosti (1)?

Poslední otázka způsobila, že jsem měl o letních prázdninách o ušlechtilou zábavu vystaráno. Dny, kdy jsem ve chvílích volna usilovně přemýšlel, jak na důkaz (2) navléct všemožné obvyklé postupy a klasické nerovnosti, se střídaly s dny, kdy jsem na počítači zkusmo hledal trojice čísel (a,b,c), pro které nerovnost (2) neplatí. Neúspěchy jednoho druhu snažení posilovaly následné snažení druhého druhu, a tak se to pravidelně opakovalo. Už mě to celé dost iritovalo, zejména ta konkrétní čtyřka ve jmenovatelích zlomků, že jsem pomýšlel, přiznám docela netakticky, i na obecnější nerovnost

$$\frac{ab}{pa^2+b^2+pc^2}+\frac{bc}{pb^2+c^2+pa^2}+\frac{ca}{pc^2+a^2+pb^2} \leqq \frac{3}{2p+1} \qquad (3)$$

s nezáporným parametrem p, v níž je zlomek na pravé straně sestaven tak, aby po dosazení $a=b=c$ přešla nerovnost v rovnost (pro záporná p nemůžeme kvůli jmenovatelům na obecnou platnost (3) pomýšlet). Slabou útěchou mi bylo, že takovou nerovnost umím dokázat v jednom konkrétním případě $p=1$, kdy zlomky nalevo mají stejný jmenovatel, takže je mohu snadno sečíst a dostat tak jednoduchou nerovnost

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leqq 1,$$

o které je dobře známo, že skutečně platí. Na druhou stranu, po dosazení do (3) krajního přípustného $p=0$ dostaneme nerovnost, která platí rovněž obecně, ovšem naopak:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqq 3.$$

Proto má také smysl se ptát, zda pro některá (aspoň malá) kladná p neplatí obecně opačná nerovnost

$$\frac{ab}{pa^2+b^2+pc^2}+\frac{bc}{pb^2+c^2+pa^2}+\frac{ca}{pc^2+a^2+pb^2}\geqq\frac{3}{2p+1}. \tag{4}$$

V listopadu jsem si vzpomněl, že můj přítel, pan docent Jaroslav Hora ze Západočeské univerzity v Plzni, je expertem na programy počítačové algebry, a že některé z nich jsou schopny dokazovat polynomické nerovnosti, zdůrazňuji *symbolicky dokazovat*, nikoliv pouze *numericky testovat*. Tak jsem mu napsal, zda by dostupnými prostředky nerovnosti (3) a (4) počítačově nezpracoval. Jako dnes si pamatuji na 27. listopad, kdy mi kolega Hora poslal email, že nerovnost (3) pro původní parametr $p=4$ skutečně platí, jak mu ohlásil počítač po asi 20 minutách výpočtů. Nejprve v programu *Mathematica 6.1* upravil nerovnost (3) s obecným p na ekvivalentní nerovnost $M(a,b,c,p)\geqq 0$ pro mnohočlen

$$\begin{aligned}M(a,b,c,p) = {} & -a^2b^3c-a^3bc^2+3a^2b^2c^2-ab^2c^3-a^5bp+3a^4b^2p-a^3b^3p+\\&+3a^2b^4p-a^4bcp-a^3b^2cp-2a^2b^3cp-ab^4cp-b^5cp+3a^4c^2p-2a^3bc^2p-\\&-ab^3c^2p+3b^4c^2p-a^3c^3p-a^2bc^3p-2ab^2c^3p-b^3c^3p+3a^2c^4p-abc^4p+\\&+3b^2c^4p-ac^5p+3a^6p^2-2a^5bp^2+3a^4b^2p^2-3a^3b^3p^2+3a^2b^4p^2-ab^5p^2+\\&+3b^6p^2-a^5cp^2-2a^4bcp^2-3a^3b^2cp^2-a^2b^3cp^2-2ab^4cp^2-2b^5cp^2+\\&+3a^4c^2p^2-a^3bc^2p^2+9a^2b^2c^2p^2-3ab^3c^2p^2+3b^4c^2p^2-3a^3c^3p^2-\\&-3a^2bc^3p^2-ab^2c^3p^2-3b^3c^3p^2+3a^2c^4p^2-2abc^4p^2+3b^2c^4p^2-2ac^5p^2-\\&-bc^5p^2+3c^6p^2+3a^4b^2p^3-2a^3b^3p^3+3a^2b^4p^3-2ab^5p^3-2a^5cp^3-\\&-2a^3b^2cp^3-2a^2b^3cp^3+3a^4c^2p^3-2a^3bc^2p^3+6a^2b^2c^2p^3-2ab^3c^2p^3+\\&+3b^4c^2p^3-2a^3c^3p^3-2a^2bc^3p^3-2ab^2c^3p^3-2b^3c^3p^3+3a^2c^4p^3+\\&+3b^2c^4p^3-2bc^5p^3\ ,\end{aligned}$$

pak do počítače vložil úkol pro p rovné čtyřem

```
Reduce[ForAll[{a,b,c},a>0&&b>0&&
c>0,M[a,b,c,4]>=0],{a,b,c},Reals]
```

a po zmíněném čase dostal kladnou lakonickou odpověď „`True`“.

Ještě ten den mě napadlo, že bych mohl o nerovnosti (3) za 4 měsíce tady v Plzni povídat. Než promluvím o dalších počítačových experimentech, které pro mne kolega Hora udělal později, prozradím, že své osobní marné pokusy a první prohru v důkazovém souboji s počítačem jsem nebral tragicky. Naopak poměrně sebevědomě jsem usoudil, že nic snadného ke zdolání nerovnosti (3) jsem snad nepřehlédl, a tak jsem ji v prosinci — jak s hodnotou $p = 4$, tak s obecným p — rozeslal současným i minulým českým reprezentantům na MMO i starším kolegům — úlohářům z Čech, Moravy, Slovenska i Polska. Do dnešního dne se nikdo z nich neozval, že by vyřešil problém alespoň pro p rovné čtyřem.

Jaké ovoce přinesly další týdny komunikace s kolegou Horou? Předně poznání, že opačná nerovnost

$$\frac{ab}{pa^2 + b^2 + pc^2} + \frac{bc}{pb^2 + c^2 + pa^2} + \frac{ca}{pc^2 + a^2 + pb^2} \geqq \frac{3}{2p+1} \tag{4}$$

(splněná, jak víme, pro $p = 0$) nebude platit s obecnými kladnými a, b, c pro žádné kladné p. Při zadání najít protipříklad pro p rovné 10^{-5}

```
FindInstance[a>0&& b>0&&c>0
&&M[a,b,c,1/100000]>0,{a,b,c},Reals]
```

dostal kolega Hora z počítače odpověď $\{a \to 1/32\,768, b \to 1/2, c \to 1\}$. Po podobném testování ještě menších kladných p pochopil, že bude moci nechat $b = 1/2$, $c = 1$ a dohledávat k danému malému p vhodné malé a. Proto zaútočil obecně s úkolem

```
Reduce[ForAll[p,p>0,Exists[a,a>0,M[a,1/2,1,p]>0]]]
```

a podle očekávání dostal kladnou odpověď.

Po takové cenné kolegově nápovědě už nebylo obtížné vysvětlit bez užití počítače, jak je to s nerovností (4). Kdyby platila s určitým kladným p pro všechny trojice kladných a, b, c, musela by ze spojitosti platit i pro trojici $(0, 1/2, 1)$. Pro ni však po dosazení dostáváme nerovnost

$$0 + \frac{2}{p+4} + 0 \geqq \frac{3}{2p+1},$$

která neplatí pro žádné $p < 10$. Všiml jsem si, že ještě ničivější dopad má užití trojice $(0, 1, 1)$, pro niž vyjde nerovnost

$$0 + \frac{1}{p+1} + 0 \geqq \frac{3}{2p+1},$$

jež dokonce neplatí pro žádné kladné p. Tím je naděje na obecnou platnost nerovnosti (4) pro nějaké kladné p definitivně zmařena.

Daleko překvapivější a dodnes nezavršený vývoj událostí se rozvinul kolem nerovnosti (3). Jak už víme, s hodnotou $p = 4$ stála na začátku našeho příběhu a 27.11. byla dokázána na počítači s programem *Mathematica*. Ten pracoval s nerovností o třech proměnných $M(a,b,c,4) \geqq 0$, kde

$$\begin{aligned} M(a,b,c,4) = {}& 48(a^6+b^6+c^6) - 36(a^5b+b^5c+c^5a) - 144(a^5c+b^5a+ \\ &+ c^5b) + 252(a^4b^2+a^4c^2+b^4a^2+b^4c^2+c^4a^2+c^4b^2) - 36(a^4bc+ \\ &+ b^4ca+c^4ab) - 180(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3) - 180(a^3b^2c+b^3c^2a+c^3a^2b) - \\ &- 153(a^3bc^2+b^3ca^2+c^3ab^2) + 531a^2b^2c^2. \end{aligned}$$

K dalším pokusům mi kolega Hora především napsal, že jeho počítač nebyl schopen řešit podobný úkol pro čtyři proměnné, tj. vypočítat všechny hodnoty p dané zadáním

```
Reduce[ForAll[{a,b,c},a>0&& b>0&&
c>0&&p>0&&M[a,b,c,p]>=0,p,Reals],
```

Takový úkol stroj po určité době vzdal. Co ten jeho počítač utáhl, ocituji z přítelovy zprávy: *Pokud mu dám konkrétní hodnotu parametru* p*, dostanu po několika desítkách minut odpověď, zda je mnohočlen* M *nezáporný pro všechna kladná* a, b, c *či nikoliv. Projel jsem několik přirozených čísel. Vyšlo mi, že hypotéza platí pro* $p = 1,2,3,4,5,6$, *neplatí pro* $p = 7,8,9,\ldots,20,30,50,100$. *Pro* $p = 7$ *to vyvrací* $a = 5/2$, $b = 1/3$, $c = 1$. *Tak jsem zkoušel ještě* p *mezi šesti a sedmi. Platí to pro* $13/2$ *a* $33/5$, *ne však pro* $20/3$. *Pak jsem ještě zkoušel* p *v pravém okolí nuly. Vyhovují* $1/2$, $1/5$, $1/6$, $1/7$, $1/8$ *i* $1/9$, *ne však již* $1/10$. *Pro ni to vyvrací protipříklad* $a = 3/4$, $b = 3/4$, $c = 1$.

Jistě pochopíte, jaké vzrušení ve mně taková nečekaná zpráva vyvolala a jaký závěr se z poskytnutých informací nabízí. Zdá se, že vyhovující hodnoty parametru p vytvoří jeden interval s hranicemi přibližně 0,1 a 6,6. Tato hypotéza mě přivedla k nápadu, zda by se bez počítače nedala vyloučit obecná platnost nerovnosti (3), když je p hodně malé nebo hodně velké, nějak podobně jednoduše, jako byla vyloučena všechna kladná p u opačné nerovnosti (4). Tak jsem vsadil na trojice tvaru $(a,b,c) = (0,t,1)$, kde kladné t hledám v závislosti na daném p, aby po dosazení platila opačná nerovnost

$$0 + \frac{t}{pt^2+1} + 0 > \frac{3}{2p+1}.$$

Existencí takového t bude obecná platnost nerovnosti (3) pro dané p vyvrácena. Každý z přítomných (myslím soutěžících) by rychle zjistil, že vyhovující t nalezneme jenom pro ta kladná p, která splňují jednu z nerovností

$$p < \frac{8-3\sqrt{7}}{2} \doteq 0{,}03 \quad \text{nebo} \quad p > \frac{8+3\sqrt{7}}{2} \doteq 7{,}97.$$

Přestože takové meze jsou o dost hrubší, než naznačovaly počítačové výsledky, jejich jednoduché odvození mě v první chvíli docela uspokojilo; brzy se však dostavila touha po vylepšení.

Pomohla mi šťastná náhoda. V přítelově zprávě bylo uvedeno, že hodnotu $p = 0{,}1$ vylučuje trojice $(3/4, 3/4, 1)$, na které mě zaujala rovnost $a = b$. Proto jsem začal zjišťovat, pro které další hodnoty p vyloučím obecnou platnost nerovnosti (3) jen pomocí trojic $(t, t, 1)$ s vhodným kladným t. Po dosazení takové trojice vyjdou na levé straně

$$\frac{t^2}{pt^2+t^2+p} + \frac{t}{pt^2+1+pt^2} + \frac{t}{p+t^2+pt^2} \leqq \frac{3}{2p+1}$$

dva krajní zlomky se stejným jmenovatelem, což podstatně zjednodušuje situaci. Když si navíc uvědomíme, že pro $t = 1$ musíme dostat rovnost, dojdeme nakonec k ekvivalentní nerovnosti

$$\frac{(t-1)^2\big((4p^2+4p)t^2 - t(2p^2-3p+1)+3p\big)}{(2pt^2+1)\big((p+1)t^2+p\big)(2p+1)} \geqq 0.$$

Hodnota p bude tudíž vyloučena, pokud pro ni najdeme takové t, které poslední nerovnosti nehoví, tedy kladné t s vlastností

$$(4p^2+4p)t^2 - t(2p^2-3p+1)+3p < 0.$$

Není obtížné ukázat, že takto vyloučíme interval všech malých hodnot p s horní hranicí p_0:

$$0 < p < p_0 = 5 - 2\sqrt{6} \doteq 0{,}101\,020\,514.$$

Protipříkladem všem takovým p je trojice $(t_0, t_0, 1)$ s číslem

$$t_0 = \frac{6+\sqrt{6}}{10} \doteq 0{,}844\,948\,974.$$

Výsledek mě nadchl o to více, že nalezená iracionální mez p_0 leží mezi zlomky 1/10 a 1/9, kam přesnou dolní hranici vyhovujících p umísťovaly přítelovy experimenty. Proto jsem ho požádal, aby hodnotu p_0 otestoval úkolem

```
Reduce[ForAll[{a,b,c},a>0&& b>0&&
c>0,M[a,b,c,5-2*Sqrt[6]]>=0],{a,b,c}, Reals]
```

Ocituji část jeho odpovědi: *Především Ti gratuluji k nalezení meze* $p_0 = 5 - 2\sqrt{6}$*. Pokoušel jsem se ji ověřit strojově přímo, výpočetní doba je ale neúnosná. Dnes jsem měl v práci počítač puštěný přes noc, a když ještě ani v poledne nebyl výpočtům konec, tak jsem to vzdal. Tak jsi porazil stroj K.O., aspoň co se týče programu Mathematica. Zdá se mi, že problém je v tom, že symbolické výpočty s odmocninami jsou holt krajně nepříjemné. Tak jsem tu Tvou hranici testoval racionálními čísly p ležícími blízko* p_0*, posílám to v příloze. Ještě se pokusím asi jinak.*

Zmíněné testy racionálních p dopadly dobře, uvedu jen ta dvě nejbližší testovaná přiblížení: jako vyhovující byla shledána hodnota 0,101 03 větší než p_0, naopak jako nevyhovující hodnota 0,101 020 5 menší než p_0. A tak jsem mohl vychutnávat pocit vítězství nad počítačem, možná jsem to měl i nějak oslavit, byla však na to příliš krátká doba: od 3. března 14:43 do 4. března 11:36. To jsem právě dostal z Plzně zprávu, že hodnota p_0 není vyhovující, ať ji i já sám otestuji na trojici čísel

$$a = \frac{433}{512} \doteq 0{,}845\,703, \; b = \frac{27}{32} \doteq 0{,}843\,750, \; c = 1.$$

S hořkostí jsem ten snadný úkol vyplnil, přítel měl samozřejmě pravdu. Naplnil poslední větu předchozího citátu, zadal svému počítači úkol

```
FindInstance[a>0&& b>0&&c>0
&&M[a,b,c,5-2*Sqrt[6]]<0,{a,b,c},Reals]
```

a jeho splnění ve tvaru uvedené trojice přineslo odvetné K.O. druhé straně. Marná sláva, přesná dolní mez vyhovujících p, číslo nepatrně větší než $5-2\sqrt{6}$, je opět neznámá hodnota. Povzdechl jsem si jen, jak blízko je ta trojice $(a, b, 1)$ trojici se shodnými složkami a, b, kterou jsem dříve tak šťastně našel a v jejíž rozhodující roli jsem tolik věřil. Tak to prostě při práci v matematice chodí, radosti střídají zklamání. Musím být příteli vděčný, že ve své důslednosti nepolevil a nezanechal mě žíti v bludu déle.

Chtěl bych proto kolegovi Horovi za jeho veškerou dosavadní nezištnou pomoc ve formě počítačových pokusů vyslovit veřejné poděkování, a protože je dnes tady s námi, rád bych vám ho představil.

Vážení přítomní, děkuji vám za pozornost, se kterou jste sledovali mé vyprávění. Nebylo by správné, kdybych se ještě nezmínil o jedné významné události. Dne 19. února mi můj student Mgr. Miloš Přinosil oznámil, že z Internetu stáhl dokument *Collected Problems About Inequalities* pětice autorů *Vo Quoc Ba Can, Nguyen Van Thach, Nguyen Phi Hung, Phan Hong Son, Vo Thanh Van.* Kromě anglického názvu je celý dokument ve vietnamštině a je v něm dokázáno 174 od prvního pohledu velice zajímavých a obtížných nerovností. Mgr. Přinosil si povšiml úlohy 8 s tímto zadáním:

8. *Chung minh rang voi moi so thuc a, b, c, ta co*

$$\frac{ab}{4a^2+b^2+4c^2}+\frac{bc}{4b^2+c^2+4a^2}+\frac{ca}{4c^2+a^2+4b^2}\leqq\frac{1}{3}.$$

Ano, je to přesně ta nerovnost, která mě v loni červnu nad knihou jiného vietnamského autora napadla a o které jsem vám dnes povídal! Jak vypadá její vietnamsky komentovaný důkaz bez užití počítače i prostředků vyšší matematiky, co jsem všechno při jeho luštění prožil a proč se mi zatím nedaří rozšířit jeho působnost na hodnoty parametru p různé od čísla 4, je námětem na celou poučnou přednášku, kterou bych rád v budoucnu proslovil na nějakém soustředění řešitelů matematické olympiády. Snad tam budu mít stejně pozorné posluchače, jako jsem je měl dnes ve vás.

Na úplný závěr svého vystoupení chci jménem Ústřední komise MO srdečně pogratulovat všem přítomným soutěžícím k postupu do nejvyššího kola letošního ročníku olympiády a popřát jim do obou soutěžních dopolední co nejvíce dobrých nápadů a štěstí. Prohlašuji ústřední kolo 58. ročníku MO za zahájené.

Dodatek. Díky bývalému olympioniku *Michalu Rolínkovi* jsme se při přípravě této ročenky dozvěděli o elegantním důkazu nerovnosti (2), který pochází z knihy *Inequalities with Beautiful Solutions.* Tomuto názvu zmíněný důkaz plně odpovídá, proto ho zde nyní uvedeme.

Dotyčnou nerovnost

$$\frac{ab}{4a^2+b^2+4c^2}+\frac{bc}{4b^2+c^2+4a^2}+\frac{ca}{4c^2+a^2+4b^2}\leqq\frac{1}{3}$$

pro libovolná kladná a, b, c dostaneme sečtením dvou nerovností

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{ab-c^2}{4a^2+b^2+4c^2} \leqq 0 \quad \text{a} \quad \sum_{\text{cykl}} \frac{c^2}{4a^2+b^2+4c^2} \leqq \frac{1}{3}, \tag{5}$$

kde zápis $\sum_{\text{cykl}} f(a,b,c)$ značí součet $f(a,b,c)+f(b,c,a)+f(c,a,b)$. Naším úkolem je tedy obě nerovnosti v (5) dokázat. První z nich vynásobíme čtyřmi a poté ke každému zlomku z levé strany přičteme 1. Díky rovnosti

$$\frac{4(ab-c^2)}{4a^2+b^2+4c^2}+1=\frac{(2a+b)^2}{4a^2+b^2+4c^2}$$

tak obdržíme ekvivalentní nerovnost

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{(2a+b)^2}{4a^2+b^2+4c^2} \leqq 3,$$

která je součtem tří analogických nerovností

$$\frac{(2a+b)^2}{4a^2+b^2+4c^2} \leqq \frac{2a^2}{2a^2+c^2}+\frac{b^2}{2c^2+b^2}, \tag{6}$$

jak plyne ze zřejmé úpravy součtu

$$\frac{2a^2}{2a^2+c^2}+\frac{b^2}{2c^2+b^2}+\frac{2b^2}{2b^2+a^2}+\frac{c^2}{2a^2+c^2}+\frac{2c^2}{2c^2+b^2}+\frac{a^2}{2b^2+a^2}.$$

Jak zdůvodnit nerovnost (6)? Využijeme k tomu Cauchyovu-Schwarzovu nerovnost

$$(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2 \leqq (u_1^2+u_2^2+u_3^2)\cdot(v_1^2+v_2^2+v_3^2)$$

s trojicemi čísel

$$\begin{aligned}(u_1,u_2,u_3) &= \left(\frac{a}{\sqrt{2a^2+c^2}}, \frac{a}{\sqrt{2a^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{2c^2+b^2}}\right),\\ (v_1,v_2,v_3) &= \left(\sqrt{2a^2+c^2}, \sqrt{2a^2+c^2}, \sqrt{2c^2+b^2}\right),\end{aligned}$$

pro něž platí

$$\begin{aligned}(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2 &= (2a+b)^2,\\ u_1^2+u_2^2+u_3^2 &= \frac{2a^2}{2a^2+c^2}+\frac{b^2}{2c^2+b^2},\\ v_1^2+v_2^2+v_3^2 &= 4a^2+b^2+4c^2,\end{aligned}$$

takže po vydělení kladným součtem $4a^2 + b^2 + 4c^2$ skutečně dostaneme nerovnost (6). Tím je první z nerovností (5) dokázána.

Protože v druhé nerovnosti (5) vystupují pouze druhé mocniny, pišme dále a, b, c namísto a^2, b^2, c^2, tj. dokazujme nerovnost

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{c}{4a+b+4c} \leqq \frac{1}{3}.$$

Vynásobme ji nejprve výrazem $12(a+b+c)$ a poté zlomky z levé strany upravme podle vzoru

$$\frac{12c(a+b+c)}{4a+b+4c} = 3c + \frac{9bc}{4a+b+4c}.$$

Po odečtení $3(a+b+c)$ od obou stran dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{9bc}{4a+b+4c} \leqq a+b+c,$$

která je součtem tří analogických nerovností

$$\frac{9bc}{4a+b+4c} \leqq \frac{2bc}{2c+a} + \frac{bc}{2a+b}, \tag{7}$$

jak plyne ze zřejmé úpravy součtu

$$\frac{2bc}{2c+a} + \frac{bc}{2a+b} + \frac{2ca}{2a+b} + \frac{ca}{2b+c} + \frac{2ab}{2b+c} + \frac{ab}{2c+a}.$$

Zbývá tedy dokázat nerovnost (7). Ta je opět důsledkem výše zmíněné Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti, tentokrát pro trojice

$$(u_1, u_2, u_3) = \left(\sqrt{\frac{bc}{2c+a}}, \sqrt{\frac{bc}{2c+a}}, \sqrt{\frac{bc}{2a+b}}\right),$$
$$(v_1, v_2, v_3) = \left(\sqrt{2c+a},\ \sqrt{2c+a},\ \sqrt{2a+b}\right),$$

neboť pro ně platí

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 = \left(3\sqrt{bc}\right)^2,$$
$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \frac{2bc}{2c+a} + \frac{bc}{2a+b},$$
$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 4a+b+4c.$$

Tím je celý důkaz hotov.

Tabulka 1

Počty žáků středních škol soutěžících v I. kole 58. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	71	49	128	110	149	129	23	19	371	307
Středočeský	66	15	54	32	60	40	5	4	185	91
Jihočeský	74	28	54	36	64	35	4	3	196	102
Plzeňský	51	44	57	51	68	60	15	8	191	163
Karlovarský	12	8	6	5	13	9	0	0	31	22
Ústecký	22	18	56	29	53	29	4	4	135	80
Liberecký	34	4	43	15	46	18	6	6	129	43
Královéhradecký	18	11	41	13	61	19	1	1	121	44
Pardubický	30	21	35	26	34	18	4	4	103	69
Vysočina	63	30	57	32	78	48	1	1	199	111
Jihomoravský	127	53	106	54	141	58	15	11	389	176
Zlínský	57	17	75	29	121	40	1	1	254	87
Olomoucký	24	10	19	14	32	15	2	2	77	41
Moravskoslezský	62	23	114	39	137	34	9	7	322	103
ČR	711	331	845	485	1 057	552	90	71	2 703	1 439

Tabulka 2

Počty žáků středních škol soutěžících v II. kole 58. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	37	16	44	22	59	27	17	7	157	72
Středočeský	14	1	29	11	38	12	4	1	85	25
Jihočeský	25	5	29	7	33	9	3	2	90	23
Plzeňský	38	12	48	19	54	22	7	2	147	55
Karlovarský	8	3	5	3	9	4	0	0	22	10
Ústecký	18	0	28	9	27	5	4	2	77	16
Liberecký	4	1	15	6	15	4	6	6	40	17
Královéhradecký	11	2	13	10	19	7	1	0	44	19
Pardubický	17	1	26	14	15	4	4	3	62	22
Vysočina	21	4	25	14	39	16	1	1	86	35
Jihomoravský	49	15	51	30	56	10	11	3	167	58
Zlínský	14	2	26	16	28	4	1	1	69	23
Olomoucký	10	2	14	11	15	9	2	0	41	22
Moravskoslezský	21	7	39	17	32	8	7	3	99	35
ČR	287	71	392	189	439	141	68	31	1 186	432

S ... počet všech soutěžících U ... počet úspěšných řešitelů

Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO v kategoriích A, B, C a P

Z každého kraje a z každé kategorie jsou dle dostupných výsledků uvedeni všichni úspěšní řešitelé, kteří skončili do desátého místa. Označení G znamená gymnázium.

Kraj Praha

Kategorie A

1. *Josef Tkadlec*, G J. Keplera, Praha 6
2. *Tomáš Zeman*, G J. Keplera, Praha 6
3. *Petr Ryšavý*, G J. Heyrovského, Praha 5
4. *Jáchym Sýkora*, G Ch. Dopplera, Praha 5

5.–6. *Tomáš Pavlík*, G J. Keplera, Praha 6
Karolína Rezková, G Praha 10, Voděradská

7. *Van Nhan Nguyen*, G Praha 6, Nad Alejí

8. *Radek Marciňa*, G Ch. Dopplera, Praha 5

9.–10. *Miroslav Olšák*, G Praha 5, Buďánka
Dan Šafka, G J. Keplera, Praha 6

Kategorie B

1. *Michal Turek*, G J. Keplera, Praha 6
2. *Tadeáš Dohnal*, G Ch. Dopplera, Praha 5
3. *Daniel Šafka*, G J. Keplera, Praha 6
4. *Matěj Petrouš*, G Ch. Dopplera, Praha 5
5. *Jakub Zíka*, G Praha 6, Nad Alejí

6.–7. *Vít Henych*, G Praha 7, Nad Alejí
David Votava, G Praha 9, Chodovická

8.–9. *Ondřej Bajgar*, G J. Nerudy, Praha 1
Michal Palas, G J. Keplera, Praha 6

10. *David Koubek*, G J. Keplera, Praha 6

Kategorie C

1.–2. *Matouš Helikar*, G Praha 6, Nad Alejí
Martin Töpfer, G Praha 7, Nad Štolou
3. *Tereza Andršová*, G J. Keplera, Praha 6
4.–5. *Matouš Hrubeš*, G J. Heyrovského, Praha 5
Marie Kvasnicová, G Praha 2, Botičská
6.–7. *Jiří Čížek*, Akad.G Praha 2, Korunní
Jan Hadrava, G Ch. Dopplera, Praha 5
8.–10. *Martin Hrycej*, G J. Keplera, Praha 6
Petra Kaštánková, G Praha 10, Omská 1300
Julie Tomišková, Akad.G Praha 2, Korunní

Kategorie P

1. *Vlastimil Dort*, G Praha 9, Špitálská
2. *František Hejl*, G J. Nerudy, Praha 1
3.–4. *Antonín Novák*, G Praha 6, Arabská
Martin Patera, G Praha 6, Arabská
5. *Jiří Setnička*, G Praha 9, Čakovice
6. *Ondřej Pelech*, G J. Nerudy, Praha 1
7. *Tomáš Vítek*, G Praha 6, Arabská

Středočeský kraj

Kategorie A

1. *Jan Pokorný*, G V. B. Třebízského, Slaný

Kategorie B

1. *Jan Mikeš*, G Kolín
2. *John Plechatý*, G V. B. Třebízského, Slaný
3. *Jan Musil*, G Kolín
4.–5. *Helena Brandejská*, G J. Ortena, Kutná Hora
Tomáš Martínek, G Vlašim
Jana Váňová, G J. Ortena, Kutná Hora

7.–8. *Karolína Kopecká*, G J. Barranda Beroun
Jiří Stránský, Dvořákovo G a SOŠE, Kralupy
9. *Marek Kettner*, G V. B. Třebízského, Slaný
10.–12. *Markéta Košťálová*, Dvořákovo G a SOŠE, Kralupy
Martin Procházka, G V. B. Třebízského, Slaný
Petra Čápová, G Vlašim

Kategorie C

1. *Miroslav Martínek*, G Vlašim
2. *Jindřich Škripko*, G Kladno
3. *Martin Frumar*, G dr. J. Pekaře, Mladá Boleslav
4. *Michal Berg*, G V. Hraběte, Hořovice
5. *Dominik Pěnkava*, G Kladno
6.–9. *Lenka Houdková*, G Benešov
Stanislav Hlubocký, G Kolín
Iva Kavková, G Jiřího z Poděbrad, Poděbrady
Jan Kratochvíl, G Příbram, Svatá Hora
10. *Tomáš Kumsta*, G Benešov

Kategorie P

1. *Petr Čermák*, G Kladno

Jihočeský kraj

Kategorie A

1. *Jan Matějka*, G České Budějovice, Jírovcova
2. *Pavel Veselý*, G Strakonice
3. *Martina Vaváčková*, G P. de Coubertina, Tábor
4. *Adam Jurazsek*, G České Budějovice, Jírovcova
5. *Jan Moravec*, G Český Krumlov

Kategorie B

1. *Josef Janoušek*, G P. de Coubertina, Tábor

2.–3. *Aleš Flandera*, G P. de Coubertina, Tábor
Jan Veselý, G Strakonice
4. *Petr Kaštánek*, G P. de Coubertina, Tábor
5.–7. *Vít Kubelka*, G J. V. Jirsíka, České Budějovice
Tomáš Masák, G J. V. Jirsíka, České Budějovice
František Petrouš, G České Budějovice, Jírovcova

Kategorie C

1. *František Petrouš*, G České Budějovice, Jírovcova
2. *Martin Mach*, G České Budějovice, Jírovcova
3. *Michal Hruška*, G J. V. Jirsíka, České Budějovice
4. *Kateřina Duspivová*, G Český Krumlov
5. *Lenka Čurnová*, G České Budějovice, Jírovcova
6.–7. *Lenka Stará*, G České Budějovice, Jírovcova
František Vlk, G V. Nováka, Jindřichův Hradec
8. *Šárka Voráčková*, G České Budějovice, Jírovcova
9. *Karel Kotalík*, G J. V. Jirsíka, České Budějovice

Kategorie P

1. *Pavel Veselý*, G Strakonice
2. *Jan Matějka*, G České Budějovice, Jírovcova

Plzeňský kraj

Kategorie A

1.–2. *Filip Hlásek*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Van Minh Nguyen, G Tachov
3.–5. *Trung Ha Duc*, Masarykovo G, Plzeň
Lukáš Chlad, G Plzeň, Mikulášské nám.
Jakub Klemsa, G Klatovy
6. *Karel Tesař*, VOŠ a SPŠE, Plzeň

Kategorie B

1.–2. *Martin Bucháček*, G L. Pika, Plzeň
Filip Hlásek, G Plzeň, Mikulášské nám.
3. *Tomáš Bárta*, G Plzeň, Mikulášské nám.
4. *Václav Fanfule*, G Plzeň, Mikulášské nám.
5.–6. *Sven Johannes Künkel*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Jakub Suchý, G Plzeň, Mikulášské nám.
7.–8. *Vojtěch Matula*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Jiří Němeček, G Plzeň, Mikulášské nám.
9. *Jan Kotrbatý*, G Plzeň, Mikulášské nám.
10.–12. *Michal Bathory*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Ondřej Hovjacký, G Plzeň, Mikulášské nám.
Filip Štědronský, G Plzeň, Mikulášské nám.

Kategorie C

1. *Kateřina Soukupová*, G Plzeň, Mikulášské nám.
2.–4. *Eliška Pilátová*, G J. Š. Baara, Domažlice
Martin Prudek, G Plzeň, Mikulášské nám.
Jaroslava Ryplová, Masarykovo G, Plzeň
5. *Radek Hošek*, G Plzeň, Mikulášské nám.
6. *František Havránek*, G Stříbro

Kategorie P

1. *Martin Holeček*, G Plzeň, Mikulášské nám.
2. *Karel Tesař*, VOŠ a SPŠE, Plzeň

Karlovarský kraj

Kategorie A

1.–3. *Josef Hazi*, G Cheb
Jan Humplík, První české G, Karlovy Vary
Martin Kvěš, G Sokolov

Kategorie B

1\. *Josef Hazi*, G Cheb
2\. *Miroslav Kozák*, G Cheb
3\. *Dung Le Quang*, G Cheb

Kategorie C

1\. *Pham Tat Dat*, G Cheb
2.–3. *Kateřina Jarosilová*, G Sokolov
Emil Minář, G Cheb
4\. *Tran Anh Duc*, G Cheb

Ústecký kraj

Kategorie B

1.–3. *Vojtěch Havel*, G Rumburk
Tomáš Holka, G Kadaň
David Kuboň, G Teplice, Čs. Dobrovolců
4\. *Vojtěch Havlíček*, G Č. Kamenice
5.–6. *Vojtěch Hlavenka*, G Teplice, Čs. Dobrovolců
Martin Zukerstein, G Lovosice
7\. *Michal Mojzík*, SPŠ a VOŠ, Školní 50, Chomutov
8.–9. *Kristýna Matějová*, G V. Hlavatého, Louny
Jindřich Lubeňský, G Žatec

Kategorie C

1\. *František Kaván*, G Č. Kamenice
2\. *Zuzana Boršiová*, G Teplice, Čs. Dobrovolců
3.–4. *Markéta Pilnerová*, G J. Jungmanna, Litoměřice
Otakar Zich, SPŠ a VOŠ, Chomutov
5\. *Štěpán Šimsa*, G J. Jungmanna, Litoměřice

Kategorie P

1. *Lukáš Kripner*, G T. G. Masaryka, Litvínov
2. *Karel Král*, Podkrušnohorské G, Most

Liberecký kraj

Kategorie A

1. *Klára Holková*, G F. X. Šaldy, Liberec

Kategorie B

1. *Jan Polášek*, G Turnov

2.–5. *Karolína Burešová*, G Česká Lípa
Jakub Hrnčíř, G F. X. Šaldy, Liberec
Jakub Petr, G F. X. Šaldy, Liberec
Ondřej Zlevor, G Turnov

6. *Martin Dvořák*, G Jablonec nad Nisou, U Balvanu

Kategorie C

1. *Martin Zikmund*, G Turnov
2. *Jiří Erhart*, G F. X. Šaldy, Liberec

3.–4. *Magdalena Nechanická*, G Liberec, Jeronýmova
David Pustai, G Jablonec nad Nisou, U Balvanu

Kategorie P

1. *Milan Cejnar*, G Turnov

2.–3. *Jan Polášek*, G Turnov
Martin Zikmund, G Turnov

4.–5. *Karolína Burešová*, G Česká Lípa
Vojtěch Kudrnáč, G Turnov

Královéhradecký kraj

Kategorie A

1. *Petr Pařízek*, G B. Němcové, Hradec Králové
2. *Anna Chejnovská*, G B. Němcové, Hradec Králové

Kategorie B

1. *Anetta Sternwaldová*, Biskupské G B. Balbína, Hradec Králové

2.–3. *Kateřina Medková*, Biskupské G B. Balbína, Hradec Králové
Jan Remeš, G Dobruška

4. *Anna Chejnovská*, G B. Němcové, Hradec Králové

5.–6. *Jan Fišer*, Lepařovo G, Jičín
Jan Šimbera, Jiráskovo G, Náchod

7. *Vít Baumelt*, G Dvůr Králové n. L.

8.–10. *Zdeněk Borecký*, G a SOŠ, Jaroměř
Marek Stehlík, G B. Němcové, Hradec Králové
Petra Svatoňová, G Dobruška

Kategorie C

1.–3. *Petr Bartoň*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Petr Jurčo, G Trutnov
Jakub Konrád, G a SOŠ, Jaroměř

4. *Kateřina Vlčková*, G Broumov
5. *Anežka Semrádová*, G B. Němcové, Hradec Králové
6. *Michal Pokorný*, SŠ aplik. kybernetiky, Hradec Králové
7. *Josefína Mádrová*, G Dobruška

Pardubický kraj

Kategorie A

1. *Miroslav Koblížek*, G Žamberk

Kategorie B

1.–2. *Lukáš Charamza*, G Litomyšl
Filip Lux, G Žamberk
3.–4. *Miroslav Koblížek*, G Žamberk
Martin Laštovička, G Pardubice, Dašická
5. *Tomáš Klejch*, G Litomyšl
6.–8. *Jakub Puchýř*, G Chrudim
Tereza Soukupová, G Česká Třebová
Ondřej Tobek, G Litomyšl
9. *Tomáš Felcman*, G Žamberk
10. *Zuzana Jedličková*, G Lanškroun

Kategorie C

1. *Tomáš Kubelka*, G Žamberk
2.–3. *Nikola Havlasová*, G Pardubice, Dašická
Petr Kovář, G Lanškroun
4. *Tomáš Horák*, G Chrudim

Kategorie P

1. *David Vondrák*, G Pardubice, Dašická
2.–3. *Ondřej Holý*, G Chrudim
Jan Tichý, G Pardubice, Dašická

Kraj Vysočina

Kategorie A

1. *Jan Nevoral*, G Jihlava
2.–3. *Jaromír Karmazín*, G Velké Meziříčí
Marek Lanč, G Telč
4. *Luboš Vítek*, G Jihlava

Kategorie B

1. *Kristýna Krejčířová*, G O. Březiny a SOŠ, Telč

2. *Petr Louša*, Havlíčkovo G, Havlíčkův Brod
3.–4. *Tomáš Havelka*, G Žďár nad Sázavou
Petra Staňková, G Jihlava
5. *Jan Hudeček*, Biskupské G Žďár nad Sázavou
6.–7. *Dalimil Fišar*, G Žďár nad Sázavou
Adam Kučera, G Chotěboř
8. *Jakub Prášek*, G O. Březiny a SOŠ, Telč
9.–11. *Tomáš Karásek*, G Žďár nad Sázavou
Lukáš Řídký, G O. Březiny a SOŠ, Telč
Václav Stránský, G Žďár nad Sázavou

Kategorie C

1.–2. *Ondřej Bartoš*, G Žďár nad Sázavou
Helena Fišarová, G Jihlava
3. *Jan Kuchařík*, G Jihlava
4. *Jan Klusáček*, G Třebíč
5. *Jan Mazánek*, G Žďár nad Sázavou
6. *Lucie Zemánková*, G Třebíč
7. *Filip Murár*, G Třebíč
8. *Kateřina Zagorová*, Havlíčkovo G, Havlíčkův Brod
9.–11. *Jana Novotná*, G Třebíč
Vlasta Vítková, G Jihlava
Simona Zimová, G Moravské Budějovice

Kategorie P

1. *Michal Koutný*, G Třebíč

Jihomoravský kraj

Kategorie A

1. *Samuel Říha*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *David Klaška*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
3. *Hana Šormová*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
4. *Alexander Slávik*, G Brno, T. Novákové
5. *Bohuslav Zmek*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

6.–10. *František Fiala*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Michal Horák, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Petr Hruška, G Hodonín
Hynek Jemelík, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
David Macek, G Hodonín

Kategorie B

1. *Hynek Jemelík*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *Pavel Ševeček*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
3. *František Fiala*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
4. *Aleš Dostál*, G Blansko
5.–7. *Zdeněk Jakub*, Biskupské G Brno
Petr Kočí, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Dominik Velan, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
8. *Jakub Juránek*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
9.–11. *Markéta Janošová*, G Židlochovice
Gabriela Kubíčková, G Brno, Lerchova
Stanislav Schütz, G Kyjov

Kategorie C

1. *Václav Raida*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *Pavel Polcer*, G Brno, Křenová
3.–4. *Jan Stopka*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Dominik Tělupil, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
5. *Jana Sotáková*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
6.–7. *Tomáš Jordán*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Petr Vodička, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
8. *Jakub Vošmera*, G M. Lercha, Brno
9.–10. *Klára Janošková*, G Strážnice
Bedřich Said, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie P

1. *Hynek Jemelík*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *David Klaška*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
3. *Alexander Slávik*, G Brno-Řečkovice

Zlínský kraj

Kategorie A

1. *Jan Vaňhara*, G L. Jaroše, Holešov
2. *Josef Ondřej*, G Rožnov pod Radhoštěm

Kategorie B

1. *Adam Vyškovský*, Masarykovo G, Vsetín
2. *Zuzana Kluková*, G Uherské Hradiště
3. *Markéta Švehláková*, G Kroměříž
4. *Eliška Dostálková*, G Uherské Hradiště

5.–6. *Petr Martišek*, G Kroměříž
Petr Pecha, SPŠS Vsetín

7.–10. *Matěj Kocián*, G Zlín-Lesní čtvrť
David Svoboda, G Zlín-Lesní čtvrť
Petr Tomčík, G Holešov
Eva Ullrichová, G F. Palackého, Valašské Meziříčí

Kategorie C

1. *Jan Mikel*, G Rožnov pod Radhoštěm
2. *Michal Opler*, Masarykovo G, Vsetín
3. *Tomáš Juřica*, G F. Palackého, Valašské Meziříčí
4. *David Šerý*, G Rožnov pod Radhoštěm
5. *Filip Křenek*, G Rožnov pod Radhoštěm

Kategorie P

1. *Lukáš Ptáček*, G J. A. Komenského, Uherský Brod

Olomoucký kraj

Kategorie A

1. *Jana Faltýnková*, Cyrilometodějské G Prostějov
2. *Vít Musil*, G Šumperk

Kategorie B

1. *Jan Tvrdík*, Cyrilometodějské G Prostějov

2.–4. *Daniel Frýbort*, Cyrilometodějské G Prostějov
Lukáš Kunovský, G Jeseník
Petra Macigová, G Hranice

5. *Věra Žitková*, G Šternberk

6. *Marie Kročová*, G J. Škody, Přerov

7.–11. *Karel Beneš*, G Kojetín
Pavel Francírek, G Kojetín
Kateřina Jaroušová, G Šternberk
Adéla Klárová, G Jeseník
Dominik Lachman, G Olomouc-Hejčín

Kategorie C

1. *Jiří Veselý*, G J. Wolkera, Prostějov

2. *Klára Sládečková*, G J. Škody, Přerov

3. *Gabriela Olivíková*, G J. Škody, Přerov

4. *Kateřina Burgetová*, G J. Wolkera, Prostějov

5.–6. *Šimon Rozsíval*, G Šumperk
Josef Uchytil, G Jeseník

7.–8. *Eva Gocníková*, G J. Škody, Přerov
Vendula Horčičková, G J. Škody, Přerov

9. *Tomáš Lázna*, G J. Wolkera, Prostějov

Moravskoslezský kraj

Kategorie A

1. *Miroslav Klimoš*, G M. Koperníka, Bílovec

2.–5. *Simona Domesová*, G M. Koperníka, Bílovec
Lucie Mohelníková, G M. Koperníka, Bílovec
Lenka Sumbalová, G M. Koperníka, Bílovec
Vojtěch Kaluža, G P. Bezruče, Frýdek-Místek

6.–7. *Hana Bílková*, G Frenštát pod Radhoštěm
Petr Boroš, G M. Koperníka, Bílovec

Kategorie B

1.–2. *Jiří Biolek*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
Jakub Solovský, G M. Koperníka, Bílovec
3. *Helena Svobodová*, G Frýdlant nad Ostravicí
4. *Ondřej Vejpustek*, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba
5. *Petra Koščáková*, Mendelovo G, Opava
6. *Vendula Maulerová*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
7. *Jakub Štoček*, G Havířov-Podlesí
8.–10. *Ines Arencibiová*, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba
Tomáš Bartoněk, G O. Havlové, Ostrava-Poruba
Vojtěch Šindlář, G Havířov-Podlesí

Kategorie C

1. *Lukáš Folwarczný*, G Havířov, Komenského
2. *Michal Kopf*, Slezské G Opava
3. *Barbora Mólová*, G M. Koperníka, Bílovec
4. *Ondřej Bouchala*, G Havířov, Komenského
5.–7. *Sebastián Filip*, Mendelovo G, Opava
Tomáš Hadámek, Mendelovo G, Opava
Augustin Žídek, G Frýdlant nad Ostravicí
8. *Jakub Dedek*, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba

Kategorie P

1. *Miroslav Klimoš*, G M. Koperníka, Bílovec
2. *Jitka Novotná*, G M. Koperníka, Bílovec
3. *Libor Plucnar*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek

Výsledky ústředního kola 58. ročníku MO kategorie A

Vítězové

1.–2.	*Miroslav Klimoš*, 4/4 G M. Koperníka, Bílovec	39 b.
	Josef Tkadlec, 8/8 G J. Keplera, Praha 6	39 b.
3.–4.	*Samuel Říha*, 4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	35 b.
	Tomáš Zeman, 6/8 G J. Keplera, Praha 6	35 b.
5.–6.	*David Klaška*, 3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	28 b.
	Jan Matějka, 8/8 G České Budějovice, Jírovcova	28 b.
7.–8.	*Josef Ondřej*, 7/8 G Rožnov pod Radhoštěm	26 b.
	Hana Šormová, 4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	26 b.
9.	*Miroslav Olšák*, 7/8 G Buďánka, Praha 5	20 b.
10.	*Jan Vaňhara*, 8/8 G L. Jaroše, Holešov	19 b.
11.	*Hana Bílková*, 8/8 G Frenštát pod Radhoštěm	18 b.

Další úspěšní řešitelé

12.–13.	*Nguyen Van Minh*, 6/6 G Tachov	17 b.
	Bohuslav Zmek, 3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	17 b.
14.	*Jana Faltýnková*, 8/8 Cyrilometodějské G Prostějov	16 b.
15.–20.	*Petr Boroš*, 3/4 G M. Koperníka, Bílovec	15 b.
	Simona Domesová, 7/8 G M. Koperníka, Bílovec	15 b.
	Vít Musil, 4/4 G Šumperk, Masarykovo nám.	15 b.
	Nguyen Van Nhan, 8/8 G Praha 6, Nad Alejí	15 b.
	Tomáš Pavlík, 8/8 G J. Keplera, Praha 6	15 b.
	Petr Ryšavý, 7/8 G J. Heyrovského, Praha 5	15 b.
21.–22.	*Radek Marciňa*, 3/4 G Ch. Dopplera, Praha 5	14 b.
	Alexander Slávik, 8/8 G Brno, Terezy Novákové	14 b.
23.–25.	*Duc Trung Ha*, 7/8 Masarykovo G, Plzeň	13 b.
	Zuzana Komárková, 4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	13 b.
	Lucie Mohelníková, 4/4 G M. Koperníka, Bílovec	13 b.

Výsledky ústředního kola 58. ročníku MO kategorie P

Vítězové

1.	*David Klaška*, 7/8 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	53 b.
2.	*Miroslav Klimoš*, 4/4 G M. Koperníka, Bílovec	37 b.
3.	*Vlastimil Dort*, 7/8 G Praha 9, Špitálská	34 b.
4.	*Karel Tesař*, 3/4 VOŠ a SPŠE Plzeň	33 b.
5.	*Hynek Jemelík*, 2/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	32 b.
6.–7.	*Ondřej Holý*, 8/8 G J. Ressela, Chrudim	29 b.
	Jan Polášek, 6/8 G Turnov	29 b.
8.	*Libor Plucnar*, 6/6 G P. Bezruče, Frýdek-Místek	28 b.

Další úspěšní řešitelé

9.	*Martin Holeček*, 7/8 G Plzeň, Mikulášské nám.	27 b.
10.–11.	*František Hejl*, 6/6 G J. Nerudy, Praha 1	24 b.
	Pavel Veselý, 4/4 G Strakonice	24 b.
12.	*Petr Čermák*, 7/8 G Kladno	22 b.
13.–14.	*Lukáš Kripner*, 7/8 G T. G. Masaryka, Litvínov	21 b.
	Jitka Novotná, 4/4 G M. Koperníka, Bílovec	21 b.
15.–16.	*Jan Matějka*, 8/8 G České Budějovice, Jírovcova	20 b.
	Alexander Slávik, 8/8 G Brno-Řečkovice	20 b.